

水力压裂裂缝的分形(fractal)几何描述

屈展

(西安石油学院)

提 要

本文在现有水力压裂的研究基础上,引入分形(fractal)几何这一新理论来对水力压裂裂缝进行微观描述,同时进一步讨论了它对水力压裂中主要参数的具体影响,从而使对水力压裂过程的理论分析和计算与实际状况更加接近。

主题词 水力压裂 裂缝 分形几何

1 前 言

水力压裂是油气井增产、水井增注的一项重要技术措施。水力压裂就是利用地面高压泵组以大大超过地层吸收能力的排量将高粘液体注入井中,在井底憋起超过井壁附近地应力及岩石抗张强度的压力后而劈开地层形成裂缝。随着继续将带有支撑剂的携砂液注入缝中,裂缝逐渐向前扩展延伸。在水力压裂中,尽可能清楚地了解裂缝的形成和扩展条件对有效地发挥水力压裂的增产、增注作用是极为重要的。由于地下情况的复杂性以及理论上的局限性,尽管长期以来对这一问题已经作了许多工作,可仍然未能得到很好的解决。

通常在水力压裂的工程计算中,压裂缝的几何形态都是以光滑的直线或曲线来考虑的。但实际上压裂裂缝破裂延伸时,裂缝扩展路径并不象通常分析中的那样平滑扩展,而是沿着一条充满崎岖不平、极不规则的曲线前进。如从数学角度去考察这种粗糙不平程度,反映出来的就是一个不规则的几何特征。法国数学家曼德布罗特(B. B. Mandelbort)在1975年到1983年间提出了一种新几何——分形几何(fractal geometry)^[1],并应用于各个领域来描述自然界充满着的不规则性现象。近年来,使用分形几何来表征岩石断裂表面已发展成为岩石断裂定量分析的一种新方法。本文就是从考虑实际水力压裂裂缝的微观形态出发,利用分形几何这一新理论来对压裂裂缝断面进行定量描述,这对深刻了解水力压裂过程中的裂缝破裂延伸机理乃至进一步改善压裂设计都有着实际意义。

屈展,1957年12月生。西南石油学院博士研究生。现任西安石油学院讲师。通讯处:陕西省西安市,邮政编码:710061。

2 基本理论

2.1 分形几何

分形几何是近十多年来发展起来的一门边缘学科。虽然它是数学的一个新分支,但它研究的却是自然界中常见的、变幻莫测的、不稳定的、非常不规则的现象。用数学的语言来说,它是研究自然界中那些没有特征长度而又具有自相似性的形状、构造和现象。但到目前为止科学家们还无法对分形下一个确切的、严格的定义,一般只能指出它的特征和需要满足的条件^[2]。分形最重要的一个特性是它必需具有自相似性。分形作为一个数学集,它的内部应具有精细结构,即在所有比例尺度上其组成部分应包含整体,而且彼此是相似的。对于一些数学模型,例如康托尔集合、科赫曲线等,这种自相似是严格的,被称为有规分形。而在物理学或其它自然界中存在的分形,它们的自相似性是近似的或者是统计意义上的,则被称之为无规分形。一个具有自相似特性的物体一定会满足标度不变性,或者说这类物体无特征长度。而对分形的描述最主要的参量是它的分形维数,确定分形维数的方法有很多种。从某种意义上讲,分形维数的大小是物体不规则性的一种度量,而分维曲线则代表着一种那些令人生畏的复杂图形中的有序结构。这里仅就本文后面将要用到的有关概念予以简述,而关于分形几何理论的详细知识可参见专门的文献。

(1) 自相似维数 对于 D 维规则图形(如正方形等),把图形的每一界面分成 b 份,则图形被分成 $N=b^D$ 份,它总满足相似比

$$r = \frac{1}{N^{1/D}} \quad (1)$$

其等效表达式为:

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (2)$$

对不规则图形,为使自相似性比率具有与上面相同的形式,唯一的要求是图形具有自相似性。 D 就被称为自相似维数。分形往往具有自相似性,因此它的维数可由相似维数的定义来求得。

(2) fractal 曲线的质量 设由度量尺度 ϵ 去量度一般 fractal 曲线的总长度 $L(\epsilon)$, 则 $L(r\epsilon) = rNL(\epsilon)$, $L(l) = 1$ 。如果 $d_f = \ln N / \ln\left(\frac{1}{r}\right)$, 则:

$$L(\epsilon) = \epsilon^{1-d_f} \quad (3)$$

2.2 断裂准则

在水力压裂的造缝机理研究中,仍主要以 Griffith 理论为依据。Griffith 从能量角度来研究裂纹的扩展,他认为形成新裂缝所需要的能量 ΔE_s 是和产生的新裂缝表面积 ΔA 成正比的^[3]。即有

$$\Delta E_s = 2\gamma_s \Delta A \quad (4)$$

其中 γ_s 是单位宏观量度的面积表面能,或者说是形成新裂缝表面所需要的单位面积表面能。

Griffith 认为为了使裂缝继续得以延伸扩展,形成新裂缝所消耗的能量应与其它能量保持平衡,即在忽略热能损耗的情况下,有:

$$\Delta E_{ext} + \Delta E_{elas} + \Delta E_s + \Delta E_{kin} = 0 \quad (5)$$

这里, ΔE_{ext} 是外力势能的变化, ΔE_{elas} 是储存在断裂体中弹性能的变化, ΔE_s 是裂缝延伸时所消耗的能量(等于 $2\gamma_s \Delta A$), ΔE_{kin} 则是动能的变化。通常把水力压裂看作准静态过程,动能及其变化是可以忽略的小。^[4] 这样

$$-(\Delta E_{ext} + \Delta E_{elas}) \geq \Delta E_s \quad (6)$$

引入弹性能释放率(或称作裂纹扩展力) G 有

$$G = -\frac{\Delta}{\Delta A} (\Delta E_{ext} + \Delta E_{elas}) \quad (7)$$

如果 $G \geq 2\gamma_s$ 被满足,则裂纹将扩展。也就是说 G 等于裂纹扩展所需要的能量,那么裂纹就能够扩展。这就是 Griffith 断裂准则。即裂缝的临界扩展力 G_{crit} 为: $G_{crit} = 2\gamma_s$ 。

象通常那样,将岩石水力压裂过程看成为线弹性材料平面应变状况下的张开型裂纹扩展^[4],弹性能释放率 G 和应力强度因子 K_I 有如下关系:

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (8)$$

式中 E 和 ν 分别为材料的杨氏模量及泊松比。

当 K_I 达到临界值 K_{Ic} 时,裂纹就会扩展,这就是 K_{Ic} 断裂准则。临界值 K_{Ic} 可以设想是一个材料常数,它是对材料裂纹扩展阻力的量度。因此, K_{Ic} 被称作断裂韧度。虽然 Griffith 准则和 K_{Ic} 准则是各自分别导出的,但两者之间是等同的。即有:

$$G_{crit} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{Ic}^2 \quad (9)$$

3 压裂缝的分形几何描述

众所周知,岩石的最终宏观破裂是与其内部微结构及外载情况紧密相关的,岩石断裂后断裂面粗糙不平,这种粗糙不平程度就是其微结构和载荷以及其它复杂因素的一个综合反映。以往水力压裂裂缝的计算都建立在假定裂缝是沿平滑路径扩展的,即在裂缝临界扩展力准则中把裂缝临界扩展力定义为:

$$G_{crit} = 2\gamma_s \quad (10)$$

如果从微观的晶粒尺寸上研究水力压裂的裂缝扩展,则上式就是相当近似的。实际上,在岩石中的裂纹扩展可能是成 Z 字形前进的,大 Z 字形中套着小 Z 字形,具有自相似性。如图 1、图 2、图 3 所示。这些断裂方式在细观上是不规则的,是一种分形。因而导致了裂缝表面的起伏不平、极不规则。所以岩石断裂后,真正的断缝表面的面积会比宏观尺码大。也就是说实际的岩石断裂面积要大于宏观量度的面积。对于单位厚度的断裂面积可以认为^[5] $A_{实} = [L(\epsilon)/L_0(\epsilon)]A_{宏}$,这里的 $L_0(\epsilon)$ 为断裂表面的直线量度。

因此,裂缝临界扩展力应推广为:

$$G'_{crit} = 2[L(\epsilon)/L_0(\epsilon)]\gamma_s \quad (11)$$

显然,在一定范围内,晶粒尺寸越小,分形表面的面积越大,利用曼德布罗特给出的 $L(\epsilon)$ 估计式:^[1] $L_i(\epsilon_i) = L_0^{df} \epsilon_i^{(1-df)}$,当断裂表面的直线量度 L_0 被取为单位长度 1 并以 l 表示晶粒尺寸时,则有

$$G'_{crit} \approx 2\gamma_s l^{(1-df)} \quad (12)$$

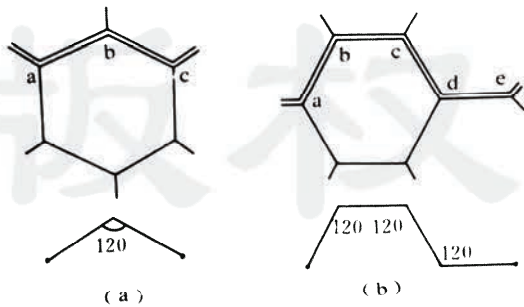


图 1 两种沿晶断裂的分形模型

Fig. 1 Two fractal models for Fracturing along grain

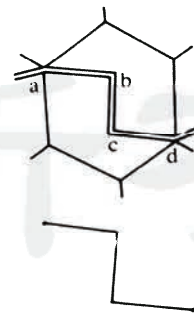


图 2 穿晶断裂的分形模型

Fig. 2 The fractal model for fracturing through grain

由于岩石是粗晶粒结构,其断裂表现为脆性断裂,主要表现为沿晶脆断、穿晶脆断以及两者的偶合形式^[5]。这几种断裂形式的裂缝扩展路径均是不规则的,但是可以考虑为具有着统计的自相似,因此能用分形几何来描述。

3.1 沿晶断裂

在沿晶断裂时,裂缝是沿晶粒边界传播的,可出现两种传播方式,形成两种沿晶断裂的分形模型,如图 1 所示。

$$(a) N=2, r=\frac{1}{\sqrt{3}}, d_f=\frac{\ln 2}{\ln \sqrt{3}}=1.262$$

$$(b) N=4, r=\frac{1}{3}, d_f=\frac{\ln 4}{\ln 3}=1.262$$

这里, N 为生成物数, r 为相似比 ($N=\frac{L_i}{\epsilon_{0i}}, r=\frac{\epsilon_{0i}}{L_{0i}}$)。相应的裂缝临界扩展力由(11)式可得

$$G'_{crit} = 2\gamma_s \left(\frac{1}{r} \right)^{d_f-1} \tag{13}$$

故有

$$(a) G'_{crit} = \sqrt{3}^{0.262} \times 2\gamma_s = 1.155 \times 2\gamma_s, \quad (b) G'_{crit} = 3^{0.262} \times 2\gamma_s = 1.334 \times 2\gamma_s,$$

由上式可见(a)情形较(b)情形耗能要小,故易发生。

3.2 穿晶断裂

岩石中存在着大量的微孔隙和微裂纹,故也常发生穿晶断裂,穿晶断裂的主要特征是在一个结晶平面上形成一个解理裂纹的相对不平面,即在一个晶粒平面内形成台阶。可将其简化为分形模型,如图 2 所示。

这时, $N=3, r=\frac{1}{\sqrt{5}}, d_f=\frac{\ln 3}{\ln \sqrt{5}}=1.365$, 相应的裂缝临界扩展力为

$$G'_{crit} = \sqrt{5}^{0.365} \times 2\gamma_s = 1.341 \times 2\gamma_s,$$

从而看到穿晶断裂比任一种沿晶断裂均要耗散更多的能量。

3.3 沿晶和穿晶相耦合断裂

在任何岩石断口上总能找到沿晶界断裂和穿晶断裂两种断裂花样。因为岩石内部晶粒中的微孔隙、微裂纹、夹杂等引起局部应力集中,而一般地会沿晶断裂(因耗散较小的能量),

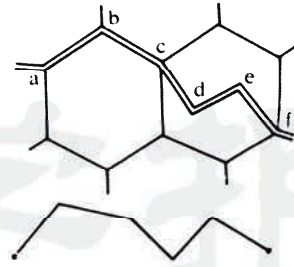


图 3 沿晶与穿晶偶合断裂的分形模型
Fig. 3 The fractal model for fracturing both along grain and through grain

所以一个岩石断裂表面一般地是沿晶和穿晶断裂的偶合体,如图3所示。

这时, $N=5$, $r = \frac{1}{\sqrt{13}}$, $d_f = \frac{\ln 5}{\ln \sqrt{13}} = 1.255$, 相应的裂缝临界扩展力为

$$G'_{crit} = \sqrt{13}^{0.255} \times 2\gamma_s = 1.387 \times 2\gamma_s$$

以上结果表明,对同一晶粒尺寸下的岩石断裂,最容易发生的是沿晶断裂,其次是沿晶与穿晶的偶合断裂。

4 分形效应对压裂裂缝破裂延伸的影响

4.1 对应力强度因子的影响

应力强度因子是对裂纹尖端周围应力和应变的一个量度,裂纹扩展和断裂两者都依赖于应力强度因子。原则上,知道了地层水力压裂裂缝的应力强度因子,就可预言其发展趋势。由(8)式可得应力强度因子为

$$K_1^2 = \frac{E}{1-\nu^2} G \quad (14)$$

把考虑裂纹扩展分形效应的裂缝临界扩展力 G'_{crit} 代入此式得分形效应下的断裂韧度为

$$K'_{lc} = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} G'_{crit} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{1-\nu^2} G'_{crit} l^{-0.262} \quad (\text{沿晶断裂}) \\ \frac{E}{1-\nu^2} G'_{crit} l^{-0.365} \quad (\text{穿晶断裂}) \\ \frac{E}{1-\nu^2} G'_{crit} l^{-0.255} \quad (\text{沿晶与穿晶的偶合断裂}) \end{array} \right. \quad (15)$$

4.2 对破裂压力的影响

所确定的地层破裂压力 P_F 正确与否将关系到压裂设计和压裂施工的成败。水力压裂的地层模型如图4所示,可把地层看成为无限大平板,假定井眼周围对称分布着两条裂缝(当井径与裂缝长度相比小得多时把井眼看成裂缝的一部分,故将单翼裂缝长度 a 看为井半径 r_w 与单缝长 l 之和),此时地层裂缝受地应力与压裂液的共同作用,它们的组合应力效应使得裂缝张开,当其应力强度因子达到断裂韧度时,地层裂缝就开始失稳破裂。参照文献[6]可知地层破裂压力为:

$$P_F = \frac{f_s \left(\frac{a}{R_w} \right)}{F_{\lambda p} \left(\frac{a}{a+R_w} \right)} \cdot \sigma_{有效} + \frac{K_{lc}}{\sqrt{\pi a} \cdot F_{\lambda p} \left(\frac{a}{a+R_w} \right)} \quad (16)$$

这里令 $i = f_B \left(\frac{a}{R_w} \right)$, $j = F_{\lambda p} \left(\frac{a}{a + R_w} \right)$ 分别为井眼影响系数和压裂液影响系数, 而 $\sigma_{\text{有效}}$ 是地层的最小有效水平主应力。那么, 考虑分形效应的地层破裂压力则为:

$$P'_F = i \cdot \sigma_{\text{有效}} + j \cdot K'_{lc} = \begin{cases} i \cdot \sigma_{\text{有效}} + j \cdot \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2} G_{\text{crit}} l^{-0.262}} & \text{(沿晶断裂)} \\ i \cdot \sigma_{\text{有效}} + j \cdot \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2} G_{\text{crit}} l^{-0.365}} & \text{(穿晶断裂)} \\ i \cdot \sigma_{\text{有效}} + j \cdot \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2} G_{\text{crit}} l^{-0.255}} & \text{(沿晶与穿晶的偶合断裂)} \end{cases} \quad (17)$$

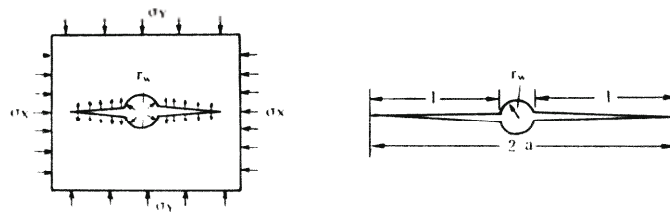


图 4 水力压裂地层破裂模型

Fig. 4 A fracturing formation model on hydraulic fracturing

在水力压裂中, 地层开始破裂时, 压力较高, 反映了破裂压力要平衡井眼周围的应力集中及其它应力和阻力。在地层中一旦造成裂缝, 裂缝在较低的压力下扩展延伸, 裂缝的延伸压力随着裂缝向地层内部的延伸而稍有增加, 这是由于流体在缝中流动阻力增加之故, 裂缝的分形效应也导致了裂缝壁面粗糙度的增加, 因此, 压裂液在缝中流动的阻力也可用分形几何来定量描述。故分形效应对裂缝延伸压力的影响很可能将是增加了所需能量和流动阻力的复合结果。

5 结 论

1. 水力压裂中, 地层压裂后裂缝壁面表现出来的不规则性反映了在破裂时损伤断裂的能量耗散, 而这种不规则性又可以由分形(fractal)几何得到很好的描述。
2. 从微观上考虑到压裂裂缝断裂面的粗糙不平, 用分形几何描述的结果表明: 这种分形效应将增大岩石破裂延伸所需要的能量, 增大应力强度因子以及破裂压力, 进一步还会增加压裂液在裂缝中的流动阻力和降低裂缝的扩展延伸速度。
3. 在岩石微结构层次上寻求某一特征参量与宏观力学量之间的关系从而改进现有的水力压裂设计计算是很有理论价值和实际意义的。利用分形几何理论来解决水力压裂问题目前还是个试探性的工作, 但很可能分形几何为微观和宏观力学相结合来研究水力压裂提供了一条新的途径, 更加成熟的结论还有待于这方面研究的进一步深入。

(本文收到日期 1992. 9. 7.)

(修改稿收到日期 1993. 2. 10)

(编辑 徐和坤)

参 考 文 献

- [1] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and Company, 1983.
- [2] 【日】高安秀树著,沈步明,常子文译. 分数维. 北京:地震出版社. 1989.
- [3] D. 布洛克著,王克仁,何明元,高桦译. 工程断裂力学. 北京科学出版社,1980.
- [4] Thiercelin, M, Jeffrey R. G. and Ben Naceur K The Influence of Fracture on the Geometry of Hydraulic Fractures. SPE 16431.
- [5] 谢和平,张永平,宋晓秋,徐汉涛编译. 分形几何——数学基础与应用. 重庆大学出版社. 1991.
- [6] 李文魁. 运用断裂理论确定地层破裂压力(P_F)值. 西安石油学院学报,1990,(3):13~23.

THE DESCRIPTION OF HYDRAULIC FRACTURING CRACK BY THE FRACTAL GEOMETRY

Qu Zhan

(Xi'an petroleum institute)

ABSTRACT

On the basis of hydraulic fracturing study, this paper gives a microcosmic description to hydraulic fracturing crack by introducing fractal geometry, and discusses its specific effect on main parameters of hydraulic fracturing. Thus, this work makes a further match of the rasalf of analysis and calculation theoretically with the actual situation in hydraulic fracturing.

版权所有