文章编号:1007-2861(2009)01-0037-05

# Born-regulated 理论中的光线偏转

周建华， 方 伟， 陆惠卿

(上海大学 理学院,上海 200444)

**摘要**: 根据爱因斯坦的引力场理论,当光线通过引力场时受到引力的作用而发生偏转. 对光线在引力场中偏转的研究有助于解决引力透镜问题,对研究宇宙中的暗能量也是有意义的. 根据 Born-regulated 引力理论的时空度规来研究光线偏折. 推导 Born-regulated 理论中的光线偏转角为 $\Delta\varphi\approx\frac{4M}{r_{\min}}-\left(\frac{4M}{r_{\min}}\right)^4\frac{9k^2\beta}{r_{\min}^6}$. 很明显,结果显示当 $\beta\to0$ 和 $k\to0$ 时, $\Delta\varphi\to\frac{4M}{r_{\min}}$,这正是由爱因斯坦理论推导出的结果,说明当参量 $\beta\to0$ 和 $k\to0$ 时,Born-regulated 理论回到爱因斯坦的广义相对论.

**关键词**: Born-regulated 引力理论;光线偏折;爱因斯坦相对论

**中图分类号**: P 145.9 **文献标志码**: A

# Deviation of Light Path in Born-regulated Gravity in Four Dimension

ZHOU Jian-hua, FANG Wei, LU Hui-qing

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract**: Deviation of light from its straight path is caused by the presence of massive objects, *i. e.*, the presence of gravitational field according to the general theory of relativity. It is shown that the low energy effective field theory on *D*-branes is of Born-regulated gravity theories. In this work a Born-regulated type gravitational field is postulated. According to the space time metric in the Born-regulated gravity theory, An explicit representation of the angular deviation of light path is derived. A Born-regulated type theory of gravitational field is postulated, and an explicit representation of the angular deviation of light path is derived, $\Delta\varphi\approx\frac{4M}{r_{\min}}-\left(\frac{4M}{r_{\min}}\right)^4\frac{9k^2\beta}{r_{\min}^6}$. Clearly, the result shows that $\beta\to0$ and $k\to0$, $\Delta\varphi\to\frac{4M}{r_{\min}}$ which is just the result from the Einstein's general relativity theory.

**Key words**: Born-regulated gravity; deviation of light path; Einstein's general relativity theory

## 1 基本方程

计算不同引力理论中的光线偏转角并与观测值进行比较,这一直是检验不同引力理论的有效方法. 由于广义相对论成功地计算出光线在太阳引力场中的偏折并得到观测验证,从而得到了物理学家的认同. 1916 年爱因斯坦用广义相对论推出太阳的引力

收稿日期:2007-09-27

通信作者:陆惠卿(1944~),男,教授,博士生导师,研究方向为天体物理. E-mail:alberthq_lu@staff.shu.edu.cn

对光线的偏折角为 $\Delta\varphi=\frac{4GM_{\Theta}}{c^2 r}$(见图1),式中 $G$ 为引力常数,$M_{\Theta}$ 为太阳的质量,$r$ 为光线近日点与太阳中心的距离. 当光线从太阳边缘通过时,有 $r=r_{\Theta}$(太阳半径),由此可以计算出 $\Delta\varphi=1.75''$.

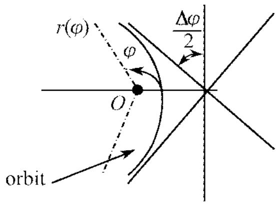


**图1 Born-regulated 理论的引力场中的光线偏转**

**Fig. 1 Deviation of fight path in gravitational field**

尽管如此,最近很多人在探索 $f(R)$ 引力理论,其中 $R$ 是 Ricci 标量,$f(R)$ 是 $R$ 的任意函数,当 $f(R)$ 取为 $R$ 时即回到标准的广义相对论理论中. 非线性 Born-Infeld 型理论已经得到广泛研究[1-10]. 在弦理论中,场的等效作用量不仅包含场梯度的平方项,还包括更高阶项,这导致了非线性的场方程. 文献[11-16]表明,低能条件下的弦理论的等效作用量是 Born-Infeld 型的[17]. 四维 Born-regulated 型引力场理论在文献[18]中有详细研究,本研究根据该文献研究的结果取其拉氏量为

$$L=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\times[R+\beta(\sqrt{1-k_1 s-k_2 R_{\mu\upsilon}R^{\mu\upsilon}-k_3 R^2}-1)],\quad(1)$$

式中,$s\equiv R^{\alpha\mu\upsilon\rho}R_{\alpha\mu\upsilon\rho}$ 是张量 $\boldsymbol{R}^{\alpha\mu\upsilon\rho}$ 的缩并. 对于 Schwarzschild 黑洞解,有 $R_{\mu\upsilon}=0$. 通过变换这个作用量,假设 $R_{\mu\upsilon}=0$ 就可以得到场方程的黑洞解. 在 $R_{\mu\upsilon}=0$ 的条件下,作用量(1)成为方程(2):

$$L=\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}[R+\beta(\sqrt{1-ks}-1)].\quad(2)$$

在 $\beta\neq0$ 时,利用条件 $s\leqslant 1/k$,作用量式(2)相应的场方程为[18]

$$R^{\alpha}_{\rho}-\frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\rho}[R+\beta(V-1)]-\frac{k\beta s^{\alpha}_{\rho}}{V}-2k\beta\nabla^{\mu}\nabla_{\upsilon}\left(\frac{R^{\alpha\upsilon}_{\rho\mu}}{V}\right)=0,\quad(3)$$

式中,

$$V=\sqrt{1-ks},\quad(4)$$

在方程(4)中的 $\beta$ 和 $k$ 是两个参数,其中 $\beta$ 的量纲是 $(\mathrm{length})^{-2}$,$k$ 的量纲是 $(\mathrm{length})^4$.

Born-regulated 型引力场理论给出球对称时空度规[18]为

$$\mathrm{d}s^2=-f^2(r)\mathrm{d}t^2+\frac{\mathrm{d}r^2}{h^2(r)}+r^2[\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2].\quad(5)$$

当 $k$ 和 $\beta$ 足够小时,$f(r)$ 和 $h(r)$ 分别为

$$f(r)=\sqrt{1-\frac{2M}{r}}[1+\phi(r)],\quad(6)$$

$$h(r)=\sqrt{1-\frac{2M}{r}}[1+\eta(r)],\quad(7)$$

式中,$M$ 是星球即引力源的质量.

令

$$\lambda=\frac{k^2\beta}{(2M)^6},\quad(8)$$

这个无量纲参量刻画了 Schwarzschild 解的扰动. 在低阶 $\lambda$ 的条件下由方程(3)通过复杂的计算得到 $\phi(r)$ 和 $\eta(r)$ 为

$$\phi(r)=\frac{-8k^2M^3\beta}{r^9}\left(\frac{8r-11M}{r-2M}\right)+o\left(\frac{k^3\beta^2M^3}{r^{11}}\right),\quad(9)$$

$$\eta(r)=\frac{-8k^2M^3\beta}{r^9}\left(\frac{36r-67M}{r-2M}\right)+o\left(\frac{k^3\beta^2M^3}{r^{11}}\right),\quad(10)$$

式中,$\eta(r)|_{r\to\infty}=\phi(r)|_{r\to\infty}=0$.

在本研究中我们忽略方程(9)和(10)中 $r^{-11}$ 及其以上的高阶项,则方程(6)和(7)变为

$$f(r)=\sqrt{1-\frac{2M}{r}}\left[1-\frac{n}{r^9}\left(\frac{8r-11M}{r-2M}\right)\right],\quad(11)$$

$$h(r)=\sqrt{1-\frac{2M}{r}}\left[1-\frac{n}{r^9}\left(\frac{36r-67M}{r-2M}\right)\right],\quad(12)$$

式中,$n=8k^2M^3\beta$. 为了方便我们这里取牛顿万有引力常数 $G=1$,光速 $c=1$.

光子在引力场中运动的轨迹,也就是它的运动学方程形式如下:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^{\mu}}-\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}}=0,\quad(13)$$

式中,$x^{\mu}$: $(t,r,\theta,\varphi)$,对应着 $\mu=1,2,3,4$. 光子的拉格朗日密度为

$$L(x^{\mu},\dot{x}^{\mu})=\frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\upsilon}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\right)^2.\quad(14)$$

把式(5)代入式(14),有

$$L=\frac{1}{2}\left[-f^2(r)\dot{t}^2+\frac{1}{h^2(r)}\dot{r}^2+r^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\right],\quad(15)$$

式中,符号“ $\dot{}$ ”代表导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$,$\tau$ 是固有时间,$t$ 是坐标

时间. 由方程(15)可知,拉格朗日密度并不显含 $\varphi$ 和 $t$,因此从方程(13)我们可以得到

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = \frac{1}{A}, \tag{16}$$

式中,$A$ 是积分常数. 很明显,这个式子表示的是角动量守恒[19].

我们还可以得出

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -f^2(r)\dot{t} = -B, \tag{17}$$

式中,$B$ 也是一个常数. 而这个式子表示能量守恒[19].

关于广义坐标 $\theta$ 的方程是

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau}(r^2\dot{\theta}) - r^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2 = 0. \tag{18}$$

根据分析力学可知,在上述球对称引力场中运动的粒子将被限制在一个平面内. 如果我们取轨道所在平面的法线为 $z$ 轴,则 $\theta = \frac{\pi}{2}$. 如此方程(15)和(16)相应地变为

$$-f^2(r)\dot{t}^2 + \frac{1}{h^2(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = 0, \tag{19}$$

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{A}. \tag{20}$$

注意,当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,$\dot{\theta} = 0$,方程(18)没有意义.

合并方程(17),(18)和(20),消去 $t$ 和 $\tau$,我们可以得到 $r$ 关于 $\varphi$ 的微分方程为

$$\frac{1}{h^2(r)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{A^2B^2r^4}{f^2(r)} - r^2. \tag{21}$$

## 2　偏转角的求解

注意到如果星体的质量为零,这时 $f(r) = h(r) = 1$. 从方程(21)中我们可以看到,这是在牛顿近似下得到的结果,这样光的轨迹方程为

$$r = \frac{r_{\min}}{\cos\varphi}, \tag{22}$$

式中,$r_{\min}$ 表示光子和引力源之间的最短距离. 在这种情况下,根据方程(22)以及条件 $\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)\Big|_{r=r_{\min}} = 0$,我们可以得到

$$r_{\min} = \frac{1}{AB}. \tag{23}$$

在 Born-regulated 理论中,我们可以猜想光的轨迹方程的表达式为如下形式(见图 1,其中 $O$ 为引力源,曲线表示的是光子的轨迹,$\Delta\varphi$ 是偏转角):

$$r = \frac{r_{\min}}{\cos\varphi + \alpha(\varphi)}, \tag{24}$$

式中,$\alpha(\varphi)$ 表示由于 Born-regulated 理论引起的修正[20-21],可以想像这个修正将会是很小的. 将方程(23)和(24)代入方程(21),并且忽略 $\alpha^2(\varphi)$ 及更高阶小量,我们可以得到关于 $\alpha(\varphi)$ 的一阶微分方程为

$$\sin\varphi\alpha'(\varphi) - \cos\varphi\alpha(\varphi) + \frac{8M}{3r_{\min}}\cos^3\varphi + \frac{72n}{r_{\min}^9} = 0. \tag{25}$$

解方程(25)得到解析解为

$$\alpha(\varphi) = \frac{72n}{r_{\min}^9}\cos\varphi - \frac{2M}{3r_{\min}}\cos^2\varphi + \frac{2M}{r_{\min}} + \frac{2M}{3r_{\min}}\cos^4\varphi. \tag{26}$$

由于 $\cos\varphi$ 很小,所以我们忽略 $\cos^2\varphi$ 及 $\cos^4\varphi$ 项,则光子的轨迹方程(24)成为

$$r = \frac{r_{\min}}{\left(1 + \frac{72n}{r_{\min}^9}\right)\cos\varphi + \frac{2M}{r_{\min}}}, \tag{27}$$

因此渐近线方程可以表示为

$$\left(1 + \frac{72n}{r_{\min}^9}\right)\cos\varphi = -\frac{2M}{r_{\min}}. \tag{28}$$

由图 1 我们也可以看出,轨迹方程的渐近线的角坐标可表示如下:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}, \tag{29}$$

式中,$\Delta\varphi$ 就是光线的偏转角. 对式(29)两边取余弦且利用泰勒展开,可得 $\cos\varphi \approx -\frac{\Delta\varphi}{2}$. 把这个结果代入方程(28),因为 $\Delta\varphi$ 很小,我们忽略 $(\Delta\varphi)^2$ 及其以上的高阶小量,可以得

$$\Delta\varphi = \frac{4M}{\left(1 + \frac{72n}{r_{\min}^9}\right)r_{\min}}. \tag{30}$$

由于 $\left(\frac{72n}{r_{\min}^9}\right)$ 是一个很小的量,我们将分母进行幂级数展开,忽略 $\left(\frac{72n}{r_{\min}^9}\right)^2$ 及其以上的高阶项,可以得到

$$\Delta\varphi \approx \frac{4M}{r_{\min}} - \frac{288nM}{r_{\min}^{10}}. \tag{31}$$

把 $n = 8k^2M^3\beta$ 代入式(31)得到

$$\Delta\varphi \approx \frac{4M}{r_{\min}} - \left(\frac{4M}{r_{\min}}\right)^4\frac{9k^2\beta}{r_{\min}^6}. \tag{32}$$

由此我们可以看出式(32)右边的第一项 $\left(\frac{4M}{r_{\min}}\right)$ 就是

爱因斯坦的结果,第二项为 Born-regulated 理论引入的修正项.

## 3 结果分析

本研究中我们推导了 Born-regulated 理论中的光线偏转角,得到的结果是

$$\Delta\varphi \approx \frac{4M}{r_{\min}} - \left(\frac{4M}{r_{\min}}\right)^4 \frac{9k^2\beta}{r_{\min}^6}.$$

很明显,上述结果显示,当 $\beta\to0$ 和 $k\to0$ 时,$\Delta\varphi\to\frac{4M}{r_{\min}}$,这正是由爱因斯坦理论推导出的结果. 这正说明当参量 $\beta\to0$ 和 $k\to0$ 时,Born-regulated 理论回到爱因斯坦的广义相对论. 如果我们取太阳为引力透镜的引力源,取 $k\sim0.01$,$\beta\sim0.01$,$r\sim6.96\times10^{10}$ cm 和 $M\sim2.05\times10^{10}$ g,我们可以得到 $\left(\frac{4M}{r_{\min}}\right)^4 \frac{9k^2\beta}{r_{\min}^6}\sim 10^{-70}$. 这说明在宇宙小尺度上(在一个恒星或黑洞附近),Born-regulated 型引力理论对广义相对论理论引起的修正非常小,目前的实验观测不可能测出如此小的修正. 然而,由于近年来宇宙加速膨胀的发现,这种理论可在宇宙学的大尺度上引起观测效应. 在基于广义相对论的标准宇宙学模型中,宇宙的加速膨胀需要引入一种负压的($\rho\sim-p$),空间分布均匀的称之为暗能量的神秘物质来提供反引力(斥力). 但是如果考虑修改爱因斯坦理论的作用量,原则上可以不引入暗能量而得到存在自加速演化阶段的修正的爱因斯坦方程,通过求解这个修正的爱因斯坦方程同样可以得到宇宙目前处在加速演化的过程中,这方面的研究目前很热烈[22-26]. 因此我们下一步的工作就是将 Born-regulated 型引力理论应用于宇宙学大尺度上,应用 Ia 型超新星、宇宙微波背景等观测数据来检验这个模型并限制其中的参数.

**参考文献:**


[1] PALATNIK D. Born-Infeld theory of gravitation: static, spherically symmetric solutions [J]. Phys Lett B, 1998, 432:287-292.

[2] PALATNIK D. Born-Infeld action for gravitational and electroweak fields [J/OL]. Quantum Physics, 2004 [2007-06-02]. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0202024v7.

[3] TAMAKI T. Black hole solutions coupled to Born-Infeld electrodynamics with derivative corrections [J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2004(5):4.

[4] CEDERWALL M. On the Dirac-Born-Infeld action for D-branes [J]. Phys Lett B, 1997, 390:148.

[5] FEIGENBAUM J A, FREUND P G O, PIGLI M. Gravitational analogues of non-linear Born electrodynamics [J]. Phys Rev D, 1998, 57:4738-4744.

[6] WIRSCHINS M, SOOD A, KUNZ J. Non-Abelian Einstein-Born-Infeld black holes [J]. Phys Rev D, 2001, 63:084002.

[7] AYÓN-BEATO E, GARCÍA A. Non-singular charged black hole solution for non-linear source [J]. Gen Rel Grav, 1999, 31:629-633.

[8] AYÓN-BEATO E, GARCÍA A. Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electro-dynamics [J]. Phys Rev Lett, 1998, 80:5056-5059.

[9] KOCHANEK C S. This limit is, however, subject to possible systematic errors, including extinction by dust in the lensing galaxy [J]. Astrophys J, 1996, 466: 638.

[10] LU H Q. Phantom cosmology with a nonlinear Born-Infeld type scale field [J]. Int J Mordern Phys D, 2005, 14:355-362.

[11] TSEYTLIN A. Vector field effective action in the open superstring theory [J]. Nucl Phys B, 1986, 276:391.

[12] WEINBERG S. Gravitation and cosmology [M]. New York: John Wiley, 1972:163-204.

[13] FRADKIN E, TSEYTLIN A. Non-linear electrodynamics from quantized strings [J]. Phys Lett B, 1985, 163: 123.

[14] BERGSHOEFF E, SEZGIN E, POPE C, et al. The Born-Infeld action from conformal invariance of the open superstring [J]. Phys Lett B, 1987, 188:70.

[15] LU H Q, HARKO T, CHENG K S. Quantum cosmology with a nonlinear Born-Infeld type scalar field [J]. Int J Mordern Phys D, 1999, 8:625.

[16] LIEBEN S. Gravitational lenses [J]. Phys Rev B, 1964, 133:835.

[17] BORN M, INFELD L. Foundations of the new field theory [J]. Proc Roy Soc, 1934, A144:425.

[18] FEIGENBAUM J A. Born-regulated gravity in four dimensions [J]. Phys Rev D, 1998, 58:124023.

[19] LU H Q, FUNG P C. Contribution of vacuum field to angular deviation of light path and radar echo delay [J]. Astrophysics and Space Science, 1997, 253(2): 291-299.

[20] 方励之,鲁菲尼 R. 相对论天体物理的基本概念[M]. 上海:上海科学技术出版社,1981:184.

[21] ZHANG K F, HUANG Z G, FANG W, et al. Deviation of light path in Born-Infeld type gravitational field [J]. Journal of Shanghai University: English Edition, 2006, 10(6):497-499.

[22] MENG X H, WANG P. Modified Friedman equations in 1/$R$ modified gravity [J]. Class Quant Grav, 2003, 20: 4949.

[23] MENG X H, WANG P. Palatini formulation of modified gravity with ln $R$ terms [J]. Phys Lett B, 2003(1): 584.

[24] CARROLL S M, DE FELICE A, DUVVURI V, et al. Cosmology of generalized modified gravity models [J]. Phys Rev D, 2005, 71(6):063513.

[25] MOVAHED M S, BAGHRAM S, RAHVAR S. Consistency of $f(r)=\sqrt{R^2-R_0^2}$ gravity with cosmological observations in the Palatini formalism [J]. Phys Rev D, 2007, 76:044008.

[26] LI B J, BARROW J D, MOTA D F. Cosmology of modified Gauss-Bonnet gravity [J]. Phys Rev D, 2007, 76:044027.

(编辑:陈海清)

·简讯·

# 我校 SCI 列全国高校 28 位,专利申请和数学学科列全国第 5、第 6 位

2008 年 12 月 9 日,在北京中国科技论文统计结果发布会上,公布了由国家科技部下达,中国科技信息研究所完成的 2007 年度中国科技论文统计结果. 我校 2007 年度发表并被收录论文共 2 422 篇,比上年增长 8%,其中国际三大检索收录论文 1 373 篇,比上年增长 9%;中国科技论文引文数据库收录论文 1 049 篇,比上年增长 7%.

在发表的国际论文中,被主要反映自然科学基础研究结果的《科学引文索引》(SCI)收录的论文共 527 篇,比上年增长 9%,全国高校排名第 28 位;被反映工程科学研究情况的《工程索引》(EI)收录的论文 507 篇,比上年增长 16%,列全国高校第 37 位;被反映我校科技工作者参与国际科技会议活动状况的《科学技术会议录索引》(ISTP)收录论文 339 篇,比上年少 5 篇,列全国高校第 32 位;同时,我校论文被引用篇次有所提高,其中《科学引文索引》(SCI)被引 383 篇 864 次,比上年增加了 182 篇 252 次,列全国高校第 33 位.

同时,在 SCI 各学科的科技论文高产机构统计中,我校数学学科名列全国高校第 6 位,全国前 5 位的单位分别是浙江大学、大连理工大学、清华大学、中国科学院数学与系统科学院和复旦大学.

此外,根据 DWPI 覆盖全球 41 个国家和地区专利的《德温特世界专利索引数据库》检索结果,我校 2007 年专利申请 394 项,继浙江大学、清华大学、上海交通大学、北京航空航天大学后名列全国高校第 5 位,反映了我校教师的创新能力和知识产权意识,这对学校发展是一个很大的激励.

(科技处)