. 文章编号:1003 - 207(2008)01 - 0001 - 06

基于 copula 函数族的信用违约互换组合定价模型

詹原瑞 ,韩　铁 ,马珊珊

(天津大学管理学院 ,天津　300072)

摘　要:copula 函数的出现解决了相关性结构不易刻画的难题 ,也为构建多元联合分布函数提供了切实可行的方法。在分析了不同 copula 函数的特点基础上并结合信用风险模型 ,本文建立了信用违约互换组合 (Basket Credit Default Swap) 定价模型 ,并且给出了具体的计算步骤。本文揭示了信用违约互换组合为解决我国当前商业银行的不良贷款和流动性过剩问题提供了一个有效机制 ,模拟验证的结果显示模型的可实现性。

关键词:信用违约互换组合 ;copula ;信用风险组合定价 ;多元联合分布

中图分类号:F830. 9　　**文献标识码**:A

1　引言

信用违约互换 (Credit Default Swap , CDS) 是一种信用衍生产品合同 ,其中信用保护的买方支付给信用保护的卖方一定费用后 ,将信用风险的实际承担者转移给了投资者。由于信用违约互换在保留资产所有权的基础上 ,将信用风险分离出来进行管理和定价 ,其在金融市场中越来越受到重视 ,交易量不断扩大。银行贷款是我国最主要的融资渠道 ,使得信用风险过分集中于商业银行 ,因此信用违约互换工具是解决这一问题的有效手段。

在目前信用违约互换研究中 ,国内外文献集中在机理介绍、考察 CDS 定价的决定因素和 CDS 市价与信用价差比较等几类实证分析方面。对于 CDS 的定价模型主要包括:Duffie (1999) [1] 首先对信用违约互换定价的基本模型进行了专门性的介绍。Hull 等(2001) [2] 给出了信用保护卖方和信用参照实体的违约风险相关下的定价模型。Skinner 等(2002) [3] 通过期权定价理论来证明 CDS 实际上是一种看跌期权。Longstaff 等(2005) [4] 在随机强度的简化模型框架内计算了信用违约互换理论价格。郭军等(2003) [5] 建立了信用违约互换效用函数模型 ,对非对称信息下信用违约互换风险交易进行了博弈分析。王琼等(2003) [6] 给出了基于期权定价理论和 KMV 的预期违约率的信用违约互换的估值方法。王琼等(2003) [7] 考虑突发事件对违约概率的影响 ,建立了一个基于跳 - 扩散过程的信用违约互换的定价模型。杨文瀚等(2005) [8] 假设市场风险和信用风险线性相关 ,建立了基于信用违约互换和远期信用违约互换的简约定价模型。

本文不在局限在单产品的信用违约互换定价问题 ,而是将关注的焦点放在信用违约互换组合(Basket Credit Default Swap ,Basket CDS) 的定价上 ,这是因为现实中为信用等级较低的贷款寻求信用违约互换合同的投资者很困难 ——也就是说没有人愿意承担低信用等级贷款的风险。信用违约互换组合将一揽子信用等级不同的贷款打包(组合内既有信用等级较高的贷款 ,也有信用较差的贷款) ,打包后的信用违约互换组合通过签订次违约后提供补偿的合同 ,减轻投资者为信用最差的几笔贷款承担风险的义务 ,使得信用风险成功转移。信用违约互换组合定价问题的关键是如何刻画出不同信用等级的贷款的相关性结构 ,本文利用 copula 函数构建组合内贷款间的相关结构。在此基础上构建多维联合损失概率分布 ,给出了信用违约互换组合的定价模型 ,并提供了定价理论框架 ,为信用违约互换组合的实际应用打下基础。

2　copula 函数

在信用违约互换组合定价模型中 ,构建贷款组合的联合违约概率函数是解决问题的关键。目前金

收稿日期:2007 - 06 - 04 ; **修订日期**:2007 - 11 - 25

作者简介:詹原瑞(1944 -) ,女(汉族) ,江西婺源人 ,天津大学博士生导师 ,教授 ,研究方向:银行风险研究、金融工程.

融研究领域研究前沿 copula 技术正是建立联合违约概率分布函数有效的方法。

定义 (Nelsen ,1998) [9] : N 元 copula 函数是指具有以下性质的函数 C:

1) C 的变量空间为 $[0,1]^N$ 空间;

2) C 对它的每一个变量都是递增的;

3) C 的边缘分布 $C_n(\cdot)$ 满足: $C_n(u_n) = C(1, \cdots, 1, u_n, 1, \cdots 1) = u_n$,其中 $u \in [0,1]$, $n \in [1, N]$ 。

显然,若 $F_1(\cdot), \cdots, F_N(\cdot)$ 是一元分布函数,令 $u_n = F_n(x_n)$ 是一随机变量,则 $C(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n), \cdots, F_N(x_N))$ 是一个具有边缘分布函数 $F_1(\cdot), \cdots, F_N(\cdot)$ 的多元分布函数。

Sklar 定理[10] :令为具有边缘分布 $F_1(\cdot), \cdots, F_N(\cdot)$ 的联合分布函数,那么,存在一个 copula 函数,满足:

$$F(x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_N) = C(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n), \cdots, F_N(x_N)) \tag{1}$$

若 $F_1(\cdot), \cdots, F_N(\cdot)$ 连续,则唯一确定;反之,若 $F_1(\cdot), \cdots, F_N(\cdot)$ 为一元分布,那么由式(1) 定义的函数 F 是边缘分布 $F_1(\cdot), \cdots, F_N(\cdot)$ 的联合分布函数。

通过 copula 函数 C 的密度函数 c 和边缘分布 $F_1(\cdot), \cdots, F_N(\cdot)$,可以方便地求出 N 元分布函数 $F(x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_N)$ 的密度函数:

$$f(x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_N) = c(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n), \cdots, F_N(x_N)) \prod_{n=1}^{N} f_n(x_n) \tag{2}$$

其中 $c(u_1, \cdots, u_n, \cdots, u_N) = \dfrac{\partial C(u_1, \cdots, u_n, \cdots, u_N)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n \cdots \partial u_N}$, $f_n(\cdot)$ 是边缘分布 $F_n(\cdot)$ 的密度函数。

由此可见,copula 函数为求取联合分布函数提供了一条便捷的通道:边缘分布密度函数 →联合密度函数 →联合分布函数。

本文在模拟过程中选取了代表性的两大类 copula 函数:椭圆 copula 和阿基米德 copula。椭圆 copula 包括正态 copula 和学生 t copula ,椭圆 copula 具有对称性,并且 t copula 具有厚尾性质可以很好的刻画金融数据;阿基米德 copula 包括 clayton copula ,gumbel copula 和 frank copula 三类函数。clayton copula 的密度函数具有非对称性,其密度分布呈“L ”字型即上尾低下尾高。clayton copula 函数对变量在分布下尾处的变化十分敏感,因此能够快速捕捉到下尾相关的变化,例如它可以很好地描述熊市时期股票市场间相关性增强的情形。gumbel copula 的密度函数也具有非对称性,但与 clayton copula 函数刚好相反,其密度分布呈“J ”字型即上尾高下尾低。gumbel copula 函数对变量在分布上尾处的变化十分敏感,因此能够快速捕捉到上尾相关的变化,例如它可以很好地描述牛市时期股票市场间相关性增强的情形。frank copula 的密度分布呈“U ”字型,因此 frank copula 函数适合于描述具有对称相关结构的金融市场之间的相关关系。总体上阿基米德 copula 密度函数比椭圆 copula 有更厚的尾部,因此更适合对金融数据的刻画。

3 信用违约互换组合

3.1 信用违约互换组合合同

信用衍生工具最基本的形式是信用违约互换合同,其构建原理为:商业银行作为信用风险空头,购买风险保护,转移信用风险,并支付一定的费用;投资者作为风险多头,在获取一定补偿收益的情况下,承担由银行转移的信用风险。其支付函数由图 1 表示:

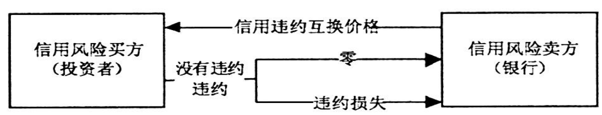

图 1 信用违约互换组合的支付函数

信用违约互换组合可分为一次性保护违约组合和多重保护违约组合。一次性信用违约互换组合的支付函数与信用违约互换的支付函数形式上相同,不同点在于组合合同中规定第 $k(k \geq 1)$ 次违约支付补偿,而前 $k-1$ 次违约并不支付补偿。其中,当 $k=1$ 时,信用违约互换组合称作第一违约组合 (First to Default Baskets) ,即当组合中任何一笔贷款发生违约后,合约就告终止,保护卖方承担的风险以第一违约为限。多重违约组合(Multiple Default Baskets) ,是当 $k>1$ 时对组合中可能发生的任意数量的违约事件提供保护。组合中出现第一次违约事件后,合约不会终止,对于以后发生的信用事件,只要在规定范围内,卖方对买方均给予偿付。如果等于组合贷款数量,则保护买方就将贷款组合的全部信用风险转移给卖方。

本文研究的对象是一次性信用违约互换组合,因此下文中信用违约互换组合没有特别说明指的是一次性信用违约互换组合。

3.2 信用违约互换组合定价公式

假设组合中第笔贷款的面值为 $F^m(m \leq M)$, M 是组合中的贷款总数;合同规定第 k 次违约支付给所有已违约贷款一定比例补偿,补偿比例为 $1-R$,

R 是违约挽回率;买方定期缴纳的费用为 p^k,贷款到期时间是 T,并且假设定期缴纳的时间点是 $\tau_i = i/\theta$, $(i = 1,2,\cdots n)$,n 是缴纳次数,θ 表示的是单位时间内缴纳费用的次数,即 $\theta = 2$ 表示每半年缴纳费用一次;

若违约时间或到期时间不是缴费时间点时,信用风险卖方(银行)要补齐最后一次缴费到违约或到期时间的等价费用。在风险中性测度下,买卖双方无套利行为[11-15],建立信用违约互换组合定价公式:

$$\begin{aligned} & p^k \sum_{i=1}^{n} [B(0,\tau_i)\, Pr(t^k > \tau_i)] \\ & p^k \sum_{i=1}^{n} E\Big(\frac{t^k - \tau_i}{t^k} B(0,\tau_{i-1} < t^k < \tau_i) \\ & + Pr(\tau_n < t^k < T)\Big)) \\ & + p^k \frac{T - \tau_n}{T} B(0,T)\, Pr(\tau_n < T < t^k) \\ & = (F^{m_1} + F^{m_2} + \cdots + F^{m_k}) \\ & (1 - R)\, E(B(0,t^k)\, Pr(t^k \le T)) \end{aligned} \tag{3}$$

其中:t^k 是组合内第 k 只贷款违约时间,$B(t,T)$ 表示到期日为 T 的无违约风险零息票债券在时刻 t 的价值;$Pr(g)$ 表示概率算子;$\tau_0 = 0$。

$p^k \sum_{i=1}^{n} [B(0,\tau_i)\, Pr(t^k > \tau_i)]$ 表示缴纳固定费用价值;

$p^k \sum_{i=1}^{n} \left[\begin{array}{l} E(\frac{t^k - \tau_i}{t^k} B(0,\tau_{i-1} < t^k < \tau_i) \\ + Pr(\tau_n < t^k < T))) \end{array} \right]$ 表示最后一次缴纳到违约时刻的价值;

$+ p^k \left[\frac{T - \tau_n}{T} B(0,T)\, Pr(\tau_n < T < t^k) \right]$ 表示不违约情况下且到期时间不是缴纳费用时刻,最后一次缴纳到到期时刻的价值;

$(F^{m_1} + F^{m_2} + \cdots + F^{m_k})$ $(1 - R)\, E(B(0,t^k)\, Pr(t^k \le T))$ 表示违约情况下的回收价值。

4　信用违约互换组合定价框架

将信用违约互换组合定价过程概括为以下几个步骤:

1) 构造贷款组合的联合违约概率函数 $G(t_1, t_2, K, t_M)$;

2) 利用 $G(g)$ 的相关结构来构造多元随机变量 $U, U_i \in [0,1]\ (i = 1,2,\cdots,M)$;

3) 建立每笔贷款违约概率函数 $F(t)$;

4) 计算第 k 只贷款违约时间 $t_k = F^{-1}(U_k)\ (k = 1,2,\cdots,M)$;

5) 将 $t_1, t_2, \cdots, t_M$ 升序排列,即债券组合违约时间 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_M$;

6) 重复步骤 2) —步骤 5) 得到 $\tau_k\ (k = 1,2,\cdots, M)$ 的分布函数 $H_k(g)$;

7) 利用信用违约互换组合定价公式计算第 j 次违约的价格。

说明:在计算贷款组合的联合违约概率 $G(g)$ 时,可选用的方法主要包括:构造多元正态联合分布,多元学生 t 联合分布,以及用 copula 函数构造的多元联合分布;单笔贷款的违约概率函数建立包括信用风险结构模型和简化模型。

5　模拟实证

5.1　模拟假设条件

假设一份包含 3 只债券的信用违约互换组合合同,债券到期期限均为 6 年。无风险利率 $r(t)$ 是常数 0.05;R 是常数 0.6;$F^m\ (m \le M)$ 是面值为 1 的贷款。违约强度假设是常数,分别为:0.1,0.2,0.3;三只债券的相关系数为:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2　模拟结果

5.2.1　违约时间分布

图 2 - 6 分别是 normal copula 函数构造的联合违约概率分布得出的违约时间分布图,不同违约强度下 normal copula 函数构造的联合违约概率分布得出的违约时间分布图,不同相关系数下 normal copula 函数构造的联合违约概率分布得出的违约时间分布图和五种不同 copula 函数构造的联合违约概率分布得出的违约时间分布图。

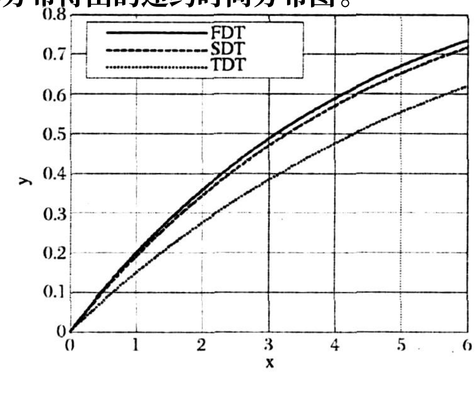

图 2　normal coplua 构造的违约时间概率分布图

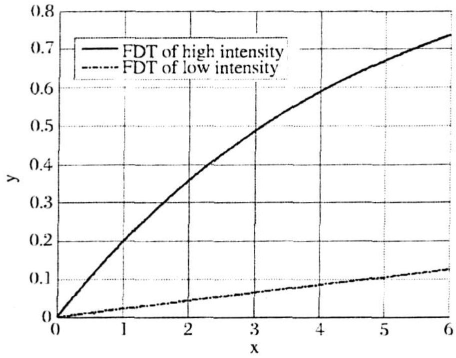

图 3　不同违约强度的违约时间概率分布图

图 2 中 FDT 代表第一次违约概率分布，SDT 代表第二次违约概率分布，TDT 代表第三次违约概率分布。第一次违约的概率最高，意味着三只贷款中只要有一只违约的概率高于同时有两到三只债券违约的概率，这说明图形符合真实情况。

图 3 中 high intensity 代表原假设违约强度为 0.1；low intensity 代表违约强度为 0.01。可以看到违约强度高的债券，组合后违约率仍然高。

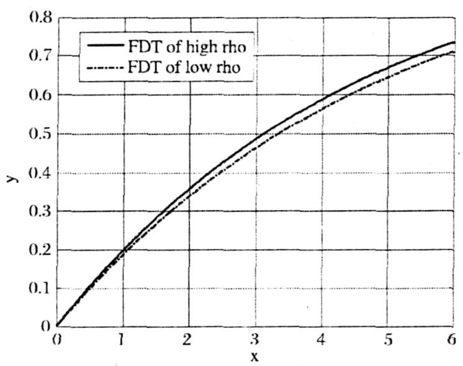

图 4　不同相关关系的违约时间概率分布图

图 4 中 low rho 代表相关关系 $\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$ 的 normal copula 函数构造的违约时间概率分布。可以说明相关性高时，组合的联合违约概率同时变高。

为了达到不同 copula 函数的可比性，将变量间的相关性都设为 0.6 的矩阵。由图 5 上可以看出，尾部相关性最大的 gumbel copula 和尾部相关性最小的 normal copula 在图形的最两侧，从上到下中间依次为 frank copula，clayton copula，t copula。图 6 中第三次违约概率分布与图 5 的情况正好相反，这一点和一般理解的不太相同。

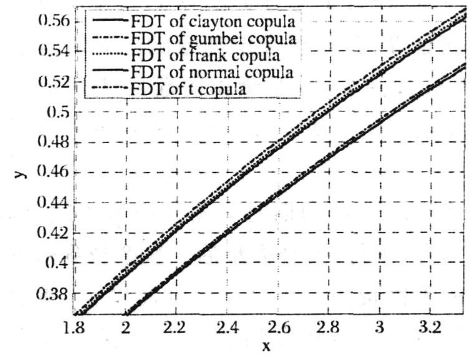

图 5　copula 函数族构造的组合第一次违约概率分布图

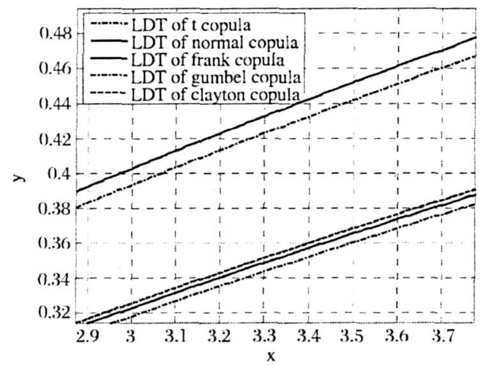

图 6　copula 函数族构造的组合第三次违约概率分布图

5.2.2　组合定价结果

固定费用支付时间是贷款开始算起，每满一整年交一次费用。表 1 给出了不同信息集和不同 copula 函数的信用违约互换组合价格。

相关矩阵信息集 A：A_1 ：$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}$，$A_2$ ：$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$

违约强度信息集 B：B_1 ：$\lambda^i(t) = \begin{cases} 0.1 & i = 1 \\ 0.2 & i = 2 \\ 0.3 & i = 3 \end{cases}$，

B_2 ：$\lambda^i(t) = \begin{cases} 0.01 & i = 1 \\ 0.02 & i = 2 \\ 0.03 & i = 3 \end{cases}$

表 1 中第一次违约的组合价格（第二列）最高，最后一次违约的价格（最后一列）最低，即第一次违约就回收补偿的合同要比最后一次违约才得到回收值的合同要安全的多，因此合同的价格也略高。

阿基米德族 copula 函数的第一次违约合同价格要高于椭圆族 copula 函数，而最后一次违约合同的价格要低些。这说明由于阿基米德族 copula 的

尾部相关性高于椭圆族 copula ,导致的结果是阿族函数为第一次违约提供更多的保护;也意味着阿基米德族 copula 函数为保护买方提供了第一次违约合同价格的上限,而由椭圆族 copula 函数计算出的价格作为合同下限,合同双方可以在此范围内进一步考虑其他因素讨价还价。对于最后一次违约合同,情况恰好相反,阿基米德族 copula 函数计算出的价格为下限,椭圆族 copula 函数计算出的价格作为合同上限。

表 1　信用违约互换组合价格

	第一次违约的 Basket CDS 价格	第二次违约的 Basket CDS 价格	第三次违约的 Basket CDS 价格
Normal copula - A1 - B1	0.16681	0.16155	0.13514
Normal copula - A1 - B2	0.02469	0.02351	0.01817
Normal copula - A2 - B1	0.15993	0.15617	0.1428
自由度为 7 , T copula - A1 - B1	0.16648	0.16224	0.13232
参数为 1.3881 ,Clayton copula - A1 - B1	0.17837	0.15119	0.11565
参数为 4.2962 ,Frank copula - A1 - B1	0.18001	0.15319	0.11411
参数为 1.6941 ,gumbel copula - A1 - B1	0.17901	0.15439	0.11652

6　结语

本文建立了完整的信用违约互换组合定价框架,给出了模拟步骤。模拟结果显示:(1) 阿基米德 copula 函数族对联合损失概率分布尾部进行了较好的模拟;(2) 信用违约互换组合中不同违约次数的合同价格不同,第一次违约就履行合同的价格最高;(3) 第一次违约概率分布图和最后一次违约概率分布图有显著差异,说明尾部相关性不同的 copula 函数对不同次(第一次和最后一次)违约合同的保护分配权重不同,这是一个较新且具有实际意义的待研究领域。

信用违约互换组合工具保留贷款所有权、可调控信用风险转移程度等特性必将使其成为我国商业银行信用风险过度集中问题最重要的一类信用衍生工具。但是由于信用违约互换工具在我国刚刚出现,市场环境下的实际数据严重缺乏,建立和验证一个符合我国信用违约互换市场的实际模型仍存在一定困难。

参考文献:

[1] Duffie D.. Credit Swap Valuation [J]. Financial Analysts Journal, 1999, 2: 73 - 87.

[2] Hull J., White A.. Valuing Credit Default Swaps II: Modeling Default Correlations [J]. Journal of Derivatives, 2001, 8(3): 12 - 22.

[3] Skinner F. S., Townend T. G.. An Empirical Analysis of Credit Default Swaps [J]. International Review of Financial Analysis, 2002, 11(3): 297 - 309.

[4] Longstaff F. A., Mithal S., Nies E.. Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market [J]. Journal of Finance, 2005, 60(5): 2213 - 2253.

[5] 郭军,张道宏,王琼,等. 非对称信息下信用违约互换风险交易的博弈分析[J]. 西安理工大学学报,2003, (3): 279 - 283.

[6] 王琼,陈金贤. 信用违约互换的避险机理及价值分析[J]. 西安交通大学学报(社会科学版),2003, 23(2): 18 - 21.

[7] 王琼,陈金贤. 基于跳 - 扩散过程的信用违约互换定价模型[J]. 系统工程,2003, (5): 79 - 83.

[8] 杨文瀚,王燕. 信用违约互换的定价模型及实证研究[J]. 统计与决策,2005, (4): 37 - 38.

[9] Nelson R.. An Introduction to Copulas [M]. New York: Springer, 1998.

[10] Sklar A.. Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges [J]. Publication de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 1959, 8:229 - 231.

[11] Merton R.. On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates [J]. The Journal of Finance, 1974, 29: 449 - 470.

[12] Schonbucher P.. Credit Derivatives and Pricing Models: Models, Pricing and Implementation [M]. John Wiley and Sons., 2003.

[13] Galiani, Stefano.. Copula Functions and Their Applications in Pricing and Risk Managing Multi-name Credit Derivative products [D]. Dept. of Mathematics, King's College, London, Master's thesis., 2003.

[14] Hull J.. Options, Futures & Other Derivatives[M]. 5th ed. Prentice Hall., 2002.

[15] Cairns A. A Family of Term - structure Models for Long-term Risk Management and Derivative Pricing [J]. Mathematical Finance, 2004, 14(3): 415 - 444.

Pricing Model of Basket Credit Default Swap Based on Copulas

ZHAN Yuan-rui, HAN Tie, MA Shan-shan
(School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The development of copulas resolves the problem of description of correlation, and it is a real practicable method to construct multivariate probability distribution function. Based on the characteristic of copulas, this paper founds the pricing model of Basket Credit Default Swap, and creates the pricing framework. The worth of this paper is that it shows an operable way to solve the worrying problems of bad debts and the Surplus Liquidity. This paper also gives satisfactory simulation in order to show the effectiveness of the pricing framework.

Key words: Basket CDS; copula; pricing of basket credit risk; multivariate pdf

---