

王美霞, 杨顶辉, 宋国杰. 二维 SH 波方程的半解析解及其数值模拟. 地球物理学报, 2012, 55(3): 914-924, doi:10. 6038/j. issn. 0001-5733. 2012. 03. 021.

Wang M X, Yang D H, Song G J. Semi-analytical solutions and numerical simulations of 2D SH wave equation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2012, 55(3): 914-924, doi:10. 6038/j. issn. 0001-5733. 2012. 03. 021.

二维 SH 波方程的半解析解及其数值模拟

王美霞¹, 杨顶辉^{1*}, 宋国杰^{1,2}

1 清华大学数学科学系, 北京 100084

2 清华大学计算机科学与技术系, 北京 100084

摘 要 本文以波动理论为基础, 半解析化求解地震勘探中常用的 SH 波方程. 获得的主要结果包括: 给出了二维均匀介质中 SH 波方程的解析解; 利用 Cagniard-de Hoop 方法详细推导了二维双层介质中 SH 波方程的解析解, 获得了透射波的解析解表达式. 同时, 基于 SH 波方程的解析表达式, 给出了包含各种波(如直达波、反射波、首波以及透射波)的解析解和波形图. 对于比较复杂的积分型解析解, 利用数值积分方法给出了数值结果, 并与优化的近似解析离散化方法(ONADM)和 4 阶 Lax-Wendroff 修正方法(LWC)的数值结果进行了比较, 以验证解析解的正确性. 本文的研究成果有望在检验波动方程数值新方法的有效性、波传播理论分析等方面得到应用.

关键词 SH 波, 解析解, 半解析解, Cagniard-de Hoop 方法

doi:10. 6038/j. issn. 0001-5733. 2012. 03. 021

中图分类号 P631

收稿日期 2011-11-29, 2011-12-18 收修定稿

Semi-analytical solutions and numerical simulations of 2D SH wave equation

WANG Mei-Xia¹, YANG Ding-Hui^{1*}, SONG Guo-Jie^{1,2}

1 Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing 100084, China

2 Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China

Abstract In this paper, we show the analytical solutions of the SH-wave equation based on wave propagation theories. The main results include the analytical solutions of 2D SH-wave equations in the homogeneous medium, the analytical solutions of reflected SH-wave in a two-layer medium derived in detail by using the Cagniard-de Hoop method; we also obtain the analytical solutions for the transmitted SH-wave. Meanwhile, we present some waveforms of various waves including direct wave, reflected wave, head wave, and transmitted wave computed by the analytical solutions of the SH-wave. We present some numerical results by using numerical integral algorithms for the complex integral solutions, and compare the analytical solutions with the numerical results computed by the numerical methods including the optimal nearly analytical discrete method (ONADM) and the fourth-order Lax-Wendroff correction (LWC) scheme to verify the correctness of the numerical methods. The analytical solutions obtained in this paper have great potentials in the applications of testing the new methods for solving the wave equations and the theoretical analysis of wave propagation.

Keywords SH-wave, Analytical solutions, Semi-analytical solutions, Cagniard-de Hoop method

基金项目 国家杰出青年科学基金(40725012)和清华大学基础研究基金(2010THZ)资助.

作者简介 王美霞, 女, 1987 年生, 清华大学数学科学系研究生, 主要研究方向为弹性波理论分析及地震波正演研究. E-mail: wmxia06@163. com

* **通讯作者** 杨顶辉, 教授, 主要从事计算地球物理、孔隙介质波传播理论等研究. E-mail: dhyang@math. tsinghua. edu. cn

1 引言

弹性波方程是弹性介质中波传播所满足的偏微分方程. 为了更好地指导地震勘探, 我们需要求解这类方程. SH 波方程是波动方程中较为简单的一种, 找出其解析解, 尤其是找出层状介质中 SH 波方程的解析解, 有着重要意义. 一方面, 它可以反映 SH 波的传播性质, 如各种波的到时、振幅等; 另一方面, 可以用它来检验用于地震波传播模拟的各种数值方法(如差分方法^[1-3]、有限元方法^[4-6]等)的正确性, 比较各种数值方法的优劣, 指导我们更好地研究新的数值方法. 用于检验数值方法正确性的传统办法是和精细网格下的数值结果进行比较^[7-8], 但是由于每一次迭代都会存在舍入误差, 所以即便在网格很精细的情况下, 得到的数值结果的误差也有可能较大, 从而影响对新数值方法检验结果的正确评价. 而且通常情况下, 获得精细网格下数值结果所需要的计算量较大, 而使用解析解方法可以直接计算在某一接收点处的解析解, 其计算量相对很小, 且计算结果更加精确, 可以更好地检验数值方法的有效性.

SH 波方程的解析解问题既是研究地震波传播规律的基础问题, 也是到目前为止尚未完全解决的重要理论问题. 自 20 世纪 50 年代以来, 许多著名学者在这方面已做了很多研究, 并取得了不少研究成果. Ewing^[9]研究了弹性波在层状介质中的传播规律. Hoop^[10]利用 Cagniard-de Hoop 方法推导了均匀介质中声波方程的解析解. Bhattacharya^[11-12]推导了弹性参数仅关于纵向有变化的介质中 SH 波的解析解, 但是他的推导中要求弹性参数关于深度 z 连续且至少一阶可导, 而实际介质却存在明显的速度变化, 这时弹性参数存在跳跃, 既不连续也不可导, 因此无法应用 Bhattacharya 的结果. Aki 和 Richards^[13]使用 Cagniard-de Hoop 方法推导了二维双层介质中反射波的解析解, 但没有详细计算透射波的解析解. 本文以波动理论为基础, 使用 Cagniard-de Hoop 方法详细推导了比较常用的 SH 波方程的解析解, 并和离散求解波动方程的经典数值算法修正的 Lax-Wendroff 方法(LWC)^[1]以及最优近似解析离散化方法(ONADM)^[3]模拟得到的结果进行比较, 以验证解析解的正确性.

由于地球介质按其物性变化是分层的, 具有明显的层状结构, 而两层结构是研究多层结构的基

础, 所以研究波在具有一定速度反差的双层介质中的传播具有十分重要的意义. 为此, 本文针对双层介质中 SH 波传播所满足的波动方程, 利用 Cagniard-de Hoop 方法^[10]推导了其解析解. 具体地说, 我们选取震源为作用在 $z < 0$ 半空间的脉冲线震源, 该半空间沿 $z = 0$ 与 $z > 0$ 的另一半空间紧密接触, 在这样的双层介质中, 我们使用 Cagniard-de Hoop 方法, 对 SH 波方程关于时间 t 进行 Laplace 变换($t \rightarrow s$)、关于 x 进行 Fourier 变换($x \rightarrow k_x$), 再结合反射系数、透射系数, 推导了 SH 波在 (k_x, z, s) 域的数学表达式, 之后再对其进行 Fourier 逆变换, 找出一条比较合适的积分路径, 使得积分能够表达为关于 t 的 Laplace 变换的形式, 最终给出双层介质中脉冲线震源情况下二维 SH 波方程的解析解. 在此基础上, 推导了震源为一般线震源情况下双层介质中 SH 波方程的解析解, 并给出了直达波的到时、反射波的到时、出现首波的条件、首波的到时, 以及在波场中直达波、反射波和首波的响应特征.

需要指出的是, 通常情况下, 我们得到的解析解是广义积分形式的, 无法直接得到显式的表达式, 需要使用数值积分方法计算接收点处的准确解.

2 二维 SH 波方程的解析解

2.1 二维均匀介质中 SH 波方程的解析解

二维均匀各项同性介质中 SH 波方程为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u = f(t) \delta(x, z), \quad (1)$$

其中, ρ 是介质的密度, u 是位移, μ 是 Lamé 常数, $\mu = \rho \beta^2$, β 是波速, $f(t)$ 是震源强度随时间变化的函数, 且满足当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$. 震源是线震源.

为了求解二维声波方程(1)的解析解, 可以首先给出三维均匀介质情况下方程(1)的解析解, 再利用降维法求解方程(1)的解析解^[14]. 当然也可以直接利用 Cagniard-de Hoop 方法求出(1)式的解析解^[10]:

$$u(x, z, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\mu} \int_{R/\beta}^t f(t-w) \cdot \frac{1}{\sqrt{w^2 - \frac{R^2}{\beta^2}}} dw, & \text{当 } t \geq \frac{R}{\beta} \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } t < \frac{R}{\beta} \text{ 时} \end{cases} \quad (2)$$

其中, $R = \sqrt{x^2 + z^2}$ 是接收点到震源的距离.

公式(2)给出了均匀各向同性介质中波动方程的解析解。但是实际地球介质却并非是均匀各向同性的,事实上,地球介质是具有明显的圈层结构的,所以研究波在多层介质中的传播更具实际意义。而两层结构是研究多层结构的基础,下面研究波在存在速度反差,且下层介质速度大于上层介质速度双层介质中的传播规律。

2.2 二维双层介质中 SH 波方程的解析解

以下利用 Cagniard-de Hoop 方法给出二维双层介质中 SH 波方程的解析解。图 1a 给出了震源、接收点和间断面等在 $x-z$ 直角坐标系下双层介质模型的示意图。其中上、下两层介质沿分界面 $z=0$ 密切接触,分界面两侧都是均匀各向同性介质,上层介质的密度和波速分别为 ρ_1 和 β_1 ,下层介质的密度

和波速分别为 ρ_2 和 β_2 ,且 $\beta_1 < \beta_2$,震源 S 位于上半空间,其坐标为 $(0, z_0)$,且 $z_0 < 0$,接收点放在点 (x, z) 。那么,当 $z < 0$ 时,接收点接收到的波包括直达波和反射波;当 $z > 0$ 时,接收点接收到的是透射波。下面分别就接收点位于上层和下层介质中这两种情况给出方程(1)的解析解。

2.2.1 直达波和反射波的解析解

如果接收点在上层介质中($z < 0$),记为点 A,此时接收点接收到的波包括直达波和反射波。下面首先给出震源为脉冲线震源时的解析解,再由格林函数法,给出震源为一般线震源时的解析解。具体推导过程见附录。

首先,当震源为脉冲线震源 $f(t) = (0, \delta(t)\delta(x)\delta(z-z_0), 0), (z_0 < 0)$ 时,得到的解析解如下:

$$u(x, z, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\mu_1} \frac{H\left(t - \frac{R}{\beta_1}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R^2}{\beta_1^2}}} - \frac{1}{2\pi\mu_1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \frac{H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} \right\}, & \text{当 } \frac{|x|}{R_0 \beta_1} \leq \frac{1}{\beta_2} \text{ 时,} \\ \frac{1}{2\pi\mu_1} \frac{H\left(t - \frac{R}{\beta_1}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R^2}{\beta_1^2}}} - \frac{1}{2\pi\mu_1} \operatorname{Im}^2 \left\{ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \frac{H(t - t_h) - H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\sqrt{\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2}} \right\}, & \\ - \frac{1}{2\pi\mu_1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \frac{H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} \right\}, & \text{当 } \frac{|x|}{R_0 \beta_1} > \frac{1}{\beta_2} \text{ 时,} \end{cases} \quad (3)$$

其中, $R = \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}$ 是接收点 A 到震源 S 的距离。 $R_0 = \sqrt{x^2 + (z + z_0)^2}$ 是接收点 A 到震源镜像 S_1 的距离(见图 1a),其中函数 $H(t) = \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ 1, & (t \geq 0) \end{cases}$ 。 $t_h = \frac{|x|}{\beta_2} + |z + z_0| \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2}}$ 是首波的到时。

$\mu_1 = \rho_1 \beta_1^2, \mu_2 = \rho_2 \beta_1^2$ 。 η_1 和 η_2 的表达式和意义见附录。

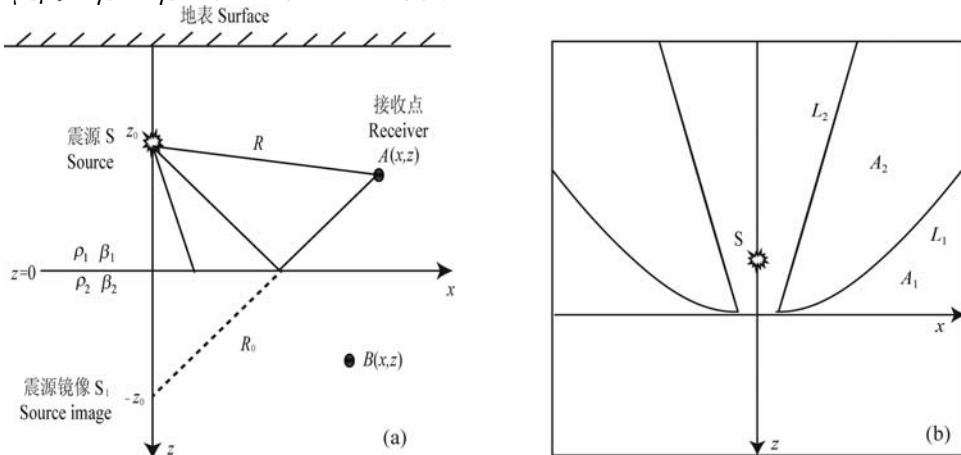


图 1 (a) 双层介质模型; (b) 波传播分析

Fig. 1 (a) A two-layer medium model; (b) Analysis of the wave propagation

从(3)式可以看到, SH 波的解析解包括两种情况. 当接收点 A 与震源位置以及波速之间满足关系 $\frac{|x|}{R_0\beta_1} \leq \frac{1}{\beta_2}$ 时, 解析解表达式(3)表示解析解中包含了两种波: 直达波和反射波. 换句话说, 在接收点会接收到直达波和反射波. 具体地说, 直达波的解析解为

$$u^{\text{直达}}(x, z, t) = \frac{1}{2\pi\mu_1} \frac{H\left(t - \frac{R}{\beta_1}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R^2}{\beta_1^2}}}, \quad (4)$$

反射波的解析解为

$$u^{\text{反}}(x, z, t) = -\frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Re} \left\{ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \frac{H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} \right\}. \quad (5)$$

从直达波解析解(4)和反射波解析解(5)可以看出, 直达波的到时为 $\frac{R}{\beta_1}$, 反射波的到时为 $\frac{R_0}{\beta_1}$, 这与实际地球介质中 SH 波传播的走时完全一致.

当接收点、震源以及波速之间满足关系 $\frac{|x|}{R_0\beta_1} >$

$\frac{1}{\beta_2}$ 时, 从解析解(3)的表达式可看出, 解析解中包含三项, 分别表示直达波、首波^[15-16]和反射波. 换句话说, 此时在接收点处能接收到三种波: 直达波、首波和反射波. 具体地, 直达波和反射波的解析解表达式分别与方程(4)和(5)相同, 而首波的解析解表达式为:

$$u^{\text{首}}(x, z, s) = -\frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Im} \left\{ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \frac{H(t - t_h) - H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\sqrt{\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2}} \right\}. \quad (6)$$

从(3)式可以看出, 直达波的到时为 $\frac{R}{\beta_1}$, 反射波

的到时为 $\frac{R_0}{\beta_1}$, 首波的到时为

$$t_h = \frac{|x|}{\beta_2} + |z + z_0| \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2}}.$$

由于首波出现的条件是

$$\frac{|x|}{R_0\beta_1} > \frac{1}{\beta_2}, \text{ 即 } \frac{\beta_1}{\beta_2} < \frac{|x|}{R_0} < 1,$$

所以只有在下层介质的速度 β_2 大于上层介质的速度 β_1 时才会出现首波. 在上层介质中, 显然有 $\frac{R}{\beta_1} <$

$\frac{R_0}{\beta_1}$, 这说明直达波要早于反射波到达上层介质中的

接收点. 另一方面, 比较 t_h 和 $\frac{R_0}{\beta_1}$, 有 $t_h < \frac{R_0}{\beta_1}$, 所以

在上层介质中的接收点处, 首波也先于反射波被接收到. 但是首波到

时 t_h 可能大于也可能等于或小于直达波到

时 $\frac{R}{\beta_1}$, 这取决于两层介质的波速、接收点和震源的位置. 图 1b 是各种波传播分析的示意图.

由于对称性, 这里只对 $x > 0$ 一侧的情况加以说明, 直线 L_2 和坐标轴 x 之间的区域是出现首波

的区域(A_1 和 A_2 部分), 即满足条件 $\frac{|x|}{R_0\beta_1} > \frac{1}{\beta_2}$ 的区

域, 在该域中, 位于曲线 L_1 以上的区域 A_2 中直达波早于首波到达, 位于曲线 L_1 以下的区域 A_1 中直达波晚于首波到达. 因此, 在上层介质中任意一点, 最先接收到的波是首波或直达波, 最后接收到的波是反射波.

当震源为一般线震源 $f(t) = (0, f(t)\delta(x)\delta(z - z_0), 0)(z_0 < 0)$ 时, 可以用震源为单位脉冲震源时得到的解析解(3)式与函数 $f(t)$ 关于时间 t 做卷积, 从而得到震源为一般震源时的解析解. 此时, 在 $z < 0$ 一侧任一接收点 (x, z) 接收到的波解析解为

$$u(x, z, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\mu_1} \int_{R/\beta_1}^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{R^2}{\beta_1^2}}} d\tau - \frac{1}{2\pi\mu_1} \int_{R_0/\beta_1}^t \text{Re} \left\{ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \right\} \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} d\tau, & \text{当 } \frac{|x|}{R_0\beta_1} \leq \frac{1}{\beta_2} \text{ 时} \\ \frac{1}{2\pi\mu_1} \int_{R/\beta_1}^t \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{R^2}{\beta_1^2}}} d\tau - \frac{1}{2\pi\mu_1} \int_{t_h}^{\min\{t, \frac{R_0}{\beta_1}\}} \text{Im} \left\{ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \right\} \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - \tau^2}} d\tau \\ - \frac{1}{2\pi\mu_1} \int_{\frac{R_0}{\beta_1}}^t \text{Re} \left\{ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \right\} \frac{f(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} d\tau. & \text{当 } \frac{|x|}{R_0\beta_1} > \frac{1}{\beta_2} \text{ 时} \end{cases} \quad (7)$$

2.2.2 透射波解析解

在图 1a 所示的坐标系下, 若接收点位于 $z > 0$ 一侧, 而震源位于 $z_0 < 0$ 一侧, 则在任一接收点 (x, z)

接收到的波为透射波. 下面给出计算透射波解析解的具体推导过程.

当震源为单位脉冲线震源时, 关于 x 做 Fourier 变换, 关于时间 t 做 Laplace 变换后, 可以得到波数域透射波的解析解为^[13]

$$\hat{u}(k_x, z, s) = \frac{1}{2\mu_1 s \eta_1} \dot{S} \dot{S} \exp[-s(\eta_2 z + \eta_1 |z_0|)], \quad (8)$$

其中, 透射系数 $\dot{S} \dot{S} = \frac{2\mu_1 \eta_1}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2}$, $\eta_1 = \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2}$,

$\eta_2 = \sqrt{\frac{1}{\beta_2^2} - p^2}$, 且 $\text{Re}(\eta_1) \geq 0$, $\text{Re}(\eta_2) \geq 0$, p 满足 $k_x = isp$.

在本研究中, 我们将通过使用 Fourier 逆变换和 Laplace 逆变换来推导波动方程(1)的时间-空间域的解析解. 为此, 首先将(8)式关于波数 k_x 做 Fourier 逆变换, 可得

$$\bar{u}(x, z, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\mu_1 s \eta_1} \dot{S} \dot{S} \exp[-s(\eta_2 z + \eta_1 |z_0|)] \exp(ik_x x) dk_x. \quad (9)$$

由于被积函数的实部是关于 k_x 的偶函数, 被积函数的虚部是关于 k_x 的奇函数, 所以(9)式可写为

$$\bar{u}(x, z, s) = \frac{1}{2\pi\mu_1 s} \text{Re} \int_{-\infty}^0 \frac{\dot{S} \dot{S}}{\eta_1} \exp[-s(\eta_2 z + \eta_1 |z_0|)] \exp(ik_x x) dk_x, \quad (10)$$

将 $k_x = isp$ 代入方程(10), 可得

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, z, s) &= \frac{1}{2\pi\mu_1 s} \text{Re} \int_{+\infty}^0 \frac{\dot{S} \dot{S}}{\eta_1} \exp[-s(\eta_2 z + \eta_1 |z_0|)] \exp(-spx) isdp \\ &= \frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Im} \int_0^{+\infty} \frac{\dot{S} \dot{S}}{\eta_1} \exp[-s(\eta_2 z - \eta_1 z_0 + px)] dp, \end{aligned} \quad (11)$$

令

$$\eta_2 z - \eta_1 z_0 + px = t, \quad (12)$$

且 t 为实数, 则对任意 t 可由(12)式解出 $p = p(t)$, 这就得到一条积分路径, 根据对称性假设 $x \geq 0$.

且当 $p = 0$ 时, $t = \frac{z}{\beta_2} - \frac{z_0}{\beta_1}$. 将(12)代入(11)得

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, z, s) &= \frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Im} \int_{\frac{z}{\beta_2} - \frac{z_0}{\beta_1}}^{+\infty} \frac{\dot{S} \dot{S}}{\eta_1} \exp(-st) \frac{dp}{dt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Im} \int_0^{+\infty} \frac{\dot{S} \dot{S}}{\eta_1} \frac{dp}{dt} H\left(t - \frac{z}{\beta_2} + \frac{z_0}{\beta_1}\right) \exp(-st) dt, \end{aligned} \quad (13)$$

根据 Laplace 变换的定义, 由(13)可得

$$u(x, z, t) = \frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Im} \left\{ \frac{\dot{S} \dot{S}}{\eta_1} \frac{dp}{dt} H\left(t - \frac{z}{\beta_2} + \frac{z_0}{\beta_1}\right) \right\}, \quad (14)$$

其中, (14)式中需要的 $\frac{dp}{dt}$ 可由表达式(12)得到:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{x + \frac{pz_0}{\eta_1} - \frac{pz}{\eta_2}}.$$

将 $\frac{dp}{dt}$ 代入(14), 则公式(14)即是单位脉冲线震源对应的透射波解析解. 需要指出的是, 在双层介质中, 由于波速 $\beta_1 \neq \beta_2$, 因此难以从方程(12)得到 $p = p(t)$ 的简单解析表达式, 所以在实际计算时, 我们建议利用数值方法来计算每一个时刻的 p 值. 在本文的数值试验中, 计算时刻 t 的 p 值时, 我们将(12)式展开为包含 p^4, p^3, p^2, p 的方程, 使用 Matlab 命令求出关于 p 的四次方程的根, 之后代入(12)式中验证, 选取符合(12)式的根. 当然也可以直接使用 Matlab 命令计算(12)式的零点.

当震源为一般的线震源 $(0, f(t)\delta(x)\delta(z-z_0), 0)$ 时, 只需将(14)式和震源函数 $f(t)$ 做卷积, 便可得到一般震源时的透射波解析解:

$$u(x, z, t) = \frac{1}{2\pi\mu_1} \int_{\frac{z}{\beta_2} - \frac{z_0}{\beta_1}}^t \text{Im} \left\{ \frac{\dot{S} \dot{S}}{\eta_1} \frac{dp}{dt} \right\} f(t-\tau) d\tau. \quad (15)$$

3 数值算例

下面通过与数值方法计算结果的比较来进一步说明本文所获得结果的正确性. 由于本文给出的解析解是积分形式的, 故在实际应用时, 可以通过计算量很小、数值计算稳定、且计算误差可以通过积分步长控制的中矩形积分公式进行计算^[17]. 为此, 我们选取上下层速度反差较大的双层介质模型. 具体地说, 上层介质波速为 $\beta_1 = 2.4$ km/s, 密度为 $\rho_1 = 2.1$ kg/m³, 下层介质的波速为 $\beta_2 = 5.0$ km/s, 密度为 $\rho_2 = 2.6$ kg/m³. 数值计算的模型区域为 $0 \leq x \leq 25$ km, $0 \leq z \leq 25$ km, 双层介质的分界面位于地表下 15 km 处. 空间步长为 $\Delta x = \Delta z = 20$ m, 时间步长为 $\Delta t = 1$ ms. 震源位于地表下 (12.5 km, 14 km) 处. 震源主频为 $f_0 = 16$ Hz. 随时间变化的震源函数为

$$\begin{aligned} f(t) &= -5.76 f_0^2 [1 - 16(0.6 f_0 t - 1)^2] \\ &\quad \times \exp[-8(0.6 f_0 t - 1)^2]. \end{aligned} \quad (16)$$

为了验证解析解的正确性, 我们给出了解析解与优化的近似解析离散化方法(ONADM)^[3]和 4 阶

Lax-Wendroff 修正(LWC)^[1]方法数值计算结果的比较.

图 2a 和 2b 分别是用 ONADM 方法和本文给出的解析解得到的 $T=2.4$ s 时刻的波场快照. 为了便于理解,我们在图 2a 中标出了各种波,可以看到在上层介质中存在直达波、反射波和首波,在下层介质中有透射波.可以看出图 2a 中 CE 段出现了首波,CD 段首波的到时晚于直达波但早于反射波,DE 段首波的到时早于直达波和反射波,这与本文前面的理论分析得到的结果一致.比较图 2a 和 2b 可以看到,利用本文解析解得到的波场快照与 ONADM 数值方法所得到的波场快照一致,且各种波均比较清晰,这证明了解析解的正确性,同时也

说明了 ONADM 方法的正确性.

图 3 给出了在接收点(13.3 km, 12.9 km)处接收到的波解析解与 ONADM 方法^[3]和 4 阶 LWC 方法^[1]计算结果的比较.其中,图 3a 和 3b 中的实线均为解析解,点画线是相应的数值方法计算得到的结果.可以看到,ONADM、LWC 两种数值方法计算得到的结果和解析解完全一致,即直达波和反射波的数值解和解析解完全一致,这进一步说明了本文所给解析解的正确性,也相互验证了数值方法(ONADM 方法和 LWC 方法)的正确性.

另一方面,此时接收点、震源、波速之间的关系(见图 1a)满足 $\frac{|x|}{R_0\beta_1} < \frac{1}{\beta_2}$,根据解析解(7)中首波出

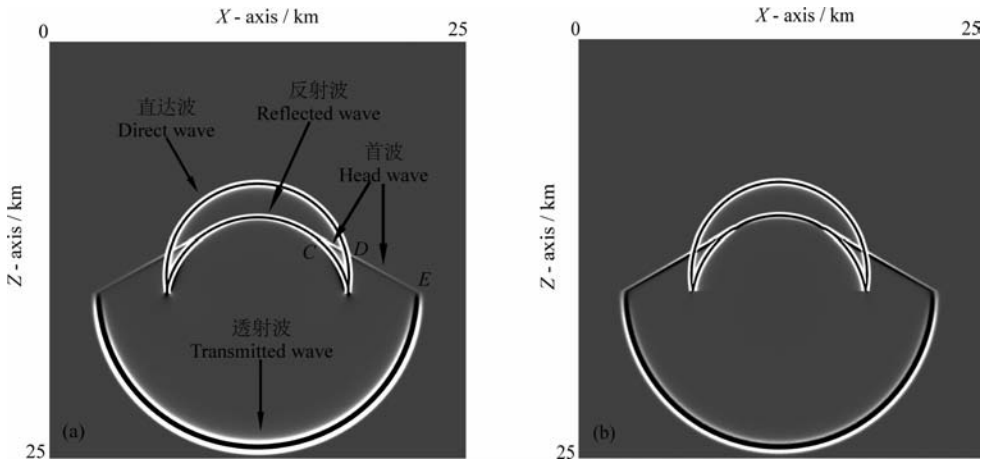


图 2 $T=2.4$ s 时刻的波场快照

(a) ONADM 方法得到的波场快照; (b) 解析解得到的波场快照.

Fig. 2 Snapshots of wave fields at $T=2.4$ s, generated by (a) the ONADM; (b) the analytical solution

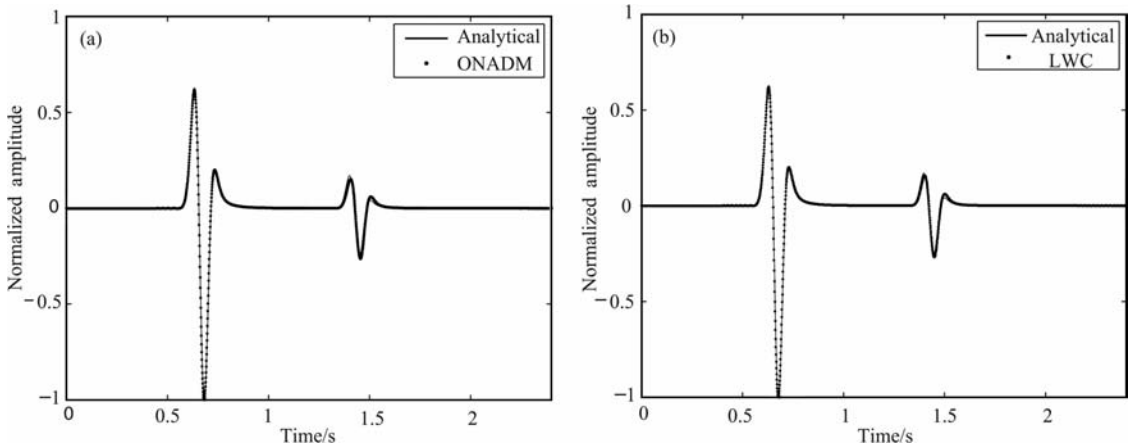


图 3 接收点(13.3 km, 12.9 km)处接收到的直达波和反射波波波形图

(a) 解析解与 ONADM 方法数值结果的比较; (b) 解析解与 4 阶 LWC 方法数值解的比较. 图中实线表示解析解,点画线表示数值解.

Fig. 3 Waveforms received at the receiver (13.3 km, 12.9 km)

(a) The comparison between analytical solution and the numerical solution computed by the ONADM; (b) The comparison between analytical solution and the numerical solution computed by the fourth-order LWC. The solid line denotes the analytical solution, and the dot line denotes the numerical solution.

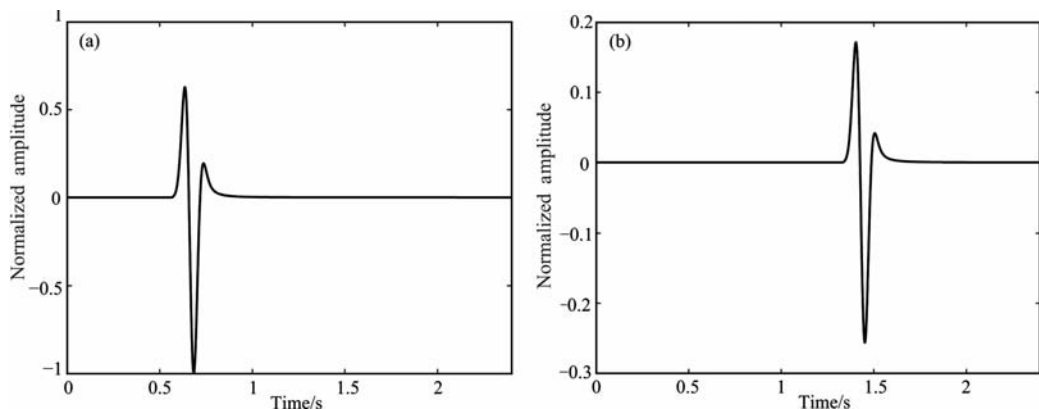


图4 在接收点(13.3 km, 12.9 km)处接收到的直达波(a)和反射波(b)

Fig. 4 The direct wave (a) and reflected wave (b) received at the receiver (13.3 km, 12.9 km)

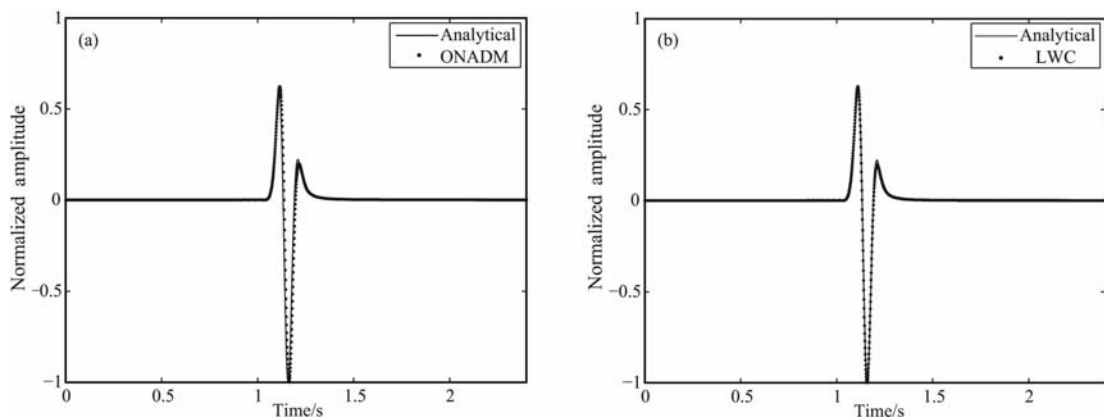


图5 接收点(13.5 km, 18 km)处接收到的透射波波形图

(a)解析解与ONADM方法的比较; (b)解析解与4阶LWC方法的比较. 其中, 实线是解析解, 点画线是数值结果.

Fig. 5 The transmitted wave received at the receiver (13.5 km, 18 km)

(a) The comparison between the analytical solution and the numerical solution computed by the ONADM; (b) The comparison between the analytical solution and the numerical solution computed by the fourth-order LWC. The solid line denotes the analytical solution, and the dot line denotes the numerical solution.

现的条件 $\frac{|x|}{R_0 \beta_1} > \frac{1}{\beta_2}$, 可以知道在接收点(13.3 km, 12.9 km)处不会接收到首波, 解析结果和数值结果的比较(图3)也证实了这一点. 图4给出了将接收点(13.3 km, 12.9 km)处接收到的解析解波响应分开显示的波形图. 其中, 图4a和4b分别是直达波响应和反射波响应波形图. 直达波到时是0.568 s, 反射波到时是1.334 s. 这与利用速度、距离和时间之间的关系直接计算得到的结果一致.

图5是位于下层介质中接收点(13.5 km, 18 km)处接收到的透射波的解析解与ONADM和4阶LWC两种数值方法计算结果的比较. 其中, 图5a和5b中的实线为解析解, 点画线是数值方法计算的结果. 图5表明, 在精细网格条件下, ONADM和LWC方法计算的数值结果与解析解一致, 这说明本文获得的透射波解析解正确.

4 结论

本文结合波动理论和Cagniard-de Hoop方法, 利用Fourier变换和Laplace变换等数学理论详细推导了二维双层介质中SH波方程的解析解, 给出了震源为脉冲线震源时的反射波解析解和透射波解析解, 同时也给出了震源为一般线震源时SH波方程解析解. 在此基础上, 我们研究了首波出现的条件, 以及直达波、反射波、首波的到时. 并利用本文给出的结果与精细网格条件下数值模拟方法(ONADM和4阶LWC)计算得到的波场和波形图进行了比较. 结果表明, 我们给出的解析解与数值解结果一致, 这说明本文给出的解析解是正确的. 这些结果有望在检验各种数值新方法的正确性、评判数值方法的优劣、以及地震波传播理论分析等方

面得到应用.

附录 SH 波方程解析解的推导过程

在本附录中,我们将采用 Cagniard-de Hoop 方法^[10]的基本思想,通过严格的数学推导给出双层均匀各向同性介质中,震源和接收点同时位于上层介质时(如图 1a 所示),单位脉冲线震源激发条件下,在上层介质中任一接收点 $A(x, z)$ 所能接收到的直达波和反射波解析解表达式. 此时入射 SH 波满足方程:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \Delta u = \delta(x, z - z_0) \delta(t), \quad (\text{A1})$$

其中 $z_0 < 0$.

通过对方程(A1)关于空间 x 做 Fourier 变换,关于时间 t 做 Laplace 变换,将空间-时间域 (x, z, t) 变到 (k_x, z, s) 域,于是在 $z < 0$ 一侧的入射波经变换后可表示为^[13]

$$\hat{u}^\wedge(k_x, z, s) = \frac{1}{2\rho_1 \beta_1^2 s \eta_1} \exp(-s \eta_1 |z - z_0|), \quad (\text{A2})$$

其中, $\eta_1 = \sqrt{1/\beta_1^2 - p^2}$, $\text{Re}(\eta_1) \geq 0$, 且 k_x, s 和 p 满足关系式 $k_x = isp$.

当波传播到 $z = 0$ 的间断面时,波的反射和透射系数分别为:

$$\dot{S} \dot{S} = \frac{\mu_2 \eta_2 - \mu_1 \eta_1}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2}, \quad (\text{A3})$$

$$\bar{u}^{\bar{r}}(x, z, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\mu_1 s \eta_1} \dot{S} \dot{S} \exp(-s \eta_1 |z + z_0|) \exp(ik_x x) dk_x, \quad (\text{A7})$$

再将(A3)代入(A7),可得

$$\bar{u}^{\bar{r}}(x, z, s) = -\frac{1}{4\pi\mu_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s \eta_1} \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \exp(-s \eta_1 |z + z_0|) \exp(ik_x x) dk_x. \quad (\text{A8})$$

由于 $k_x = isp$, η_1 和 η_2 是关于 p 的偶函数,从而 η_1 和 η_2 也是 k_x 的偶函数,所以(A8)中被积函数的实部为 k_x 的偶函数,虚部为 k_x 的奇函数,因此,有

$$\bar{u}^{\bar{r}}(x, z, s) = -\frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{s \eta_1} \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \exp(-s \eta_1 |z + z_0|) \exp(ik_x x) dk_x \right\}, \quad (\text{A9})$$

将 $k_x = isp$ 代入方程(A9)的右端,得

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\bar{r}}(x, z, s) &= -\frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Re} \left\{ \int_{+\infty}^0 \frac{i}{\eta_1} \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \exp(-s(\eta_1 |z + z_0| + px)) dp \right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Im} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\eta_1} \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \exp(-s(\eta_1 |z + z_0| + px)) dp \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

在方程(A10)中,令

$$t = \eta_1 |z + z_0| + px, \quad (\text{A11})$$

求解(A11)得到 Cagniard 路径^[13]如下:

$$\dot{S} \dot{S} = \frac{2\mu_1 \eta_1}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2}, \quad (\text{A4})$$

其中, $\eta_2 = \sqrt{1/\beta_2^2 - p^2}$, $\text{Re}(\eta_2) \geq 0$.

同样地,通过 Fourier 变换和 Laplace 变换,我们可得在 $z < 0$ 一侧所接收到的直达波和反射波,在 (k_x, z, s) 域内的解析表达式为

$$\begin{aligned} \hat{u}(k_x, z, s) &= \hat{u}^\wedge(k_x, z, s) + \hat{u}^{\bar{r}}(k_x, z, s) \\ &= \frac{1}{2\mu_1 s \eta_1} \exp(-s \eta_1 |z - z_0|) \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_1 s \eta_1} \dot{S} \dot{S} \exp(-s \eta_1 |z + z_0|) \\ &= W_1 + W_2, \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

其中, W_1 和 W_2 分别表示(A5)式中的第一项和第二项. 第一项为直达波,第二项为反射波.

对(A5)式中所表示的直达波 W_1 进行逆变换得到直达波的解析解为

$$u^{\text{直达}}(x, z, t) = \frac{1}{2\pi\mu_1} \frac{H\left(t - \frac{R}{\beta_1}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R^2}{\beta_1^2}}}, \quad (\text{A6})$$

其中, $R = \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}$. 这与 Aki 和 Ricards 在文献[13]中给出的结果一致.

下面对(A5)式中表示反射波的项 W_2 进行逆变换. 这里计算接收点 (x, z) 满足 $x \geq 0$ 的情况,根据对称性,可以得到 $x < 0$ 时的解析解.

首先对反射波项 W_2 进行 Fourier 逆变换,得到

$$p(t) = \begin{cases} \frac{tx - |z + z_0| \sqrt{\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2}}{R_0^2}, & \text{当 } t < \frac{R_0}{\beta_1} \text{ 时} \\ \frac{tx + i |z + z_0| \sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}}{R_0^2}, & \text{当 } t \geq \frac{R_0}{\beta_1} \text{ 时} \end{cases} \quad (\text{A12})$$

将(A12)代入(A11)中, 得到

$$\eta_1 = \frac{t - px}{|z + z_0|} = \begin{cases} \frac{t |z + z_0| + x \sqrt{\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2}}{R_0^2}, & \text{当 } t < \frac{R_0}{\beta_1} \text{ 时} \\ \frac{t |z + z_0| - ix \sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}}{R_0^2}, & \text{当 } t \geq \frac{R_0}{\beta_1} \text{ 时} \end{cases} \quad (\text{A13})$$

方程(A12)两边对 t 求导, 并结合(A13)式可得

$$\frac{dp}{dt} = \begin{cases} \frac{\eta_1}{\sqrt{\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2}}, & \text{当 } t < \frac{R_0}{\beta_1} \text{ 时} \\ \frac{i\eta_1}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}}, & \text{当 } t > \frac{R_0}{\beta_1} \text{ 时} \end{cases} \quad (\text{A14})$$

由方程(A11)可得, 当 $p = 0$ 时, $t = \frac{|z + z_0|}{\beta_1}$. 下面对(A10)中被积函数的虚实情况进行讨论. 因为 $\beta_1 < \beta_2$, 所以 $\frac{1}{\beta_1} > \frac{1}{\beta_2}$. 于是由方程(A13)知, 当 $t < \frac{R_0}{\beta_1}$ 时, $\eta_1 = \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - p^2}$ 为实数, 且 p 为实数, $p < \frac{1}{\beta_1}$, 而由于 $\frac{1}{\beta_1} > \frac{1}{\beta_2}$, 所以 p 未必小于 $\frac{1}{\beta_2}$, 所以此时 $\eta_2 = \sqrt{\frac{1}{\beta_2^2} - p^2}$ 未必为实数. 由(A12)知, 当 $t = \frac{R_0}{\beta_1}$ 时, $p = \frac{x}{R_0\beta_1}$. 如果 $\frac{|x|}{R_0\beta_1} \leq \frac{1}{\beta_2}$, 则当 $t < \frac{R_0}{\beta_1}$ 时, η_2 为实数; 如果 $\frac{|x|}{R_0\beta_1} > \frac{1}{\beta_2}$, 则当 $t < \frac{R_0}{\beta_1}$ 时, η_2 会出现复值. 所以下面分两种情况分别求解.

(1) 当 $\frac{|x|}{R_0\beta_1} \leq \frac{1}{\beta_2}$ 时

在这种情况下, 如果 $t < \frac{R_0}{\beta_1}$, 则 η_2 是实数. 此时, 将(A11)代入(A10)可得

$$\tilde{u}^{\bar{r}}(x, z, s) = -\frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Im} \left\{ \int_{\frac{|z+z_0|}{\beta_1}}^{+\infty} \frac{1}{\eta_1} \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \exp(-st) \frac{dp}{dt} dt \right\}, \quad (\text{A15})$$

再将(A12)–(A14)代入方程(A15)中, 并通过整理得到

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{\bar{r}}(x, z, s) &= -\frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Im} \left\{ \int_{\frac{R_0}{\beta_1}}^{+\infty} \frac{1}{\eta_1} \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \exp(-st) \frac{i\eta_1}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} dt \right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Re} \left\{ \int_{\frac{R_0}{\beta_1}}^{+\infty} \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \exp(-st) \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} dt \right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \exp(-st) \frac{H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} dt \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A16})$$

根据 Laplace 变换, 由(A16)式可得, 当 $\frac{|x|}{R_0\beta_1} \leq \frac{1}{\beta_2}$ 时, 反射波在时间-空间域的解析解为

$$u^{\bar{x}}(x, z, t) = -\frac{1}{2\pi\mu_1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \frac{H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} \right\}. \quad (\text{A17})$$

(2) 当 $\frac{|x|}{R_0\beta_1} > \frac{1}{\beta_2}$ 时

在这种情况下, 当 $0 \leq p < \frac{1}{\beta_2}$ 时, η_1 和 η_2 均为实数; 当 $\frac{1}{\beta_2} < p < \frac{|x|}{R_0\beta_1}$ 时, η_2 为纯虚数, η_1 为实数.

当 $p = \frac{1}{\beta_2}$ 时, 将其代入(A11)可得^[13]

$$t = t_h = \frac{x}{\beta_2} + |z + z_0| \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2}}. \quad (\text{A18})$$

另外, 将(A11)代入(A10)可得

$$\bar{u}^{\bar{x}}(x, z, s) = -\frac{1}{2\pi\mu_1} \operatorname{Im} \left\{ \int_{\frac{|z+z_0|}{\beta_1}}^{+\infty} \frac{1}{\eta_1} \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \exp(-st) \frac{dp}{dt} dt \right\}. \quad (\text{A19})$$

首先证明 $\frac{|z+z_0|}{\beta_1} < t_h$. 由于沿着由(A12)式所确定的路径进行积分, 当 $0 \leq t \leq \frac{R_0}{\beta_1}$ 时, p 为实数, 且 $p(t)$ 随 t 单调递增, 当 $t = 0$ 时, $p = -\frac{|z+z_0|}{R_0\beta_1}$, 当 $t = \frac{R_0}{\beta_1}$ 时, $p = \frac{x}{R_0\beta_1}$. 所以在此段路径上 t 也是随 p 单调递增的, 且根据(A11), $p = 0$ 时, $t = \frac{|z+z_0|}{\beta_1}$, 当 $p = \frac{1}{\beta_2}$ 时, $t = t_h = \frac{x}{\beta_2} + |z+z_0| \sqrt{\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2}}$, 所以 $\frac{|z+z_0|}{\beta_1}$ 比 t_h 小. 另外, 也可以根据条件 $\frac{|x|}{R_0\beta_1} \leq \frac{1}{\beta_2}$ 来证明 $\frac{|z+z_0|}{\beta_1} < t_h$.

由(A19)和(A12)–(A14)可得到

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\bar{x}}(x, z, s) = & -\frac{1}{2\pi\mu_1} \operatorname{Im} \left\{ \int_{\frac{|z+z_0|}{\beta_1}}^{t_h} \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \exp(-st) \frac{1}{\sqrt{\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2}} dt \right\} \\ & -\frac{1}{2\pi\mu_1} \operatorname{Im} \left\{ \int_{t_h}^{\frac{R_0}{\beta_1}} \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \exp(-st) \frac{1}{\sqrt{\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2}} dt \right\} \\ & -\frac{1}{2\pi\mu_1} \operatorname{Im} \left\{ \int_{\frac{R_0}{\beta_1}}^{+\infty} \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \exp(-st) \frac{i}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} dt \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

根据前述对被积函数虚实情况的讨论和(A20)中第一项的被积函数为实值函数, 所以取虚部为 0. 由此方程(A20)右端实际只包含后面两项, 再对其进行整理可得

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\bar{x}}(x, z, s) = & -\frac{1}{2\pi\mu_1} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \exp(-st) \frac{H(t - t_h) - H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\sqrt{\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2}} dt \right\} \\ & -\frac{1}{2\pi\mu_1} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\mu_1\eta_1 - \mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2} \exp(-st) \frac{H(t - \frac{R_0}{\beta_1})}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} dt \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

利用 Laplace 变换, 由(A21)式可得反射波在时间-空间域的解析解为:

$$u^{\text{反}}(x, z, t) = -\frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Im} \left\{ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \frac{H(t - t_h) - H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\sqrt{\frac{R_0^2}{\beta_1^2} - t^2}} \right\} - \frac{1}{2\pi\mu_1} \text{Re} \left\{ \frac{\mu_1 \eta_1 - \mu_2 \eta_2}{\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2} \frac{H\left(t - \frac{R_0}{\beta_1}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{R_0^2}{\beta_1^2}}} \right\} \quad (\text{A22})$$

所以, 综合表达式 (A6)、(A17)、(A22), 可以得到当震源为脉冲线震源时, 在 $z < 0$ 一侧, 接收点 (x, z) 接收到的波解析解表达式为 (3) 式。

参考文献 (References)

- [1] Dablain M A. The application of high-order differencing to the scalar wave equation. *Geophysics*, 1986, 51(1): 54-56.
- [2] Yang D H, Teng J W, Zhang Z J, et al. A nearly analytic discrete method for acoustic and elastic wave equations in anisotropic media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 2003, 93(2): 882-890.
- [3] Yang D H, Peng J M, Lu M, et al. Optimal nearly analytic discrete approximation to the scalar wave equation. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 2006, 96(3): 1114-1130.
- [4] 杨顶辉. 双相各向异性介质中弹性波方程的有限元解法及波场模拟. *地球物理学报*, 2002, 45(4): 575-583.
- Yang D H. Finite element method of the elastic wave equation and wavefield simulation in two-phase anisotropic media. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2002, 45(4): 575-583.
- [5] 王妙月, 郭亚曦, 底青云. 二维线性流变体波的有限元模拟. *地球物理学报*, 1995, 38(4): 494-506.
- Wang M Y, Guo Y X, Di Q Y. 2-D finite element modelling for seismic wave in media with linear rheological property. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1995, 38(4): 494-506.
- [6] 邓玉琼, 张之立. 弹性波的三维有限元模拟. *地球物理学报*, 1990, 33(1): 44-53.
- Deng Y Q, Zhang Z L. Three-dimensional finite element modelling of elastic waves. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1990, 33(1): 44-53.
- [7] Levander A R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms. *Geophysics*, 1988, 53(11): 1425-1436.
- [8] Komatitsch D, Barnes C, Tromp J. Simulation of anisotropic wave propagation based upon a spectral element method. *Geophysics*, 2000, 65(4): 1251-1260.
- [9] Ewing W M, Jardetzky W S, Press F. *Elastic Waves in Layered Media*. New York: McGraw-Hill Book Company Inc., 1957.
- [10] de Hoop A T. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. *Appl. sci. Res. (section B)*, 1960, 8(1): 349-356.
- [11] Bhattacharya S N. Exact solutions of SH wave equation for inhomogeneous media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 1970, 60(6): 1847-1859.
- [12] Bhattacharya S N. Exact solutions of SH wave equation in transversely isotropic inhomogeneous elastic media. *Pure and Appl. Geophys.*, 1972, 93(1): 19-35.
- [13] Aki K, Richards P G. *Quantitative Seismology*. Sausalito, Calif.: University Science Books, 2002.
- [14] 杨桂通, 张善元. *弹性动力学*. 北京: 中国铁道出版社, 1988.
- Yang G T, Zhang S Y. *Elastodynamics* (in Chinese). Beijing: China Railway Press, 1988.
- [15] Zhou H, Chen X F. Ray path of head waves with irregular interfaces. *Applied Geophysics*, 2010, 7(1): 66-73.
- [16] Cerveny V, Ravindra R. *Theory of Seismic Head Waves*. Toronto: University of Toronto Press, 1971.
- [17] 李庆扬, 王能超, 易大义. *数值分析*. 北京: 清华大学出版社, 2001.
- Li Q Y, Wang N C, Yi D Y. *Numerical Analysis* (in Chinese). Beijing: Tsinghua University Press, 2001.

(本文编辑 胡素芳)