基于图模型和最优化的评价方法

李永立, 吴 冲
(哈尔滨工业大学管理学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 针对评价问题中由于评价者的评价基准不同, 难以给出一个符合原始评价信息的综合评价结果的问题, 以及普遍存在的数据缺失的现象, 建立了一个新的评价方法. 运用了图论的相关原理, 将评价对象视为点, 评价者的评价行为将点与点连接起来构成边, 由此得到评价的图模型, 并转换为与之等价的二维邻接矩阵; 运用最优化原理, 将该矩阵向一维空间做投影, 得到综合的评价结果. 通过定义评价的合理性指标, 并做模拟数据和真实数据的实证分析, 验证了方法的合理性和实用性. 结论表明: 该方法充分反映了原始数据的排序信息, 可以处理存在缺失数据的情形, 并可用于大规模数据的评价问题.

关键词: 评价; 图模型; 最优化理论; 决策分析
中图分类号: F724.6 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000−5781(2013)03−0403−07

Inventing an evaluation method based on graph model and optimization

Li Yongli, Wu Chong
(School of Management, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: To solve the problem of achieving a comprehensive evaluation result consistent with the original evaluation information, which is often made difficult by different styles of evaluators, and to deal with the widespread problem of data omitting, this paper presents a new evaluation method. The method uses graph theory to view the evaluation objects as nodes and the evaluation actions as edges. As a result, the evaluation graph can be obtained and further transformed into an equivalent two-dimensional adjacent matrix. Based on the optimization theory, the paper projects the two-dimensional matrix to one-dimensional space and then calculates the results. The empirical analyses by simulated data and real data both show that the method is reasonable and practical. In conclusion, the method can make full use of the original evaluation information, adapt to the situation of data omitting and can be applied in the mass data set.

Key words: evaluation; graph model; optimization theory; decision analysis

1 引 言

关于评价理论与方法的研究一直是管理科学领域方兴未艾的课题之一, 国内外都有大量的知名学者和著名期刊关注这一课题的研究. 近三年就 Management Science 和 Operations Research 这两本运筹学的顶级期刊而言, 据不完全统计, 涉及"评价"和"排序"等关键词的论文就有十余篇, 比如: Aperjis 等[1]提出了综合排序的评价方法, Sun [2]将评价的信息用于实证研究, 考察其对客户购买行为的影响, Gordy 等[3]则将事后评价

收稿日期: 2012−01−15; 修订日期: 2012−11−01.
资助项目:国家自然科学基金资助项目(71271070); 高等学校博士点专项基金资助项目(20092302110060); 教育部新世纪优秀人才支持资助项目(NCET−08−0171).

模型用于债务等级的评估, 以及 Hochbaum 等[4] 将评价模型 SDM 用于客户采纳行为的比较等等. 国内以算子研究为特色的评价方法研究可参见徐泽水等[5,6] 的研究, 以群体决策为研究对象的评价方法可参见樊治平等[7,8] 的研究, 以及以动态综合评价为特征的方法及案例研究可参见郭亚军等[9,10] 的文献.

本文的研究从属于以上列举的评价理论与方法的课题领域, 重点关注于两个现象: 其一是由于不同的评价者有着不同的评价习惯和评价基准, 怎样在给出综合的评价结果时处理好这一问题, 使得评价的结果与既有的大多数人的评价排序是一致的[11,12], 其二是大量的评价问题存在数据缺失的现象, 怎样设计一种方法处理这些问题[13].

本文围绕着这两个问题展开评价模型的构建工作, 给出了讨论问题的基本结构, 并建立了相应的模型和设计相应的求解机制, 给出了一个判断评价方法合理性的指标, 并通过模拟数据和真实数据的实证分析, 讨论了本文评价方法的合理性和实用性.

2 评价方法的建立及求解过程

本文讨论的评价问题可以抽象为以下的模型[14]: 有 N 个物品(标记为 n, 注意到这里的物品是一个一般化的概念, 其具体可为商品、方案以及属性等等)和 M 个评价者(标记为 m), 每个评价者对这些物品中的若干个进行评价. 在模型的基本版本中, 评价采用 α 分制, 这里 α 为整数, 像一般网站上采用的 5 分制, 或者学生的成绩评估从 A 到 F 的 10 等级制等等都是基本版本的情形. 下表 1 是评价的信息汇总情况的样表, 表 2 是其一个特例, 该特例将用于展现方法的实现过程和算例分析, 表中的"－"表示未评价, 对应缺失数据的情形.

表 1 本模型中的评价信息汇总样表

Table 1 Table of the original evaluation data from the model

	评价者 1	…	评价者 M
物品 1	V_{11}	…	V_{1M}
⋮	⋮	⋮	⋮
物品 N	V_{N1}	…	V_{NM}

表 2 以 2 分制为例的评价情况汇总表

Table 2 an example from a 2-point scale evaluation system

	评价者 1	评价者 2	评价者 3	评价者 4
物品 1	1	—	2	—
物品 2	2	1	—	2
物品 3	1	1	1	—

2.1 基于图模型的评价方法的建立过程

根据评价者 m 对这些物品的评分情况, 定义每名评价者的评分向量 $\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{m}}_{\boldsymbol{\alpha N\times 1}}$ 如下. 当第 m 名评价者没有评价第 k 件物品时, $v^m_{l\times l}=0,\ l\in\{\alpha k-\alpha+1,\ \alpha k-\alpha+2,\ \ldots,\ \alpha k\}$; 当第 m 名评价者对第 k 件物品作出 z 的评分时, 有两种情况, 在 $l=\alpha k-z+1$ 时, $v^m_{l\times l}=1$; 在 $l\in\{\alpha k-\alpha+1,\alpha k-\alpha+2,\ldots,\alpha k\}\setminus\{\alpha k-z+1\}$ 时, $v^m_{l\times l}=0$. 其中 $k\in\{1,2,\ldots,N\}, z\in\{1,2,\ldots,\alpha\}$.

由此定义第 m 名评价者的评分矩阵为

$$\boldsymbol{A}^m_{\alpha N\times\alpha N}=\boldsymbol{v}^m_{\alpha N\times 1}(\boldsymbol{v}^m_{\alpha N\times 1})^{\mathrm{T}}. \tag{1}$$

将每名评价者的评分矩阵加总, 得到整个系统的评分矩阵如下.

$$\boldsymbol{A}_{\alpha N\times\alpha N}=\sum_{m=1}^{M}\boldsymbol{A}^m_{\alpha N\times\alpha N}=\sum_{m=1}^{M}\boldsymbol{v}^m_{\alpha N\times 1}(\boldsymbol{v}^m_{\alpha N\times 1})^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}^m_{\alpha N\times\alpha N}$ 就是本文对于评分系统信息处理的工作, 将其转化为矩阵的数学表述形式. 这样的表述方式是基于用图的理论来看待这样一个评价问题, 这里将物品视为点(这些点有着不同的分数属性), 将评估视为边, 构成了一个图的形式. 为具体的说明以上各式的含义及与图的对应关系, 以下以表 2 的数据为例进行说明.

根据表 2 中评价者 1 的评分信息, 可以表述为图 1 的形式, 注意到这里的每个物品是图中的点, 而评价的行为将它们联系起来构成了图的边; 这里的每个点有着两个属性信息, 即"评分为 2 分"的属性和"评分

为 1 分"的属性. 对于每个评价者而言, 这两个属性是互斥的, 比如: 评价者 1 给了物品 1 (标记为 n_1) 1 分, 就不会对其 2 分的属性认可; 同理, 其给了物品 2 (标记为 n_2) 2 分, 就不会对其 1 分的属性认可, 如此, 这一评价行为构成了物品 1 的 1 分属性和物品 2 的 2 分属性之间的连线; 同理可得图 1 中其他的连线(即图的边).

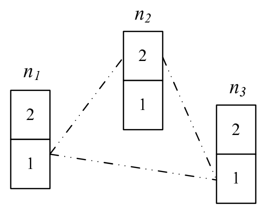

图 1　评价者 1 的评价图示

Fig. 1　The evaluation graph of evaluator No.1

将评价者 1 的评价信息用一维的向量表达, 利用 2.1 节的定义得到 $\boldsymbol{V}_1$, 如下所示

$$\boldsymbol{V}_1 = [0\ \ 0 ¦ 0\ \ 1 ¦ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}},$$

其中"¦"将向量分成了三部分, 分别对应着三种物品, 而在每个分割的两个元素中, 第一个表示支持 2 分的属性, 第二个表示支持 1 分的属性, 如 $\boldsymbol{V}_1$ 中第一个分割单元中的"1"表示对物品 1 评价为 1 分, 类似地可以得到其他数字的含义. 当某物品没有被评价时, 相当于该物品的两个得分属性都没有被支持, 这时该物品对应的分割单元内为 0, 比如, 评价者 2 的评分向量为 $[0\ \ 0 ¦ 0\ \ 1 ¦ 0\ \ 1]^{\mathrm{T}}$, 其没有对物品 1 做评价, 所以第一个分割单元内的两个元素全为 0.

$$\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

用一维的向量虽然可以完全反应某一名评价者的评价信息, 但不能直观地表达图中"边"的关系, 即评价者通过评价行为将物品联系起来的关系, 而这个关系对于反应评价者的评价习惯和比较不同物品间的评分则是重要的. 通过定义向量的乘法运算可以得到与图示等价的二维矩阵, 这由式(1)所定义. 比如对于反应第一个评价者评价情况的列向量 $\boldsymbol{V}_1$, 其通过定义矩阵乘法得到的矩阵为 $\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}$, 如上式所示. 矩阵乘法的定义使得边的关系得以表述, 这是因为以矩阵中的第二行第三列的元素 1 为例, 其来自于列向量 $\boldsymbol{V}_1$ 的第二个元素 1 和行向量 $\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}$ 的第三个元素 1 的乘积, 而前者意味着对物品 1 打了 1 分, 后者意味着对物品 2 打了 2 分, 这时, 矩阵 $\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}$ 第二行第三列的元素 1 就反映了两者的关联信息, 对应着图 1 中物品 1 与物品 2 之间的连线. 这个例子解释了矩阵乘法与图中边的关系. 由此可见, 其他的非对角线上的元素都有着类似的解释, 而对角线上的元素则表达了与一维向量一样的含义. 因此, 矩阵与图示表达了同样的信息, 矩阵是图示等价的数学表达.

2.2　基于最优化理论的评价方法的求解过程

为了得到全部物品最终的评价得分向量, 需要将以上反应全体评价信息的矩阵 $\boldsymbol{A}_{\alpha N\times\alpha N}$ (简记为 $\boldsymbol{A}$)进行降维处理, 需要将其降到一维, 同时又尽可能地保持矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的信息少损失, 则考虑矩阵在一维向量上的投影, 即以下的最优化问题

$$\begin{cases} \mathrm{Max}\ \ \dfrac{\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}}{\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}}, \\ \mathrm{s.t.}\ \ \displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha N} w_i = 1. \end{cases} \tag{3}$$

其中 w_i 是向量 $\boldsymbol{W}$ 的第 i 个元素.

以上优化的目标函数相当于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在向量 $\boldsymbol{W}$ 上的投影. 注意到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非负性和对称性, 以上最优化问题相当于求矩阵的主特征值及其对应的主特征向量; 并且根据 Perron-Frobinus 定理[15], 以上最优化问题具有唯一非负解.

将求得的 $\boldsymbol{W}$ 像 $\boldsymbol{V}_1$ 那样按照物品分隔, 并针对每一分割的单元逐一进行归一化运算, 将运算的结果与相应的分数求积再求和即可得到相应物品的评价得分, 具体可参考 2.3 节的算例.

2.3 算例

以表 2 的数据为例, 应用基于图模型的表达法和最优化的求解方法, 可以得到反应既有评价信息的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 其主特征根对应的特征向量 $\boldsymbol{W}$ 及其针对每一物品逐个归一化的结果 $\overline{\boldsymbol{W}}$, 即

$$\boldsymbol{A}=\sum_{m=1}^{4}\boldsymbol{V}_m\boldsymbol{V}_m^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&0&2&1&0\\0&0&0&1&1&0\\1&1&1&0&0&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}0.2176\\0.3398\\\hdashline 0.4352\\0.2176\\\hdashline 0.0000\\0.7749\end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{W}}=\begin{bmatrix}0.3904\\0.6096\\\hdashline 0.6667\\0.3333\\\hdashline 0.0000\\1.0000\end{bmatrix}.$$

由 $\overline{\boldsymbol{W}}$ 的结果可算得物品 1, 2 和 3 基于本文模型的综合评分分别为 1.390 4, 1.666 7 和 1.000 0.

2.4 对方法的评述

本文的方法从联系的观点看问题, 通过引入图(也可以理解为网络)的观点, 将评价者与评价者, 评价对象与评价对象, 评价者与评价对象通过评价行为关联起来. 这一关联跳出了既有的评价方法的建立思路, 有助于更充分利用系统中已有的信息, 而且有助于将图分析的工具引入评价方法的研究. 具体地说, 本文的方法有以下的三点贡献:

1) 将图分析的思想引入评价问题的研究, 其有助于抓住原有系统中的各种联系, 体现评价者的评价基准, 使得得到的结果能够更多地反映原有系统中的信息, 而这是保证评价结果全面和可信的重要基础. 由此, 也产生了下文论证的该方法的良好保序性, 能够反映大多数评价者的偏好信息.

2) 跟既有的评价方法相比较, 本文的方法在建立的思想上具有新颖性, 即从最大化的保留原有系统中的信息出发建立评价模型, 也从信息最大化保留的角度得到评价结果, 而这对于得到合理的评价结果是重要的, 因为评价本身就要求综合、全面的反映既有的信息. 如果在建立模型之初, 就没能系统地和较全面地反映系统的信息, 得到的评价结果将是有偏的, 比如常用的取平均的评价方法, 其只用到了评价者对于每个物品的打分信息, 忽视了评价者之间由于打分而产生的联系和物品之间的联系, 进而就难以反映评价者的评价基准和评价偏好问题, 这将产生评价的不合理现象, 这一点将在本文的 3.2 节进行阐述.

3) 本文提出的图模型具有可扩展的性质, 比如这里物品之间的联系是通过评价行为作为图的边产生的, 事实上, 其关联的方式还有很多种, 比如评价者的性别、职业, 比如物品的颜色、价格等等; 如果从本文建立的图模型出发, 就相当于建立起了物品, 评价者以及反映物品和评价者之间关联的网络, 这对于综合地和全面地评价和反映系统的特性则是重要的思想.

3 方法的实证分析

下面通过实证分析研究本文方法的相关特性, 包含了方法的合理性, 与既有评价方法的比较及其用于大规模含有缺失数据集的适用性方面. 像机器学习分类算法中用于检验方法的准确性一样(比如, 在测试集上考察“分类正确的比例”这个指标来比较方法的优劣), 本文首先提出一个指标用于考察评价方法的好坏.

3.1 评价方法合理性的验证指标

本文应用 Kendall’s Tau(记为 τ)这个指标用于“评价方法”的合理性验证. 这个指标最初用于比较两个向

量的排序是否一致, 其原始定义为: 对于向量 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $(b_1, b_2, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 按照以下规则求得两两比较的 C_{ij} 如下.

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果}(a_i < a_j \text{且} b_i < b_j)\text{或者}(a_i > a_j \text{且} b_i > b_j)\text{或者}(a_i = a_j \text{且} b_i = b_j) \\ 0.5, & \text{如果}(a_i = a_j \text{且} b_i \neq b_j)\text{或者}(a_i \neq a_j \text{且} b_i = b_j) \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

则两两比较的结果加总为 $C = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=i+1}^{n} C_{ij}$, 由此得到度量两个向量排序一致性的指标 Kendall's Tau 为 $\tau = (4C/(n(n-1))) - 1$.

注意到以上定义的度量指标具有以下的几个性质:

1) 如果两个向量的排序完全一致, 则 $\tau = 1$, 如果完全相反, 则 $\tau = -1$;

2) τ 的值介于 -1 和 1 之间, 随着两个向量一致性的变强, 则 τ 值变大.

应用以上的 τ 值可以考察得到的评价结果与原始评价数据在排序方面的一致程度, 通过定义 $\boldsymbol{V}_{\text{total}}$ 为应用某种评价方法得到的评分向量, 如果 $\boldsymbol{V}_k$ 是第 k 个评价者的评分向量, 则两者的排序一致程度可以应用 $\tau(\boldsymbol{V}_{\text{total}}, \boldsymbol{V}_k)$ 表示, 那么对于全体 M 个评价者, 其平均的一致程度(记为 $\bar{\tau}$)可表示为 $\bar{\tau} = \sum\limits_{k=1}^{M} \tau(\boldsymbol{V}_{\text{total}}, \boldsymbol{V}_k)/M$. 这个量反映了基于某种方法得到的评分向量的排序结果与原始各个评分向量给出的排序信息的一致程度, 这个值越大, 说明得到的结果越如实地反映了既有的评价排序信息, 这是评价方法合理性的重要标志之一.

对于有缺失数据的情形, 只需抽取向量 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $(b_1, b_2, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 共同的没有缺失的部分, 再采用以上的定义, 这时向量的长度 n' 将小于 n, 而其他的地方与上面的情况则是一致的.

3.2 基于模拟数据的实证分析

假设有 3 种物品(分别标记为 n_1, n_2 和 n_3)和 4 个评价者(记为 m_1 至 m_4), 采用 5 分制的评价体制, 5 分最好, 1 分最差, 其评价情况由下表 3 左部所示, 其中“$-$”表示未评价, 反应数据缺失的情况. 应用本文方法, SDM 方法[16] 和平均值方法[17] 的评价得分结果如表 3 右部所示, 并且每种方法与既有评价信息的平均一致程度 $\bar{\tau}$ 由表 4 所示.

表 3 原始评价信息及各种方法得到的评价结果汇总表

Table 3 Table of the original data and the results of three methods

	m_1	m_2	m_3	m_4	本文方法	SDM方法	平均值方法
n_1	4	—	1	1	1.00	1.20	2.00
n_2	—	2	2	3	2.11	2.31	2.33
n_3	5	1	—	2	1.40	2.36	2.67

表 4 各种方法的 $\bar{\tau}$ 值

Table 4 $\bar{\tau}$ values of three methods

方法名称	$\bar{\tau}$值
文本方法	1.00
SDM 方法	0.58
平均值方法	0.58

表 3 和表 4 中的 SDM 方法的实现步骤具体可参见文献[4]. 由表 3 和表 4 可以发现, 用本文的方法得到的评价分数能够反映出原有评价者的评价排序信息, 也即对于既有的原始评价数据而言, n_2 要好于 n_1 和 n_3, 同时 n_3 要好于 n_1, 这对于得到综合的评价分数则是重要的原则. 从这一角度说, 本文的方法是优于用于对比的两种方法的, 这也是本文方法合理性的体现.

同时注意到, 每个评价者的给分标准是不同的, 比如对于 m_1 而言, 可能其倾向于打高分, 而其他评价者则不然, 如果应用平均值方法或 SDM方法, 很难排除其高分对于低分的“淹没”作用(也即求平均值或进行最优化求解时, 较大的数发挥着较为重要的作用), 而本文的方法则可以一定程度上避免这样“淹没”作用的发生, 究其原因在于本文通过图论的观点将物品由评价者联系起来, 重点突出了评价的序关系, 而淡化了评价分数大小的作用.

3.3 基于大规模真实数据的实证分析

将本文方法应用于大规模的真实数据, 旨在检验本文方法的实用性特征. 这里选取一个在线电影客户的打分数据集, 在该集合中包含每个评论者对电影的打分数据, 该打分的体制为 1 分到 5 分, 1 分最差, 5 分最

好. 数据集的网址为 www.grouplens.org, 选取其中有 943 个人参与, 对 1 682 部电影打分的数据, 总的评分数据量约为 100 000. 注意到这个集合包含了大量的缺失数据, 每个评估者平均评价的电影量为 106 部, 远远小于 1 682 这个值.

将本文的方法用于该数据集, 在单核 2G 内存的个人便携式计算机上进行运算工作, 用时 9.2 s, 得到如下图 2 所示的评分分布柱状图. 同时在该数据集上计算平均一致性指标, 其值为 0.84, 而应用平均值方法得到的该指标为 0.41. 综上可见, 本文方法的计算复杂度不高, 可适用于大规模数据的评价问题, 同时具有较好的保序能力, 充分反映既有的评价偏好信息. 关于本文的计算复杂度, 主要集中在式(3)求主特征向量的步骤中, 在本文的“附录”中指出了具体的算法步骤, 并论述了其为一个多项式时间的算法, 因此对于大规模的数据评价是可行的.

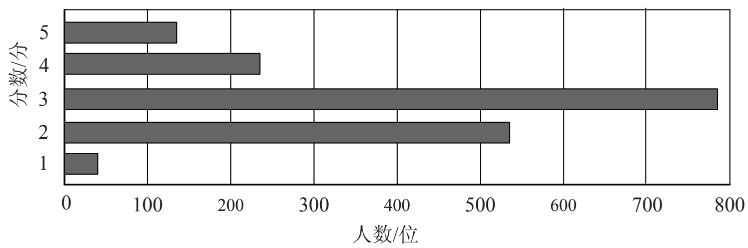

图 2 本文方法用于大规模数据的评分分布柱状图

Fig. 2 Results of the mass data set based on graph model

4 结束语

针对不同的评价者有着不同的评价习惯及评价标准的事实, 以及大量的评价问题存在数据缺失的现象, 本文基于图论的方法提出了一个新的评价模型, 并应用最优化的理论, 从保留原有矩阵最大信息的角度对模型进行求解. 从方法提出的过程可以发现, 该方法具有客观性的特征, 并充分反映了原始的评价信息, 可以用图示和矩阵反映出评价者通过评价行为将物品联系起来的事实, 这一视角有助于挖掘不同评价者的评价习惯与评价基准. 通过两个实证分析和比较对照, 可以发现本文的方法是合理的, 同时可用于大规模的评价问题, 具有较好的保序性特征, 能充分反映原始的高维评价信息和每个评价者的偏好信息.

但本文的基本模型讨论的是整数分数体制的评价问题, 对于连续分数的评价体制, 区间分数的评价体制及模糊数的评价体制没做讨论, 这将成为进一步的工作, 而这些工作的本质在于图中点(即物品)的属性的刻画方法(注意到, 整数体制时, 本文中点的属性为离散的分数), 把握这一点将有助于把本文的评价方法作为一个基准的框架做进一步的研究工作.

参考文献:

[1] Aperjis C, Johari R. Optimal windows for aggregating ratings in electronic marketplaces[J]. Management Science, 2010, 56(5): 864–880.

[2] Sun M. How does variance of product ratings matter[J]. Management Science, 2012, 58(4): 696–707.

[3] Gordy M B, Willemann S. Constant proportion debt obligations: A postmortem analysis of rating models[J]. Management Science, 2012, 58(3): 476–492.

[4] Hochbaum D S, Centeno E M, Yelland P, et al. Rating customers according to their promptness to adopt new products[J]. Operations Research, 2011, 59(10): 1171–1183.

[5] Xu Z S. Intuitionistic fuzzy aggregation operators[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2007, 15(6): 1179–1187.

[6] Xu Z S, Yager R R. Power-geometric operators and their use in group decision making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2010, 18(1): 94–105.

[7] Fan Z P, Yue Q, Feng B, et al. An approach to group decision-making with uncertain preference ordinals[J]. Computers & Industrial Engineering, 2010, 58(1): 51–57.

[8] 姜艳萍, 樊治平, 丛　飞. 指标具有均衡性期望的多指标决策方法[J]. 系统工程学报, 2011, 26(6): 746−751.
Jiang Yanpin, Fan Zhiping, Cong Fei. Method for MADM with equilibrium aspiration on attributes[J]. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(6): 746–751. (in Chinese)

[9] 郭亚军, 姚　远, 易平涛. 一种动态综合评价方法及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(10): 154−158.
Guo Yajun, Yao Yuan, Yi Pingtao. A method and application of dynamic comprehensive evaluation[J]. Systems Engineering: Theory & Practice , 2007, 27(10): 154–158. (in Chinese)

[10] 郭亚军, 胡　蕾, 王志刚. 具有三次差异驱动特征的动态综合评价方法[J]. 系统工程学报, 2011, 26(4): 546−550.
Guo Yajun, Hu Lei, Wang Zhigang. Method of dynamic comprehensive evaluation based on three stage difference driving features[J]. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(4): 546–550. (in Chinese)

[11] Bartholdi J, Tovey C A, Trick M A. Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election[J]. Social Choice Welfare, 1989, 6(2): 157–165.

[12] 侯　芳, 郭亚军. 基于评价局部环境的双目标协同优化评价法[J]. 系统工程学报, 2012, 27(3): 407−414.
Hou Fang, Guo Yajun. Group evaluation method with bi-goal evolution program based on given evaluation environment[J]. Journal of Systems Engineering, 2012, 27(3): 407–414 (in Chinese)

[13] Afifi A A, Elashoff R M. Missing observations in multivariate statistics: Review of the literature[J]. Journal of American Statistical Association, 1966, 61(315): 595–604.

[14] 李永立, 吴　冲, 王昆声. 基于图论和信息最大化保留的在线推荐方法[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(9): 1718−1725.
Li Yongli, Wu Chong, Wang Kunsheng. On-line recommendation method based on graph model and maximizing information retention[J]. Systems Engineering: Theory & Practice , 2011, 31(9): 1718–1725. (in Chinese)

[15] David G L. Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications[M]. Toronto, Canada: John Wiley & Sons, Inc., 1979.

[16] Hochbaum D S. Ranking sports teams and the inverse equal paths problem[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2006, 4286: 307−318.

[17] 杨　铭, 祁　巍, 闫相斌, 等. 在线商品评论的效用分析研究[J]. 管理科学学报, 2012, 15(5): 65−75.
Yang Ming, Qi Wei, Yan Xiangbin, et al. Utility analysis for online product review[J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(5): 65–75. (in Chinese)

作者简介:

李永立(1985—), 男, 辽宁沈阳人, 博士生, 研究方向: 管理科学与工程, Email: 0440004@fudan.edu.cn.

吴　冲(1971—), 男, 黑龙江哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 管理科学与工程, Email: wuchong@hit.edu.cn.

附录

对于式(3) 求主特征向量的算法步骤及其为多项式时间复杂度的论证. 在本文 3.3 节实证的大规模数据集评价问题中, 用到了以下的算法.

输入 矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$, 最大允许误差 ε.

输出 矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 的最大特征值 λ 及相应特征向量 $\boldsymbol{x}$.

步骤 1 $\boldsymbol{x}=[1,\,1,\,\ldots,\,1]$.

步骤 2 计算 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 每行的和 $R_i,\ i=1,\,\ldots,\,n$, 每行的和的最大值和最小值分别记为 $R_{\max}$ 和 $R_{\min}$.

步骤 3 若 $R_{\max}-R_{\min}\leqslant\varepsilon, \lambda=(R_{\max}+R_{\min})/2$, 退出.

步骤 4 重新计算 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 的每个元素$a_{ij}=a_{ij}R_i/R_j$.

步骤 5 重新计算特征向量 $\boldsymbol{x}$ 的每个元素, $x_i=x_iR_i/R_{\max}$. 转至步骤 2.

注意到本文矩阵求特征值和特征向量的算法中只用到了非 0 元素, 这个复杂度不高, 是多项式级的, 具体说明如下: 步骤 2 的时间复杂度为 $\mathrm{O}(n^2)$, 第四步的时间复杂度为 $\mathrm{O}(n^2)$, 步骤 5 的时间复杂度为 $\mathrm{O}(n)$, 因此每次迭代的时间复杂度为 $\mathrm{O}(n^2)$. 设迭代次数为 k, 则其总的时间复杂度为 $\mathrm{O}(kn^2)$.