

康开轩,李辉,吴云龙等. 重力卫星精密星间测距系统滤波器技术指标论证. 地球物理学报, 2012, 55(10):3240-3247, doi:10.6038/j.issn.0001-5733.2012.10.006.

Kang K X, Li H, Wu Y L, et al. Demonstration on the design of filter indexes of inter-satellite high accuracy ranging system for gravity satellite. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2012, 55(10):3240-3247, doi:10.6038/j.issn.0001-5733.2012.10.006.

# 重力卫星精密星间测距系统滤波器技术指标论证

康开轩<sup>1,2</sup>, 李 辉<sup>1,2</sup>, 吴云龙<sup>1,2,3</sup>, 邹正波<sup>1,2,3</sup>, 邢乐林<sup>1,2,3</sup>

1 中国地震局地震研究所, 武汉 430071

2 地壳运动与地球观测实验室, 武汉 430071

3 武汉大学测绘学院, 武汉 430079

**摘 要** 本文基于重力卫星精密星间测距测量模式,从星间测距观测值与地球重力场频谱关系的角度,建立了距离观测值关于重力位系数的敏感矩阵,分析了各阶次重力场位系数对应的敏感矩阵的频谱特性,讨论了星间测距信息中能反应地球重力场信息的有效信号频带,给出了能最大限度保留地球重力场信息的低通滤波器的通带截止频率、通带增益波纹和频率采样率技术指标设计方案,可为我国首期卫星跟踪卫星重力测量计划的主要技术指标的初步设计提供参考。

**关键词** 重力卫星,精密星间测距系统,滤波器指标设计,GRACE,KBR

doi:10.6038/j.issn.0001-5733.2012.10.006

中图分类号 P228

收稿日期 2011-10-20,2012-09-26 收修定稿

## Demonstration on the design of filter indexes of inter-satellite high accuracy ranging system for gravity satellite

KANG Kai-Xuan<sup>1,2</sup>, LI Hui<sup>1,2</sup>, WU Yun-Long<sup>1,2,3</sup>, ZOU Zheng-Bo<sup>1,2,3</sup>, XING Le-Lin<sup>1,2,3</sup>

1 *Institute of Seismology, China Earthquake Administration, Wuhan 430071, China*

2 *Crustal Movement Laboratory, Wuhan 430071, China*

3 *School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China*

**Abstract** In order to value the sensitivity of inter-satellite ranging measurements related to gravity field for the satellite-to-satellite tracking model, sensitivity matrix analysis, which is a method of estimating the influence of input parameters on the system model, is applied in this paper. For the inter-satellite high accuracy ranging measurements of gravity satellite, we describe the theory of spectrum analysis of sensitivity matrix for inter-satellite ranging measurements, calculate main sensitivity matrix based on the Kepler satellite orbit for GRACE, analyze the spectrum characteristic of sensitivity matrix for different degree coefficients of gravity field, and explain our results in view of the character of Legendre functions and spherical harmonic functions. In addition, in order to prove the conclusion on spectrum characteristic we simulate several main sensitivity factors for inter-satellite ranging measurements based on gravity field of independent  $n$  degree  $m$  order spherical harmonic functions and find good agreement between our simulated models and theory models. Considering the effects of conservative force, non-conservative force and inter-satellite measurement noise, we discuss the effective frequency band

**基金项目** 国家自然科学基金(41004030,40704009),武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放研究基金(10-01-09),全国重力台网学科中心运行经费(201101008)项目资助。

**作者简介** 康开轩,女,1984年生,硕士,助理研究员,主要从事重力卫星数据处理方法技术研究. E-mail: kangkx2005@163.com

of inter-satellite ranging measurements in which the gravity field signal is contained, and get the conclusion that for  $n$  degree gravity field the upper limit of effective frequency band is due to the spectrum of sensitivity matrix of  $n$  degree zonal spherical harmonics. Based on the results of gravity signal band, we demonstrate the design of low-pass filter indexes, such as cut frequency of pass-band, gain ripple specifications of pass-band and frequency sample rate, and show the design for current GRACE mission, future GRACE Follow-on mission and our national gravity satellite mission in details. Our results are based on the spectral relationship between sensitivity matrix for inter-satellite ranging measurements and gravity potential, improving the previous methods which are mainly based on the high-frequency noise of inter-satellite ranging measurements. The results of this paper are able to be applied in the design of the major technique indexes for our future gravity satellite mission.

**Keywords** Gravity satellite, Inter-satellite high accuracy ranging system, The design of filter indexes, GRACE, KBR

## 1 引言

地球重力场及其时变特性反应了地球表层及内部的密度分布和物质运动状态,获得高精度重力场在地球科学领域具有深远的意义.重力卫星以其快速、高效和几近全球覆盖的特性,在确定高精度重力场方面正发挥着重要作用.基于卫星跟踪技术的 GRACE 重力卫星可提供高精度和高空间分辨率的静态及时变地球重力场,其信息可有效揭示地球系统质量重新分布,具有巨大的科学价值和应用前景<sup>[1]</sup>.为实现在 GRACE 任务结束后对地球物质变迁的连续监测,国际上相继展开对 GRACE-follow on 计划的论证,预期以更低的轨道、更高精度的星间测距系统来获取更高空间分辨率的地球重力场,其结果将极大的推进人类对地球物质变迁、重大自然灾害监测、测绘及地球动力学机制等方面的认知<sup>[2]</sup>.

卫星跟踪技术是当前地球重力场测量最有价值和最具应用前景的方法之一,我国亦准备实施自主知识产权的重力卫星测量计划.精密星间测距系统是低低卫星跟踪重力卫星的关键有效载荷. GRACE 卫星携带的 K 波段测距系统是一微米量级的测距系统,GRACE-follow on 计划又提出了一种更高精度的激光干涉测距系统.精密星间测距系统通过高精度星间距离观测感应地球重力场分布,由于更高阶次的星间距离变率和距离加速度对地球重力场的高频信息更加敏感,地面数据处理中心需对测距系统直接测得的高采样率下的星间距离观测值进行滤波处理,得到后处理的星间距离、距离变率和距离加

速度数据,用于后续地球重力场模型解算<sup>[3]</sup>.目前国内许多科研机构和学者投身于精密星间测距系统观测数据的处理技术研究当中,对测距系统观测模式、误差源模型、测距系统精度与地球重力场恢复精度的匹配关系等进行了研究和论证<sup>[4-10]</sup>.对于星间测距系统滤波技术的研究,MacArthur 等采用了滑动平均算法实现滤波处理<sup>[11]</sup>,Thomas 等给出了基于最小二乘拟合原理和窗函数法的滤波器设计<sup>[12]</sup>,GRACE 地面数据处理中心采用了矩形窗函数自卷积技术构造滤波器<sup>[13]</sup>,用来实现星间瞬时距离观测数据的去噪和降采样处理.本文拟从精密星间测距系统观测值与地球重力场频谱关系的角度,建立星间距离观测值关于重力位系数的敏感矩阵,详细分析其频谱特性,得出测距观测值可感应的地球重力场信号的有效频带,最后结合美国当前 GRACE 卫星和下一代 GRACE Follow-On 卫星计划、以及我国首期卫星跟踪卫星重力测量计划,给出低通滤波器的通带截止频率、通带增益波纹和频率采样率技术指标设计方案.该滤波器设计方案是基于星间测距观测值敏感矩阵与地球重力场频谱关系的建立与分析的基础上的,能最大限度保留地球重力场信息,避免了单一从仪器观测高频噪声抑制的角度设计降采样滤波器.重力卫星精密星间测距系统滤波器指标设计及优化论证属于系统预研工作的范畴,可直接用于我国地面重力数据处理系统建设.

## 2 重力卫星星间测距观测值频谱分析

### 2.1 敏感矩阵频谱分析原理

地球重力场引力位  $V$  的球谐函数展开式为

$$V = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{b=1}^2 \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \left( \frac{r_c}{r} \right)^n C_{bmm} Y_{bmm} \right], \quad (1)$$

式中,

$$Y_{bmm} = \begin{cases} P_m(\sin\varphi) \cos m\lambda, & b = 1 \\ P_m(\sin\varphi) \sin m\lambda, & b = 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$C_{bmm} = \begin{cases} C_{mm}, & b = 1 \\ S_{mm}, & b = 2 \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\varphi, \lambda$  为空间点的地心纬度与经度;  $P_m$  为 Legendre 缔合函数;  $C_{mm}, S_{mm}$  为地球引力位系数,  $r_c$  为地球平均半径.

卫星  $S_1, S_2$  的加速度矢量可表示为<sup>[14]</sup>:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{E}^T \nabla V_i + \mathbf{a}_{nc_i} + \mathbf{a}_{\epsilon_i}, (i = 1, 2), \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{E}^T$  为从地固系到惯性系的转换矩阵,  $\nabla$  为地球引力位的梯度,  $V_i$  为卫星  $S_i$  处的地球引力位,  $\mathbf{a}_{nc_i}$  为摄动加速度,  $\mathbf{a}_{\epsilon_i}$  为仪器观测噪声.

设卫星  $S_1$  与  $S_2$  之间的视线单位矢量为  $\mathbf{e}_{12}$ , 则星间距离加速度(相对视线加速度)可近似表示为<sup>[15]</sup>:

$$\ddot{\rho} = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{e}_{12}. \quad (5)$$

将公式(1)、(4)代入(5)可得基于地球引力位系数和卫星轨道坐标的距离加速度  $\ddot{\rho}$  的解析表达式.

敏感矩阵用来定量评价模型参数对模型结果产生的影响<sup>[16]</sup>, 距离加速度对  $n$  阶  $m$  级重力位系数的敏感矩阵  $\mathbf{T}_{mm}$  可表征距离加速度对地球重力场的敏感程度, 表达式为<sup>[12]</sup>

$$\mathbf{T}_{mm} = \frac{\partial \ddot{\rho}}{\partial \tilde{C}_{bmm}} = (\tilde{\mathbf{a}}_{bmm,1} - \tilde{\mathbf{a}}_{bmm,2}) \cdot \mathbf{e}_{12}, \quad (6)$$

式中,

$$\tilde{\mathbf{a}}_{bmm,i} = \mathbf{E}^T \nabla \tilde{V}_{bmm,i} + \mathbf{a}_{nc_i} + \mathbf{a}_{\epsilon_i}, (i = 1, 2) \quad (7)$$

$$\tilde{V}_{bmm,i} = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ \frac{GM}{r_i} \left( \frac{r_c}{r_i} \right)^n Y_{bmm}, & n = 2, 3, \dots, N; \\ m = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

由式(6)可知敏感矩阵  $\mathbf{T}_{mm}$  为距离加速度  $\ddot{\rho}$  按  $n$  阶  $m$  级重力位系数  $C_{bmm}$  球谐展开的系数项, 即对于给定的卫星轨道, 距离加速度  $\ddot{\rho}$  可表示为

$$\ddot{\rho} = \sum \mathbf{T}_{mm} C_{bmm}. \quad (9)$$

依据频谱分析的线性叠加原理,  $\ddot{\rho}$  的频谱可由敏感矩阵  $\mathbf{T}_{mm}$  的频谱线性叠加得到, 我们可以通过敏感矩阵  $\mathbf{T}_{mm}$  来研究距离加速度观测值  $\ddot{\rho}$  的频谱特性. 由信号频谱的时域微分定理知, 星间距离、距离变率相应的敏感矩阵的频谱可由上述  $\mathbf{T}_{mm}$  的频谱分别乘以因子  $1/(2\pi f)^2, 1/2\pi f$  得到<sup>[17]</sup>. 由于精密星间测距系统直接测得的物理量为瞬时星间距离, 卫星地面数据处理中心通过滤波和降采样将该观测值

转换为后处理星间距离、距离变率和距离加速度, 滤波技术的参数指标设计应基于重力卫星星间距离观测值的频谱特征.

### 2.2 参数选取及结果

本文采取 GRACE 卫星开普勒轨道根数模拟卫星运行 16 个周期内的理论轨道数据, 并依据式(6)计算了敏感矩阵中  $T_{2,0}, T_{10,0}, T_{10,5}$  等 12 个不同阶次的敏感因子的时间序列, 对其分别作离散傅里叶变换并乘以因子  $1/(2\pi f)^2$  得到星间距离敏感矩阵的频谱. 敏感矩阵中重力位二阶导数的计算采用了非奇异的算法<sup>[18]</sup>, 有效地避免地球两极附近的奇异性. 采用的卫星轨道参数指标<sup>[19]</sup>如表 1, 重力卫星星间距离敏感矩阵频谱如图 1, 其振幅谱相关特征参数如表 2.

表 1 卫星轨道参数

参数	指标
轨道长半径	6857.0101 km
轨道偏心率	0.0017°
真近点角	111.0261°
升交点赤经	249.2224°
轨道倾角	89.0078°
近地点幅角	304.1817°
星间距离	219.8578 km
模拟时间	16rev *
数据采样率	0.1 Hz

\*注: rev 为卫星的轨道周期.

表 2 振幅谱相关特征参数

参数	主频/Hz	主频峰值	有效频带	频谱峰
		量级/ $\mu\text{m}$		
$n=2, m=0$	0.00037	$10^1$	—	1
$n=10, m=0$	0.00185	$10^2$	0.00037~0.00185	5
$n=10, m=5$	0.00142	$10^1 \sim 10^2$	0.00037~0.00142	—
$n=10, m=10$	0.00086	$10^0 \sim 10^1$	0.00026~0.00190	—
$n=20, m=0$	0.00370	$>10^2$	0.00037~0.00370	10
$n=20, m=10$	0.00285	$<10^2$	0.00026~0.00379	—
$n=20, m=20$	0.00134	$10^0 \sim 10^1$	0.00020~0.00321	—
$n=50, m=0$	0.00926	$>10^2$	0.00037~0.00926	25
$n=50, m=25$	0.00806	$10^1 \sim 10^2$	0.00020~0.00970	—
$n=50, m=50$	0.00243	$10^0 \sim 10^1$	0.00026~0.00580	—
$n=80, m=0$	0.01480	$>10^2$	0.00037~0.01480	40
$n=100, m=0$	0.01850	$>10^2$	0.00037~0.01850	50

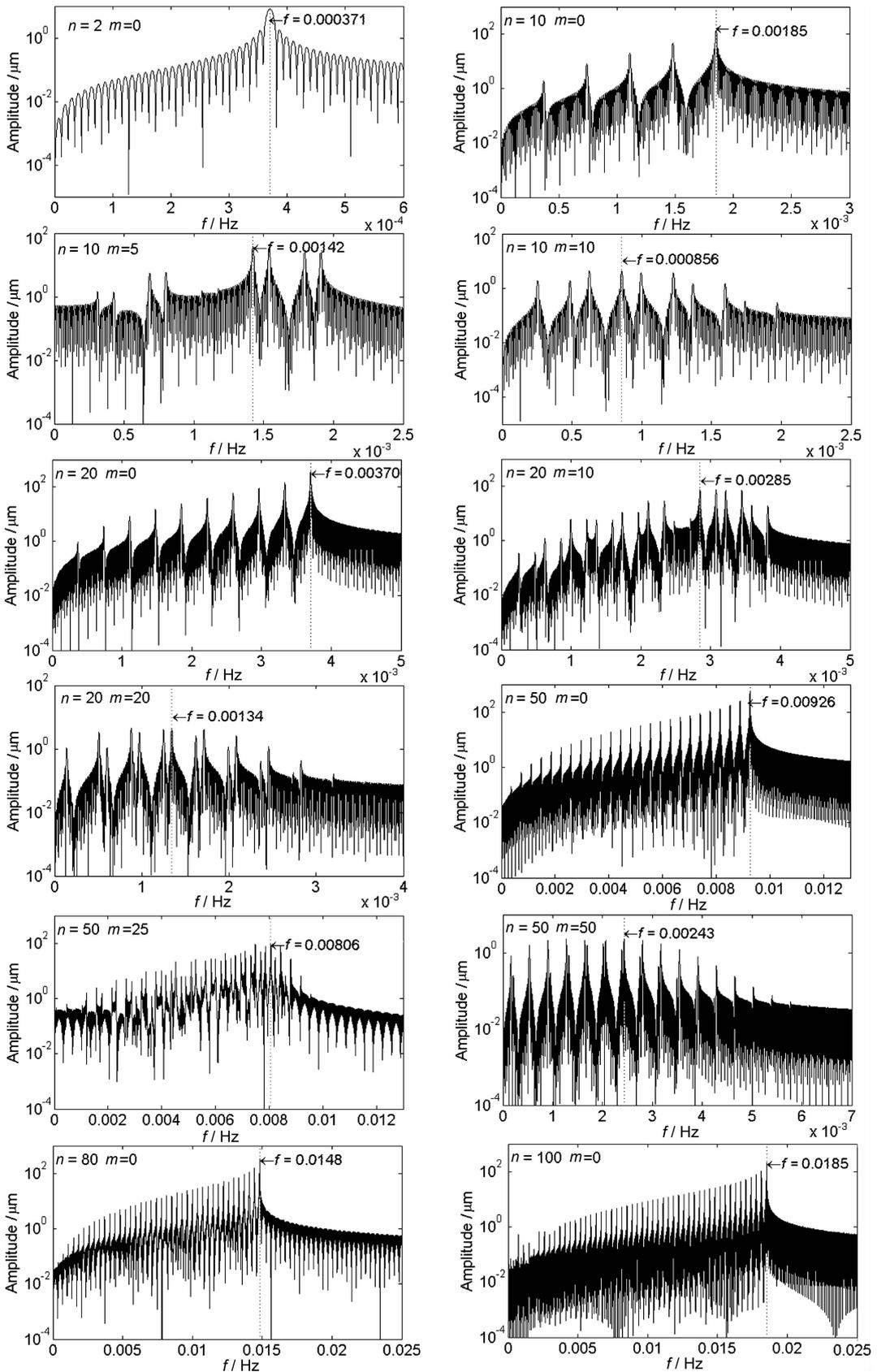


图1 重力卫星星间距离观测值敏感矩阵频谱图

Fig. 1 Spectrum of sensitivity factors for inter-satellite range measurements of gravity satellite

由图 1 和表 2 可知,对于  $n$  阶带谐系数,敏感矩阵  $\mathbf{T}$  的频谱峰值个数为  $n/2$  (若  $n$  为奇数,频谱峰值个数为  $(n+1)/2$ );主频可近似用  $n/\text{rev}$  ( $\text{rev} \approx 5430 \text{ s}$ ) 估算,有效频带范围近似表达为  $2/\text{rev} \sim n/\text{rev}$ ;频谱峰值随着频率的增加而增大,主频为有效频带上限值.对于  $n$  阶扇谐系数、田谐系数,敏感矩阵  $\mathbf{T}$  的主频、峰值等频谱特征参数没有统一的解析式定量表达,在此仅作定性分析.对于  $n$  阶球谐系数,敏感矩阵  $\mathbf{T}_{n,0}$  的频谱以高频信息为主,主频峰值约比  $\mathbf{T}_{n,m}$  ( $m \neq 0$ ) 大 1~2 个数量级,随着  $m$  的增加  $\mathbf{T}_{n,m}$  的高频信息逐渐减弱,主频峰值大致呈减小的趋势,  $\mathbf{T}_{n,n}$  的主频峰值为最小,以低频信息为主(如图 2).上述敏感矩阵频谱成分随次数  $m$  的变化趋势表明:对于  $n$  阶球谐系数,重力卫星星间距离观测值的主频可近似用敏感矩阵  $\mathbf{T}_{n,0}$  的主频估算;地球重力场信号有效频带上限由  $\mathbf{T}_{n,0}$  的频谱决定,下限由  $\mathbf{T}_{n,n}$  的频谱决定.

由上述讨论可知,敏感矩阵的主频由球谐函数的空间周期和卫星轨道时间周期共同决定.  $n$  阶带谐函数二阶导数在  $0 \sim \pi$  之间有  $n$  个零点,幅值从中心点 ( $\theta = 2/\pi$ ) 到两极 ( $\theta = 0, \pi$ ) 逐渐增大,在乘以加权因子  $\sqrt{\cos\theta}$  后幅值可近似用正弦函数  $\sin(n\theta)$  拟合<sup>[20]</sup>.当卫星以圆极轨道运行时,其轨道方程在纬度方向上为  $\theta = 2\pi t/\text{rev}$ ,则当卫星在仅由  $n$  阶带谐函数所确定的重力场模型中运行时,其敏感矩阵的时序曲线拟合函数为  $\sin(2\pi n t/\text{rev})$ ,亦即其主频为  $n/\text{rev}$ .另外,由  $n$  阶勒让德函数的  $\theta$  倍角函数公式不难得到上述  $n$  阶带谐函数对应的敏感矩阵频谱个数的结论 ( $P_n(\cos\theta)$  的二阶导数由  $n/2$  个(若  $n$  为奇数,个数为  $(n+1)/2$ ) 加权正弦函数叠加而成<sup>[21]</sup>).

对于  $n$  阶扇谐系数、田谐系数,敏感矩阵  $\mathbf{T}$  的频谱特征同样可由勒让德函数的性质得到.对于同一阶数  $n$ ,缔合勒让德函数  $P_{nm}(\cos\theta)$  随着  $m$  的增大,零点个数逐渐减小,幅值逐渐向中心 ( $\theta = 0$ ) 集中;当  $m = n$  时,零点消失,幅值集中在中心附近较小的区域<sup>[22]</sup>.球谐函数相当于将上述仅与纬度相关的缔合勒让德函数乘上了一个与经度相关的权重  $\cos(m\lambda)$  或  $\sin(m\lambda)$ ,其幅值在单位球面上的分布可看作是围绕赤道分布的正负相间的条带,该条带随着  $m$  的增大而逐渐向赤道集中<sup>[23]</sup>,相应地,敏感矩阵  $\mathbf{T}$  频谱成分逐渐由高频向低频过渡.为验证上述结论,笔者模拟计算了圆极轨道运行的卫星在仅由  $n$  阶  $m$  次球谐函数确定的重力场模型中的敏感矩阵,发现对于同一阶数  $n$ ,不同级数  $m$  对应的敏感矩阵的频

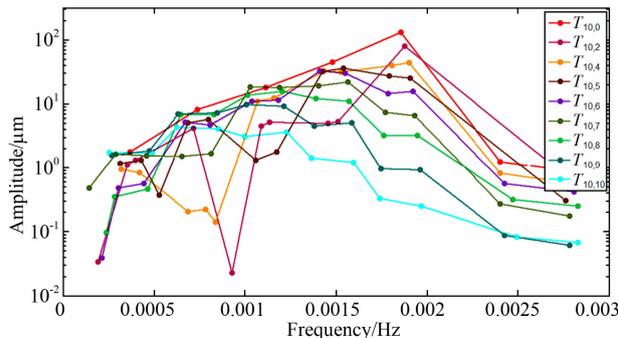


图 2 重力卫星星间距离观测值敏感矩阵(10 阶球谐系数)的频谱峰值

Fig. 2 Peak value of spectrum for sensitivity factors of inter-satellite range measurements of gravity satellite (10 degrees) 带宽度大致相同,但随着  $m$  的增大,其主频峰值的频率点逐渐向零频靠近,说明低频信息逐渐显著,而高频信息逐渐削弱.上述结论与图 1 和表 2 中揭示的现象相吻合.

### 3 滤波器设计指标分析

#### 3.1 通带截止频率

为最大限度保留星间测距观测值中的地球重力场信息,滤波器通带截止频率应大于观测信号有效频带的上限频率值.由第二节基于 GRACE 卫星开普勒轨道根数的敏感矩阵频谱分析结果知:当地球重力场用  $n$  阶球谐函数逼近时,星间距离观测值的有效信号频带上限主要由  $\mathbf{T}_{n,0}$  的主频值决定.实际观测中还应考虑卫星轨道摄动加速度和仪器观测噪声的影响.

由 GRACE 卫星摄动加速度频谱分析结果知<sup>[24-25]</sup>:卫星正常轨道加速度频谱的主频幅值量级为  $10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ;地球潮汐、日月引力以及其它行星的第三体引力引起的保守力摄动加速度频谱的主频幅值量级为  $10^{-7} \sim 10^{-14} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ;大气阻力、太阳辐射压和地球辐射压引起的非保守力摄动加速度频谱的主频幅值量级为  $10^{-7} \sim 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .摄动加速度频谱中含有与正常轨道加速度观测值同频的信号,但由于其主频幅值比后者小 5~12 个量级,在确定星间测距观测信号有效频带范围时可直接用基于正常轨道的加速度敏感矩阵进行分析.另外,星间测距系统观测误差相关研究表明<sup>[26]</sup>:由振荡器噪声、系统噪声和多路径效应引起的观测噪声主要以高频噪声为主,对星间观测值的数据质量及重力场模型恢复的精度有很大的影响,在滤波器的阻带截止频率的指标设计中应予以考虑,但仪器观测噪声

中与正常轨道加速度同频的噪声和上述重力场模型恢复需要的有效信号混合在一起,无法用滤波的方法彻底分离.基于上述讨论,本文中基于卫星正常轨道的星间观测值敏感矩阵频谱得到的地球重力场有效频带中同时包含了卫星轨道摄动引起的同频信号,以及不可避免的混合了星载仪器观测噪声中与有效信号同频的噪声.

基于美国当前 GRACE 卫星运行参数<sup>[19]</sup>和下一代 GRACE Follow-On 卫星计划设计参数<sup>[27]</sup>,本文计算了 100 阶地球重力场模型对应的星间测距信号有效频带分别为:  $3.523 \times 10^{-4} \text{ Hz} \sim 1.760 \times 10^{-2} \text{ Hz}$  和  $3.767 \times 10^{-4} \text{ Hz} \sim 1.880 \times 10^{-2} \text{ Hz}$ ,低通滤波器通带截止频率应至少大于该频带上限.我国首期卫星跟踪卫星重力测量计划滤波器的指标设计中除了考虑上述有效信号频带之外,还要综合考虑滤波器长度、滤波后数据采样率等因素来确定合理的通带截止频率.

### 3.2 通带增益

滤波器通带增益为以一定容限的允许误差来表征的通带幅度响应指标. GRACE 观测任务中重力场模型大地水准面起伏容限  $\epsilon = 0.01 \text{ cm}$ <sup>[28]</sup>,则  $n$  阶重力场系数对应的大地水准面起伏相对误差容限为  $\bar{\delta}_n = \frac{\epsilon}{\delta_n}$  (其中  $\delta_n = r_e \times \sqrt{\sum_{m=0}^n C_{nm}^2 + \sum_{m=0}^n S_{nm}^2}$ ). 由第二节知,  $n$  阶带谐系数敏感矩阵可近似将上述大地水准面起伏相对误差转换为星间测距观测值的相对振幅容限. 基于 Kaula 准则<sup>[29]</sup>,可得通带增益容限  $A_n^{err}$  的近似值如下:

$$\begin{aligned} A_n^{err} &\approx \frac{\epsilon}{r_e \cdot \sqrt{1.6 \times 10^{-10} n^{-3}}} \cdot T_{n,0} \\ &\approx 1.24 \times 10^{-6} n^{1.5} \cdot T_{n,0}. \end{aligned} \quad (10)$$

图 3 给出了 100 阶地球重力场模型(Kaula 准则和 GGM02S 模型<sup>[30]</sup>)滤波器的通带增益,可以看出,基于 Kaula 准则的星间测距观测值相对振幅容限与卫星实测模型有很好的拟合度(J2 项除外). 对于重力场低阶系数 J2 项的精密确定目前已有大量的研究结果<sup>[31-32]</sup>,本文采取静态地球重力场模型 EGM96<sup>[33]</sup>给出的结果  $0.484165 \times 10^{-3}$ ,估算 J2 项对应的频率点  $0.00037 \text{ Hz}$  处增益容限为:

$$\begin{aligned} \alpha_p \Big|_{f=0.00037} &= \frac{0.01}{0.484165 \times 10^{-3} \cdot r_e} \cdot T_{2,0} \\ &\approx 5.313 \times 10^{-7} \approx 144.48, \end{aligned}$$

$f$  单位为 Hz,  $\alpha_p$  单位为 dB,该结果与基于 Kaula 准则的通带增益容限  $A_n^{err}$  的估算结果较为接近. 为使

滤波器在信号通带内的幅度响应满足重力场模型解算对位系数阶方差的要求,在第  $n$  阶球谐系数对应的频率点处的通带增益应尽量小于  $A_n^{err}$ ,滤波器最大通带增益应小于  $\max(A_n^{err})$ .

$n$  阶重力场模型低通滤波器频率响应容限图如图 4 所示(图中给出了  $n=100$  的低通滤波器通带允许逼近误差的极限). 在设计满足上述技术指标的滤波器时,我们必须确定离散时间线性系统的系统函数,该系统的频率响应应落在预先给定的容限内,即通带增益应该在  $1 + A_n^{err}$  和  $1 - A_n^{err}$  之间变化(图 4 中灰色区域). 我国首期卫星跟踪卫星重力测量计划的大地水准面精度设计指标比当前的 GRACE 计划高 1~2 个数量级,相应地,通带增益容限要求也更加苛刻. 在实际滤波器设计中应在地球重力场模型所要求的频率响应容限内综合考虑滤波器阶数、通带波纹特性等因素尽量逼近理想滤波器.

### 3.3 频率采样率

根据尼奎斯特采样定理,当可检测的最高阶频谱信号一定,为保证此频率信号的正常恢复,要求卫

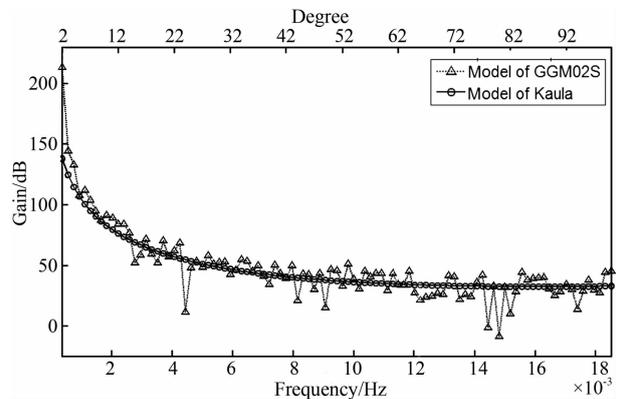


图 3 100 阶地球重力场模型低通滤波器通带增益

Fig. 3 Pass-band gain of low-pass filter for 100 degree gravity field model

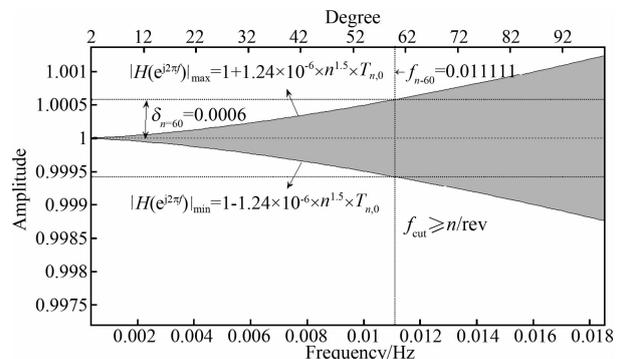


图 4 100 阶地球重力场模型低通滤波器频率响应容限图

Fig. 4 Tolerance of low-pass filter's frequency response for 100 degree gravity field models

星重力观测保持相应的数据采样率. 对于最高阶为  $n_{\max}$  的重力场模型, 其空间分辨率为  $\lambda = \pi r_e / n_{\max}$ . 实际采集数据时观测采样率应高于标称采样率, 若要求卫星重力数据有  $1.0^\circ \times 1.0^\circ$  分辨率, 则一般应在  $1.0^\circ \times 1.0^\circ$  格网内均匀进行 4 点重力测量, 即经度和纬度方向的空间采样率应达到相应阶次球谐函数相邻零点值区域内每 0.25 相位至少有一个采样点, 也即满足  $n_{\max} / \text{rev} \cdot s \leq 0.25$ , 式中  $s$  为频率采样率. 相应地, 滤波器频率采样率至少大于  $4n_{\max} / \text{rev}$  才能满足恢复  $n$  阶地球重力场模型的需求.

我国首期卫星跟踪卫星重力测量计划重力场空间分辨率设计指标为 66 km, 可恢复 300 阶重力场模型, 基于上述指标设计方案, 星间观测值滤波器频率采样率至少应大于 0.2236 Hz. 恢复更高阶次的重力场模型, 总是要求相应的更密集更均匀的全球空间覆盖的观测数据, 但更高的数据采样率对系统软硬件提出更苛刻的要求. 在滤波器设计中, 应综合考虑用户对重力场模型的空间分辨率的需求和系统软硬件条件, 确定合适的滤波器频率采样率.

## 4 结 论

利用重力卫星可获得全球一致的高精度、高分辨率的地球重力场及其时变参数, 丰富人们对地球重力场的认知程度和拓展地球重力场的应用领域<sup>[34-35]</sup>, 科学的数据处理技术是获得高质量地球重力场的前提. 本文基于重力卫星精密星间测距测量模式, 对星间测距系统观测值敏感矩阵的频谱特性作了定性分析, 在讨论了星间测距观测值中能够反应地球重力场信息的有效信号频带的基础上, 给出如下低通滤波器的技术指标设计方案: (1) 当地球重力场用  $n$  阶球谐函数逼近时, 低通滤波器的通带截止频率应至少大于  $n$  阶带谐系数敏感矩阵因子  $T_{n,0}$  的主频, 该主频由球谐函数的空间周期和卫星轨道时间周期共同决定; (2) 低通滤波器在有效频带各频率点处的通带增益容限可用基于 Kaula 准则的星间测距观测值相对振幅容限估算, 滤波器通带内的频率响应应落在预先给定的容限内; (3) 滤波器频率采样率至少大于  $4n_{\max} / \text{rev}$  才能满足恢复  $n$  阶地球重力场模型的需求.

由于滤波器阻带技术指标与星上载荷的仪器噪声水平、卫星运行空间环境背景噪声等因素有关, 本文只讨论了基于地球重力场信号频谱特性的通带截止频率、通带增益和频率采样率的设计指标, 随着我

国自主知识产权的重力卫星工作的全面开展, 有望得到更精细的数据处理分析系统技术指标论证结果.

## 参考文献(References)

- [1] Tapley B D, Bettadpur S, Ries J C, et al. GRACE measurements of mass variability in the Earth system. *Science*, 2004, 305(5683): 503-505.
- [2] Flechtner F, Neumayer K H, Doll B, et al. GRAF-A GRACE follow-on mission feasibility study. EGU General Assembly 2009. *Geophysical Research Abstracts*, 2009, 11: 8516.
- [3] Kim J, Lee S W. Flight performance analysis of GRACE K-band ranging instrument with simulation data. *Acta Astronautica*, 2009, 65(11-12): 1571-1581.
- [4] Horwath M, Lemoine J M, Biancale R, et al. Improved GRACE science results after adjustment of geometric biases in the Level-1B K-band ranging data. *Journal of Geodesy*, 2011, 85(1): 23-38.
- [5] Choi J Y, Lee S J. The precision validation of the precise baseline determination for satellite formation. *Journal of Astronomy and Space Science*, 2011, 28(1): 63-70.
- [6] Wang F R. Study on center of mass calibration and K-band ranging system calibration of the GRACE mission. Austin: The University of Texas at Austin, 2003.
- [7] Yeh H C, Yan Q Z, Liang Y R, et al. Intersatellite laser ranging with homodyne optical phase locking for Space Advanced Gravity Measurements mission. *Review of Scientific Instruments*, 2011, 82(4): 044501-044506.
- [8] 郑伟, 许厚泽, 钟敏等. GRACE 星体和 SuperSTAR 加速度计的质心调整精度对地球重力场精度的影响. *地球物理学报*, 2009, 52(6): 1465-1473.  
Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Influence of the adjusted accuracy of center of mass between GRACE satellite and SuperSTAR accelerometer on the accuracy of Earth's gravitational field. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, 52(6): 1465-1473.
- [9] 郑伟, 许厚泽, 钟敏等. 卫星跟踪卫星测量模式中星载加速度计高低灵敏轴分辨率指标优化设计论证. *地球物理学报*, 2009, 52(11): 2712-2720.  
Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Demonstration on the optimal design of resolution indexes of high and low sensitive axes from space-borne accelerometer in the satellite-to-satellite tracking model. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, 52(11): 2712-2720.
- [10] 康开轩, 李辉, 邹正波等. 精密星间微波测距系统观测数据模拟与预处理技术. *大地测量与地球动力学*, 2011, 31(2): 71-75.  
Kang K X, Li H, Zou Z B, et al. Simulation of measurements and pre-processing technology for high accurate inter-satellite microwave ranging system. *Journal of Geodesy and Geodynamics* (in Chinese), 2011, 31(2): 71-75.
- [11] MacArthur J L, Posner A S. Satellite-to-satellite range-rate measurement. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote*

- Sensing, 1985, 23(4): 517-523.
- [12] Thomas J B. An Analysis of Gravity-Field Estimation Based on Intersatellite Dual-1-Way Biased Ranging. JPL Publication, 1999.
- [13] Wu S C. Algorithm Theoretical Basis Document for GRACE Level-1B Data Processing V1. 2. Jet Propulsion Laboratory, 2006.
- [14] 周旭华, 许厚泽, 吴斌等. 用 GRACE 卫星跟踪数据反演地球重力场. 地球物理学报, 2006, 49(3): 718-723  
Zhou X H, Xu H Z, Wu B, et al. Earth's gravity field derived from GRACE satellite tracking data. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, 49(3): 718-723.
- [15] Kim J, Tapley B D. Simulation of Dual One-Way Ranging Measurements. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2003, 40(3): 419-425.
- [16] 王正涛. 卫星跟踪卫星测量确定地球重力场的理论与方法. 武汉: 武汉大学, 2005.  
Wang Z T. Theory and methodology of earth gravity field recovery by satellite-to-satellite tracking data (in Chinese). Wuhan: Wuhan University, 2005.
- [17] 奥本海姆 A V, 谢弗 R W, 巴克 J R. 离散时间信号处理(第二版). 刘树棠, 黄建国译. 西安: 西安交通大学出版, 2001.  
Oppenheim A V, Schafer R W, Buck J R. Discrete-time Signal Processing, 2nd ed. (in Chinese). Translated by Liu S T, Huang J G. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001.
- [18] 于锦海, 万晓云. 计算 Legendre 函数导数的非奇异方法. 测绘科学技术学报, 2010, 27(1): 1-3.  
Yu J H, Wan X Y. Non-singular formulae for computing derivatives of legendre functions. *Journal of Geomatics Science and Technology* (in Chinese), 2010, 27(1): 1-3.
- [19] JPL. GRACE Science & Mission Requirements Document. Jet Propulsion Laboratory, JPL D-15928, Revision C, 2000.
- [20] Risbo T. Fourier transform summation of Legendre series and D-functions. *Journal of Geodesy*, 1996, 70(7): 383-396.
- [21] 海斯卡涅 W A, 莫里兹 H. 物理大地测量学. 卢福康, 胡国理译. 武汉: 测绘出版社, 1984.  
Heiskanen W A, Moritz H. Physical Geodesy (in Chinese). Lu F K, Hu G L, Trans. Wuhan: Survey Press, 1984.
- [22] Holmes S A, Featherstone W E. A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions. *Journal of Geodesy*, 2002, 76(5): 279-299.
- [23] Seeley R T. Spherical harmonics. *The American Mathematical Monthly*, 1966, 73(4): 115-121.
- [24] Kim J. Simulation Study of A Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking Mission. Austin: The University of Texas at Austin, 2000.
- [25] 郑伟, 许厚泽, 钟敏等. 基于半解析法有效和快速估计 GRACE 全球重力场的精度. 地球物理学报, 2008, 51(6): 1704-1710.  
Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Efficient and rapid estimation of the accuracy of GRACE global gravitational field using the semi-analytical method. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2008, 51(6): 1704-1710.
- [26] 郑伟, 许厚泽, 钟敏等. GRACE 卫星关键载荷实测数据的有效处理和地球重力场的精确解算. 地球物理学报, 2009, 52(8): 1966-1975.  
Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Effective processing of measured data from GRACE key payloads and accurate determination of Earth's gravitational field. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, 52(8): 1966-1975.
- [27] Stephens M, Craig R, Leitch J, et al. Demonstration of an interferometric laser ranging system for a follow-on gravity mission to GRACE. *Geoscience and Remote Sensing Symposium*, (IGARSS), 2006: 1115-1118.
- [28] 郑伟, 邵成刚, 罗俊等. 基于卫-卫跟踪观测技术利用能量守恒法恢复地球重力场的数值模拟研究. 地球物理学报, 2006, 49(3): 712-717.  
Zheng W, Shao C G, Luo J, et al. Numerical simulation of Earth's gravitational field recovery from SST based on the energy conservation principle. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, 49(3): 712-717.
- [29] Kaula W M. Theory of Satellite Geodesy. Waltham-London: Blaisdell Publishing Company, 1966.
- [30] Tapley B D, Ries J, Bettadpur S, et al. GGM02: An improved Earth gravity field model from GRACE. *Journal of Geodesy*, 2005, 79(8): 467-478.
- [31] Yoder C F, Williams J G, Dickey J O, et al. Secular variation of Earth's gravitational harmonic  $J_2$  coefficient from Lageos and nontidal acceleration of Earth rotation. *Nature*, 1983, 303(5920): 757-762.
- [32] 周旭华, 吴斌. 大气、陆地水储量和海水质量分布变化与地球低阶引力场球谐系数的关系. 天文学报, 2002, 43(3): 327-332.  
Zhou X H, Wu B. Changes of atmosphere, continental water and oceanic mass distribution in relation with low degree harmonic coefficients in the earth's gravitational field. *Acta Astronomica Sinica* (in Chinese), 2002, 43(3): 327-332.
- [33] Lemoine F G, Kenyon S C, Factor J K, et al. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM 96. NASA, 1998.
- [34] 郑伟, 许厚泽, 钟敏等. 利用解析法有效快速估计将来 GRACE Follow-On 地球重力场的精度. 地球物理学报, 2010, 53(4): 796-806.  
Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Efficient and rapid estimation of the accuracy of future GRACE Follow-On Earth's gravitational field using the analytic method. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2010, 53(4): 796-806.
- [35] 郑伟, 许厚泽, 钟敏等. 基于时空域混合法利用 Kaula 正则化精确和快速解算 GOCE 地球重力场. 地球物理学报, 2011, 54(1): 14-21.  
Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Accurate and rapid determination of GOCE Earth's gravitational field using time-space-wise approach associated with Kaula regularization. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2011, 54(1): 14-21.