

· 研究简报 ·

半无限空间隧道应力与位移的解析延拓法求解

施有志*, 高轩能

(华侨大学土木工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 为快速得到单孔深埋任意形状隧道开挖产生的应力值与位移值, 利用复变函数解法中的解析延拓法求解. 由于是深埋隧道, 假设隧道埋深与隧径相比比较大而不考虑重力梯度影响, 直接把重力作用化为无限远处作用有外载, 同时考虑隧道衬砌的支撑作用, 利用复变函数的保角变换功能及解析延拓法, 求出了在弹性半无限空间中, 单孔任意形状隧洞外任意一点的应力值和位移值的解析解表达式. 以圆形隧道作为特例, 求出隧道围岩任意一点处的应力值和位移值解析解的显式表达式, 该解与已有的解答一致, 表明新方法的准确性. 该求解方法拓展了解析延拓法的应用, 且可考虑隧道的任意形状及法向支撑力, 结合 MATLAB 工具, 可为工程快速求解开挖应力及稳定变形分析提供便捷的方法.

关键词: 复变函数法; 解析延拓法; 隧道; 解析解; 弹性半空间

中图分类号: U 451+.2

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2013)05-0722-06

地下工程稳定性分析和设计中, 经常会遇到可假定为平面应变问题的单洞及多洞问题, 带隧洞的半空间性态分析是弹性力学的基本课题之一, 历史上许多学者对其作过研究并取得了一定成果. 1920 年 Jeffery^[1] 利用双极坐标法给出了圆形洞室的平面应力和应变的完备解答, 但解答是建立在一些限制条件基础上的, 并且解答得相当繁琐, 未能给出位移边界条件下该问题的解答. Mindlin^[2-3] 同样采用双极坐标解法, 在应力势函数的推导过程中加入了介质所受的重力场和初始应力场, 从满足隧道周边的无法向和切向应力条件开始, 提取出包括扩开挖体重量的应力势函数, 为满足位移单值和水平向无法向和切向应力边界条件, 采用试凑的办法开展一系列工作, 但由于双极坐标法本身的局限性最终仍然未能给出位移场的公式. 双极坐标法一般只求得一些简单隧洞的应力场, 不能给出位移场; 且当隧洞距离地表较近时, 双极坐标法往往给出错误的数值计算结果, 从而迫使专家学者们寻求到解决固定边界条件下半空间涵括一个隧洞问题的另外一种更重要的方法——复变函数法. 1777 年 Euler 建立的复变函数理论至今, 复变函数已经形成了非常系统的理论, 并被广泛应用到弹性力学领域^[5-8]. 复变函数

在推导平面弹性静力问题时, 能把某些复杂几何构型的单连通域保角映射为几何构形较为简单的单连通域 (例如单位圆内域或外域), 把涵括一个隧洞的半无限空间保角映射为圆环域, 然后在这些区域内运用解析函数理论, 将待求的解析函数就由该区域的边值条件来确定. 复变函数求解单隧洞问题可以归结为 2 种方法: 柯西积分法和解析延拓法. Verruijt^[8] 采用柯西积分法对半平面涵括单个隧洞的问题做出了一系列研究. 1997 年 Euler 给出了解的递推公式, 考虑了第一边界条件满足水平面无法向和切向应力, 第二边界条件满足隧洞周边的位移可展开成映射后域内单位复数的幂级数形式; 其后给出了洞室周边均布位移条件下解的递推公式并编程做了计算. 1998 年 Verruijt^[9] 也给出了解的递推公式, 满足水平面无法向和切向应力的第一边界条件, 隧洞周边的应力可展成单位复数的幂级数形式的第一边界条件. 但其工作仅局限于简单形状 (圆形、椭圆形) 的隧道. 陈子荫^[10], 吕爱钟等^[12] 用柯西积分法求解出了任意形状隧洞在半空间的应力解和位移解, 但若应用于隧道开挖的分析时, 没有考虑隧道开挖过程中管片支撑力对围岩性状影响. 王志良^[12]、张顶锋等^[13] 的推导, 则直接将隧道简化为圆形.

隧道围岩应力及变形是指隧道开挖卸荷后洞周岩体中所出现的应力及变形. 显然, 它不仅与开挖前岩体的初始应力状态、岩体的物理力学性质等因素有关, 而且也与施工方法、支护时间及支护的几何特征、力学性质等因素有关. 在力学处理上, 考虑自重的问题在求解上可以化为不考虑自重的形式, 并可简化为在外边界

收稿日期: 2012-09-25

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51278208)

* 通信作者: shiyouzhizhi_hqu@163.com, 现工作单位: 厦门理工学院
土木工程与建筑学院

上作用均匀分布的垂直荷载和水平荷载. 由此引起的计算误差, 在洞周是不大的, 并且随着隧洞埋深的增加而减小, 当埋深大于 20 倍洞跨时, 可略去不计^[1-3, 7-8]. 本文将考虑隧道为任意形状, 利用复变函数中的解析延拓法求解地下半空间任意形状的单隧洞在弹性半空间内任意一点处的应力值和位移值解析解. 在圆形断面隧道的简化条件下, 考虑隧道衬砌法向支撑力 p , 推导了弹性半空间内任意一点处的应力值和位移值解析解具体表达式, 并与相关文献已有的解答进行对比.

1 问题的描述

针对深埋隧道, 当隧道埋深大于等于 (2.5) 倍的荷载等效高度时, 可以不考虑重力梯度的影响, 把重力化为无限远处作用 P_1 、 P_2 的外载来求解, 图 1 给出了 z 平面半无限空间任意形状隧洞的构形, 图 2 为通过复变函数中保角映射后把 z 平面任意形状隧洞隧外域转化为 ξ 平面单位圆外域后的情况, 其中 P_1 、 P_2 表示无穷远处水平土体和竖向土体的应力值.

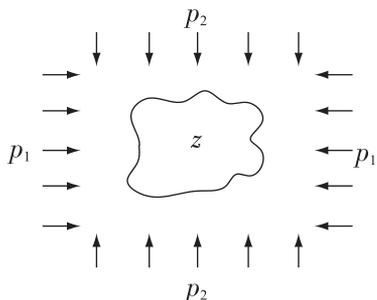


图 1 分析模型
Fig. 1 Problem formulation

由 Muskhelishvili 平面问题的复变函数解法^[7], 各应力、位移分量可通过 2 个在尺区域内的解析函数 $\varphi_1(z)$ 、 $\psi_1(z)$ 表达出来. 应力公式为

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\varphi_1'(z)], \tag{1}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)], \tag{2}$$

位移公式为

$$2G(u + iv) = K\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \psi_1(z) \tag{3}$$

公式中 u 和 v 分别是直角坐标系下的 2 个位移分量, K 为与泊松比有关的常量, 对于平面应变问题 $K = 3 - 4\mu$, 对于平面应力问题 $K = \frac{3 - \mu}{1 + \mu}$, μ 为泊松比.

2 解析延拓法求解任意形状隧洞

如图 2 所示, 将半无限平面 z_1 上任意形状的隧洞

1 的外域映射到 ξ 平面的单位圆外域, 其映射函数为^[11]:

$$z = w(\xi) = R\left(\xi + \sum_{k=0}^N C_k \xi^{-k}\right), \tag{4}$$

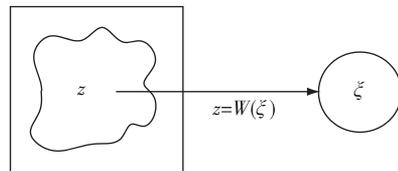


图 2 分析模型映射函数
Fig. 2 Mapped function scheme

其中, R 反映隧洞的大小; C_1, C_2, \dots, C_n 反映了隧洞的形状, C_0 反映了隧洞所处坐标系中的位置, z 和 ξ 分别为物理平面和映射平面上的复数坐标.

根据复变函数理论, 对于单个隧洞问题, 无限域中的两复应力函数可表示为^[11]

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{2\pi(1+K)}(X+iY)\ln z + Bz + \varphi_1^0(z), \tag{5}$$

$$\psi_1(z) = \frac{K}{2\pi(1+K)}(X-iY)\ln z + (B'+C')z + \psi_1^0(z), \tag{6}$$

公式中, $B = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4}$, $B' = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2}$, $C' = \tau_{xy}^\infty$, \ln 表示对其后的变量取对数; σ_x^∞ 、 σ_y^∞ 和 τ_{xy} 分别为直角坐标系下无穷远处作用的应力分量, 即代表初始应力场; X 和 Y 为隧边作用的非平衡力矢量在 2 个直角坐标系方向上的分量; 和 $\varphi_1^0(z)$ 、 $\psi_1^0(z)$ 为隧外包括无穷远点在内的单值解析函数, 其形式为

$$\varphi_1^0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n}, \tag{7}$$

$$\psi_1^0(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_n}{z^n}, \tag{8}$$

其中 a_0, a_1, \dots, a_n 和 b_0, b_1, \dots, b_n 为单值解析函数的常数项系数, 可根据具体边界条件和复平面点所在的具体位置求得其具体值. 根据已经确定映射函数 $z = w(\xi)$, 把 z 物理平面的应力函数转化到 ξ 平面的应力函数, 为此引用如下记号:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_1(z) = \varphi_1[w(\xi)] = \\ &= -\left(\frac{1}{2\pi(1+K)}(X+iY)\right)\ln w(\xi) + \\ &= Bw(\xi) + \varphi_0(\xi) = -\left(\frac{1}{2\pi(1+K)}\right) \\ &= (X+iY)\ln\left[R\left(\xi + \sum_{k=0}^N C_k \xi^{-k}\right)\right] + \end{aligned}$$

$$BR\left(\xi + \sum_{k=0}^N C_k \xi^{-k}\right) + \varphi_0(\xi), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \psi_1(z) = \psi_1[\omega(\xi)] = \\ &= \frac{K}{2\pi(1+K)}(X-iY)\ln\omega(\xi) + (B'+C')\omega(\xi) + \\ \psi_0(\xi) &= \frac{K}{2\pi(1+K)}(X-iY)\ln\left[R\left(\xi + \sum_{k=0}^N C_k \xi^{-k}\right)\right] + \\ &+ (B'+C')R\left(\xi + \sum_{k=0}^N C_k \xi^{-k}\right) + \psi_0(\xi), \end{aligned} \tag{10}$$

$\varphi(\xi)$ 和 $\psi(\xi)$ 为 ξ 平面单位圆外整个区域解析函数.

考虑边界条件为无穷远点刚体转动为0,隧洞周边无作用面力,则 $X=Y=0$,方程(9)和(10)可改写为:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_1(z) = \varphi_1[\omega(\xi)] = B\omega(\xi) + \varphi_0(\xi) = \\ &BR\left(\xi + \sum_{k=0}^N C_k \xi^{-k}\right) + \varphi_0(\xi), \tag{11} \\ \psi(\xi) &= \psi_1(z) = \psi_1[\omega(\xi)] = (B'+C')\omega(\xi) + \\ \psi_0(\xi) &= (B'+C')R\left(\xi + \sum_{k=0}^N C_k \xi^{-k}\right) + \psi_0(\xi), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\Phi(\xi) = \varphi'_1(z) = \frac{\varphi'_0(\xi)}{w'(\xi)} = B + \frac{\varphi'_0(\xi)}{w'(\xi)}, \tag{13}$$

$$\Psi(\xi) = \psi'_1(z) = \frac{\psi'_0(\xi)}{w'(\xi)} = (B'+C') + \frac{\psi'_0(\xi)}{w'(\xi)}. \tag{14}$$

又因为

$$w'(\xi) = R\left[1 - \sum_{k=1}^N (k \cdot C_k \xi^{-k-1})\right], \tag{15}$$

方程(13)乘以方程(15)得

$$\begin{aligned} w'(\xi) \cdot \Phi(\xi) &= \\ R\left[\left(1 - \sum_{k=1}^N (k \cdot C_k \xi^{-k-1})\right)\right] &\left(\frac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + \right. \\ &\left. \frac{\varphi'_0(\xi)}{w'(\xi)}\right), \end{aligned} \tag{16}$$

平面弹性复变函数求解应力公式为

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\Phi(\xi)], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\overline{w(\xi)} \frac{\Phi'(\xi)}{w'(\xi)} + \Psi(\xi)\right]. \end{cases} \tag{17}$$

利用解析延拓法结合方程(17)把单位圆内域圆外域问题化为 Riemann 问题求解可得^[11]:

$$\begin{cases} w'(\xi) \cdot \Phi_{\triangleright}(\xi) = A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{\xi^{n+1}} \\ w'(\xi) \cdot \Psi_{\triangleright}(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \overline{w'\left(\frac{1}{\xi}\right)} \left[\overline{\Phi_1\left(\frac{1}{\xi}\right)} + \right. \\ \left. \Phi(\xi)\right] - \overline{w\left(\frac{1}{\xi}\right)} \Phi'(\xi), \end{cases} \tag{18}$$

其中,

$$\Phi_{\triangleright}(\xi) = \begin{cases} \Phi_{\triangleright}^+(\xi) = \Phi_1(\xi), \xi \in S^+, \\ \Phi_{\triangleright}^-(\xi) = \Phi(\xi), \xi \in S^-, \end{cases} \tag{19}$$

$$\Psi_{\triangleright}(\xi) = \begin{cases} \Psi_{\triangleright}^+(\xi) = \Psi_1(\xi), \xi \in S^+, \\ \Psi_{\triangleright}^-(\xi) = \Psi(\xi), \xi \in S^-, \end{cases} \tag{20}$$

$$\Phi_{\triangleright}^-(t) - \Phi_{\triangleright}^+(t) = \Phi(t) - \Phi_1(t) = N(t) + iT(t), \tag{21}$$

其中 $N(t)$ 、 $T(t)$ 为隧洞边面力,应力函数 $\Phi_1(\xi)$ 是应力函数 $\Phi(\xi)$ 在单位圆内域的解析延拓应力函数;由于假设隧洞边面力为0,推出

$$\Phi_{\triangleright}^-(t) - \Phi_{\triangleright}^+(t) = 0, \tag{22}$$

所以方程(18)对应力函数 $\Phi_{\triangleright}^+(\xi)$ 、 $\Phi_{\triangleright}^-(\xi)$ 和 $\Psi_{\triangleright}^+(\xi)$ 、 $\Psi_{\triangleright}^-(\xi)$ 均适用.

当 ξ 取单位圆外域时,

$$w'(\xi) \cdot \Phi_{\triangleright}^-(\xi) = A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{\xi^{n+1}}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\triangleright}^-(\xi) = \Phi(\xi) &= \frac{1}{w'(\xi)} \left[A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \dots + \right. \\ &\left. \frac{A_{n+1}}{\xi^{n+1}} \right] = \frac{1}{R\left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{k \cdot C_k}{\xi^{k+1}}\right)} \left[A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \dots + \right. \\ &\left. \frac{A_{n+1}}{\xi^{n+1}} \right]. \end{aligned} \tag{24}$$

由于在方程(16)中 $\frac{\varphi'_0(\xi)}{w'(\xi)}$ 只包含 $(\frac{1}{\xi^2}, \frac{1}{\xi^3}, \dots, \frac{1}{\xi^n})$,比较方程(16)和(24),通过运算可得,

$$A_0 = \frac{1}{4}R(\sigma_x + \sigma_y), A_1 = 0.$$

对于方程(24)中的其他系数,则需要通过方程(18)中的第2式计算求的,其具体步骤为:首先,可证明方程(18)中第二式 $w'(\xi)\Psi(\xi)$ 为圆外无极点函数,所以无 ξ 的正幂次项,然后根据这个条件,通过解线性方程组求其他待定系数.由于,

$$w(\xi) = R\left(\xi + \sum_{k=0}^N C_k \xi^{-k}\right), \tag{25}$$

$$w'(\xi) = R\left(1 - \sum_{k=1}^N k \cdot C_k \xi^{-k-1}\right), \tag{26}$$

$$w\left(\frac{1}{\xi}\right) = R\left(\frac{1}{\xi} + \sum_{k=0}^N C_k \xi^k\right), \tag{27}$$

$$w'\left(\frac{1}{\xi}\right) = R\left(1 - \sum_{k=0}^N k C_k \xi^{k+1}\right), \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) = \Phi(\xi) &= \\ \frac{1}{w'(\xi)} \left[A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{\xi^{n+1}} \right], \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} w'(\xi)\Psi(\xi) &= \frac{1}{\xi^2} \overline{w'(\frac{1}{\xi})} \left[\overline{\Phi(\frac{1}{\xi})} + \Phi(\xi) \right] - \\ \overline{w(\frac{1}{\xi})} \Phi'(\xi) &= -\frac{d}{d\xi} \left[\overline{w(\frac{1}{\xi})} \Phi(\xi) \right] + \\ \frac{1}{\xi^2} \overline{w'(\frac{1}{\xi})} \overline{\Phi_1(\frac{1}{\xi})}, \end{aligned} \quad (30)$$

把方程(25)~(29)代入方程(30),经过一系列运算得,

$$\begin{aligned} w'(\xi)\Psi(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \left[\overline{w(\frac{1}{\xi})} \Phi(\xi) \right] + \\ \frac{1}{\xi^2} \overline{w'(\frac{1}{\xi})} \overline{\Phi_1(\frac{1}{\xi})} &= \overline{(A_{k+1} -} \\ \sum_{k=0}^N C_k \cdot k \cdot A_0) \xi^{k-1} &+ \overline{A_k} \xi^{k-2} = \overline{(A_{k-1} -} \\ \sum_{k=0}^N C_k \cdot (k-2) \cdot A_2) \xi^{k-3} &+ \overline{(A_{k-2} -} \\ \sum_{k=0}^N C_k \cdot (k-3) \cdot A_3) \xi^{k-4} &+ \dots + \\ \overline{(A_2 - \sum_{k=0}^N C_k \cdot A_{k-1})}. \end{aligned} \quad (31)$$

由于 $w'(\xi)\Psi(\xi)$ 为圆外无极点解析函数,所以 $w'(\xi)\Psi(\xi)$ 表达式中所有含 ξ 的正幂次项系数均为 0. 由此得以下线性方程组

$$\begin{cases} \overline{A_{k+1} - \sum_{k=0}^N C_k \cdot k \cdot A_0} = 0, \\ \overline{A_k} = 0, \\ \overline{A_{k-1} - \sum_{k=0}^N C_k \cdot (k-2) \cdot A_2} = 0, \\ \dots \\ \overline{A_2 - \sum_{k=0}^N C_k \cdot A_{k-1}} = 0. \end{cases} \quad (32)$$

根据上述线性方程组即可求得其他待定系数,然后将其代入方程(18)即可求的任意形状隧洞在半无限平面隧外域的应力函数 $\Phi(\xi)$ 、 $\Psi(\xi)$,然后再结合方程(33),即可求出半无限平面隧外域任意一点的应力解和位移解的普遍表达式

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\Phi(\xi)], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[\overline{w(\xi)} \frac{\Phi'(\xi)}{w'(\xi)} + \Psi(\xi) \right], \\ 2G(u + iv) = K\varphi(\xi) - \frac{w(\xi)}{w'(\xi)} \overline{\varphi'(\xi)} - \overline{\psi(\xi)}. \end{cases} \quad (33)$$

3 圆形隧洞算例求解验证

式(33)为隐式表达,在求解具体隧道断面问题时还须进一步求解,不同的断面形式具体的显式表达式

不同.这里简化为圆形断面进行求解验证,分析中考虑隧洞周边受法向支撑力 p 来模拟隧洞开挖时的荷载释放;考虑水平向无穷远处和竖向无穷远处分别受 P_1 、 P_2 外载.取 $z=R\xi$,单位圆外域应力函数 $\Phi(\xi)$ 可简化为

$$\Phi(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{N+iT}{t-z} dt + B + \frac{B'-iC'}{z^2}, \quad (34)$$

其中 B 、 B' 、 C' 与方程(5)、(6)中的意义相同.

$$\begin{aligned} \Phi_{\downarrow}^-(t) - \Phi_{\downarrow}^+(t) &= \Phi(t) - \Phi_1(t) = \\ N(t) + iT(t) &= f(t), \end{aligned}$$

把方程(31)代入(27)即可求得圆外域应力函数

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{R} \left(A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} \right) = \frac{p}{2} + \frac{E}{\xi^2} + \frac{D}{2}, \quad (35)$$

$$\Psi(\xi) = \frac{3E}{\xi^4} + \frac{D}{\xi^2} + E, \quad (36)$$

把方程(35)、(36)代入方程(33)即可求得隧外域平面任意一点的应力解和位移解的具体表达式.

设 ρ 、 θ 为 ξ 平面极坐标, σ_ρ 、 σ_θ 和 $\tau_{\rho\theta}$ 为 z 平面正交曲线坐标系下的应力分量,由于此例所讨论的为 z 平面半径为 R 的圆隧,所以可采用 z 平面极坐标表示.

因 $z=R\xi$, $z=re^{i\alpha}$, r 和 a 是 z 平面极坐标,故可得出,

$$re^{i\alpha} = R\rho e^{i\theta},$$

上式分开实部与虚部可得

$$r\cos a = R\rho\cos \theta, r\sin a = R\rho\sin \theta,$$

则得

$$r^2 = R^2\rho^2, a = \theta,$$

故 σ_ρ 、 σ_θ 和 $\tau_{\rho\theta}$ 可分别写为 σ_r 、 σ_θ 和 $\tau_{r\theta}$,其应力解的具体表达式为,

$$\begin{cases} \sigma_\theta = -p + D + \frac{DR^2}{r^2} + \left(E + \frac{3ER^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_r = p + D - \frac{DR^2}{r^2} + \left(-E + \frac{4ER^2}{r^2} - \frac{3ER^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} = \left(E + \frac{2ER^2}{r^2} - \frac{3ER^4}{r^4} \right) \sin 2\theta. \end{cases} \quad (37)$$

根据公式(34),其位移解可表示为

$$\begin{aligned} 2G(u + iv) &= (K-1) \left(\frac{p}{2} + \frac{D}{2} \right) R\xi + \frac{RkE}{\xi} - \\ ER\bar{\xi} + \frac{RD}{\xi} - \frac{RE\xi}{\xi^2} + \frac{ER^3}{\xi^3}, \end{aligned} \quad (38)$$

分开公式中的实部和虚部即可得对应问题的位移解绝对值 uv ,

其中

$$D = \frac{(P_1 + P_2)}{2}, E = \frac{(P_2 - P_1)}{2},$$

$$K = \begin{cases} 3 - 4\mu \\ 3 - \frac{\mu}{1 + \mu} \end{cases}, G = \frac{E_0}{2(1 + \mu)},$$

E_0 为弹性模量, μ 为泊松比, 由于本题为平面应变问题, 所以弹性模量 E_0 和泊松比 μ 应用 $\frac{E_0}{1 - \mu^2}$ 和 $\frac{\mu}{1 - \mu}$ 代替. 可求得具体位移解的绝对值 u, v . 其位移解具体表达式如下:

$$u = \frac{(1 + \mu)r}{E_0} \left[\left(p + D(1 - 2\mu) + \frac{DR^2}{r^2} \right) - E \cdot \cos 2\theta \left(1 + \frac{4R^2}{r^2}(1 - \mu) - \frac{R^4}{r^4} \right) \right], \quad (39)$$

$$v = -\frac{2(1 + \mu)}{E_0} \cdot p\theta + \frac{(1 + \mu)r}{E_0} \cdot E \cdot \sin 2\theta \left[1 + \frac{R^4}{r^4} + 2(1 - 2\mu) \frac{R^2}{r^2} \right]. \quad (40)$$

由于公式(39)、(40)计算所得为绝对位移, 而在实际工程中有意义的是隧道开挖后的相对位移, 所以必须从绝对位移中扣除隧道开挖前的原始位移, 在公式(39)、(40)中分别令 $R=0, p=0$, 则得原始位移为

$$u_0 = \frac{(1 + \mu)r}{E_0} [D(1 - 2\mu) - E \cdot \cos 2\theta], \quad (41)$$

$$v_0 = \frac{(1 + \mu)r}{E_0} \cdot E \cdot \sin 2\theta, \quad (42)$$

由此可得所到开挖时隧道周边的相对位移为

$$u' = u - u_0 = \frac{(1 + \mu)r}{E_0} \left[p + \frac{DR^2}{r^2} - E \cdot \cos 2\theta \left(\frac{4R^2}{r^2}(1 - \mu) - \frac{R^4}{r^4} \right) \right], \quad (43)$$

$$v' = v - v_0 = -\frac{2(1 + \mu)}{E_0} \cdot p\theta + \frac{(1 + \mu)r}{E_0} \cdot E \cdot \sin 2\theta \left[\frac{R^4}{r^4} + 2(1 - 2\mu) \frac{R^2}{r^2} \right]. \quad (44)$$

由上述推导可以看出, 为验证任意形状隧道应力及位移公式的正确性, 在简化条件下, 以圆形隧道作为特例, 求出应力解表达式为公式(38), 相对位移解的表达式为(43)、(44), 该表达式与已有的不均匀受压圆断面水平巷道围岩的应力和位移解公式一致^[15], 也与文献[15]上按照“圆孔的孔边应力集中”或柯西课题得到的解答是一致的, 证明本文方法的正确性.

4 结 论

分析不规则形状的隧道, 一般需要试验或有限元法分析, 而本文直接用隐式解析解进行分析. 视隧道为任意形状, 利用复变函数中的解析延拓法, 并考虑隧道

支撑法向力, 推导出求解地下半空间任意形状的单个隧道在弹性半空间内任意一点处的应力值和位移值解析解普遍表达式; 以圆形隧道作为简化条件下的特例, 求出在弹性半空间内任意一点处的应力值和位移值解析解具体显式表达式, 与已有的非等压原巷围岩应力及位移解的公式一致, 证明本文方法的正确性. 该求解方法拓展了解析延拓法的应用, 且可考虑隧道的任意形状及法向支撑力, 可以快捷地评估任意形状隧道开挖围岩应力状态及位移变形. 但还有若干问题须进一步研究, 如考虑岩土体为粘弹性情况; 对于马蹄形、半个椭圆断面、抛物线断面或矩形断面等复杂断面隧道的解的具体表达式, 需基于本文研究基础上再作进一步的复杂数学推导; 此外, 径向力也只能采用简化的方式处理, 有待于进一步的改进.

参考文献:

- [1] Jeffery G B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates [J]. Transaction of the Royal Society Series A, 1920, 221: 265-293.
- [2] Mindlin R D. Stress distribution around a tunnel [J]. Transaction of the ASCE, 1940, 195: 1117-1153.
- [3] Mindlin R D. Stress distribution around a hole near the edge of a plate under tension [J]. Proceedings of the Society Experimental Stress Analysis, 1948(5): 56-67.
- [4] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [5] Timoshenko S, Goodier J N. Theory of elasticity[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [6] Muskhelishvili N I. Mathematical theory of elasticity [M]. Leyden: International Publishing Leyden, 1954.
- [7] 路见可. 平面弹性复变函数方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.
- [8] Verruijt A. A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half plane [J]. Geotechnique, 1997, 21(4): 77-89.
- [9] Verruijt A. Deformations of an elastic half plane with a circular cavity [J]. International Journal of Solids Structures, 1998, 35(21): 2795-2804.
- [10] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994.
- [11] 吕爱钟, 张路青. 地下隧洞力学分析的复变函数方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [12] 王志良, 申林方, 姚激, 等. 浅埋隧道围岩应力场的计算复变函数求解法[J]. 岩土力学, 2010, 31(Z1): 86-90.
- [13] 张顶峰, 杜守继. 盾构隧道并行施工对既有隧道影响的理论分析[J]. 力学季刊, 2010, 31(4): 582-588.
- [14] 郑雨天. 岩石力学的弹塑粘性理论基础[M]. 北京: 煤品

工业出版社,1988.

社,2009.

[15] 刘佑荣,唐辉明. 岩体力学[M]. 北京:化学工业出版社

A Complex Variable Solution for a Lined Tunnel with Arbitrarily Shaped Section

SHI You-zhi, GAO Xuan-neng*

(School of Civil Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: To quickly obtain the stress value and displacement value generated by single-hole deep-burying arbitrarily shape tunnel excavation, utilize analytical continuation method in complex variables for resolution. Given it is deep-burying tunnel, and assuming the depth of tunnel is comparatively larger than tunnel diameter, and regardless of the influence of gravity gradient, directly transform the action of gravity to action at infinite far end with external applied load. At the same time, taking into consideration the supporting role of tunnel lining, utilize complex variables conformal mapping function and analytical continuation method, to get the analytical solution expression of stress value and displacement value of any point outside single-hole arbitrarily shape tunnel in elastic semi-infinite space. Take circular tunnel as a special case, get the analytical solution expression of stress value and displacement value of any point at tunnel surrounding rock. The resolution is consistent with existing resolution. Therefore, the new method is accurate. The calculation method of this paper extends the applications of analytical continuation method, takes into account of the arbitrary shape and support of the tunnel, combines matlab tool, and can offer convenient way for project fast resolution for excavation stress and stable deformation analysis.

Key words: complex variable function method; analytic continuation method; tunnels; solutions; elastic half-plane