第 19 卷 第 2 期
2013年4月
上海大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF SHANGHAI UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)
Vol. 19 No. 2
Apr. 2013
DOI: 10.3969/j.issn.1007-2861.2013.02.012

向量压缩控制与压缩单调函数

周美秀[1], 张小明[2], 严文兰[3]
(1. 浙江广播电视大学 开放与远程教育研究院, 杭州 310030;
2. 浙江广播电视大学 海宁学院, 浙江 海宁 314400; 3. 忠信中学, 广东 河源 517139)

摘要: 通过定义向量压缩控制与压缩单调函数, 给出压缩单调函数的微分判别定理, 用以克服向量控制和Schur凸凹函数的缺点. 通过实例说明, 向量压缩控制比经典的向量控制要狭窄, 压缩单调增(减)函数比Schur凸(凹)函数范围要广.

关键词: 向量控制; Schur函数; 压缩控制
中图分类号: O 174.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2861(2013)02-0170-06

Vector Compression Control and Compression Monotonic Function

ZHOU Mei-xiu[1], ZHANG Xiao-ming[2], YAN Wen-lan[3]
(1. Open and Distance Education Research Institute, Zhejiang Radio & Television University, Hangzhou 310030, China;
2. Haining College, Zhejiang Radio & Television University, Haining 314400, Zhejiang, China;
3. Zhongxin High School, Heyuan 517139, Guangdong, China)

Abstract: This paper defines vector compression control and compression monotonic function, and presents a differential distinguishing theorem of compression monotonic function to overcome the defects of vector control and the Schur convex/concave function. With an example, it is shown that vector compression control is narrower than the classical vector control, and the compression monotonic increase/decrease function is broader than the Schur convex/concave function.

Key words: vector compression; Schur function; compression control

设 $n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}$, 对于向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, 记 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}} = (\mathrm{e}^{x_1}, \mathrm{e}^{x_2}, \cdots, \mathrm{e}^{x_n})$; 对于向量$\boldsymbol{x} \in (0, +\infty)^n$, 记$\ln \boldsymbol{x} = (\ln x_1, \ln x_2, \cdots, \ln x_n)$, 则 $A(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $G(\boldsymbol{x}) = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}$, $M_p(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$ $(p \neq 0)$ 分别为 $\boldsymbol{x}$ 的算术平均、几何平均和幂平均.

1 向量控制和Schur函数定义

向量控制与Schur函数的定义详见文献[1-2].

定义 1 设向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $x_{[1]}, x_{[2]}, \cdots, x_{[n]}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 中分量的递减重排. 若对于 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{k} x_{[i]} \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} y_{[i]}, k = 1, 2, \cdots, n-1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_{[i]}$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 控制 $\boldsymbol{y}$, 记为 $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

例 1 设 $\boldsymbol{x} = (1/4, 1/2, 1/4)$, $\boldsymbol{y} = (1/3, 1/3, 1/3)$, 则 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的重排分别为 $(1/2, 1/4, 1/4)$和$(1/3, 1/3, 1/3)$, 且有 $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ 成立, 所以 $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$.

定义 2 对任意 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$ 和任意的置换矩阵 $\boldsymbol{G}$, 都有 $\boldsymbol{xG} \in \boldsymbol{H}$, 则集合 $\boldsymbol{H} \subseteq \mathbf{R}^n$称为对称的.

定义 3 对任意 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$ 和任意的置换矩阵 $\boldsymbol{G}$,都有 $\phi(\boldsymbol{xG}) = \phi(\boldsymbol{x})$, 则函数 ϕ 在 $\boldsymbol{H}$ 上称为对称的.

定义 4 设集合 $\boldsymbol{H} \subseteq \mathbf{R}^n$, $\phi: \boldsymbol{H} \to \mathbf{R}$, 任取 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}$, 当 $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ 时, 都有 $\phi(\boldsymbol{x}) \geqslant (\leqslant) \phi(\boldsymbol{y})$ 成立, 则称 ϕ 为 $\boldsymbol{H}$ 上的 Schur凸(凹)函数.

显然, 若 ϕ 是 Schur 凸函数, 当且仅当$-\phi$ 是 Schur 凹函数, 通过有关Schur凸函数的不等式反向即可得Schur凹函数的相应不等式.

定理 1 设 ϕ 是对称集$\boldsymbol{H} \subseteq \mathbf{R}^n$上的 Schur 凸(凹)

收稿日期: 2012-09-18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10971194); 浙江省教育厅科研计划资助项目(Y201223283); 浙江广播电视大学高层次人才科研基金资助项目(GRJ-08)
通信作者: 周美秀(1969—), 女, 教授, 研究方向为微分方程. E-mail: zwy950120@163.com

函数, 则 ϕ 是 $\boldsymbol{H}$ 上的对称函数.

定理 2　设集合 $\boldsymbol{H}\subseteq\mathbf{R}^n$ 是有内点的对称凸集, $\phi:\boldsymbol{H}\to\mathbf{R}$ 连续, 且在 $\boldsymbol{H}$ 中的内点都可微, 则 ϕ 为 Schur 凸函数的充分必要条件是 ϕ 在 $\boldsymbol{H}$ 上对称, 且对 $\boldsymbol{H}$ 的任意内点 x, 都有

$$(x_1-x_2)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)\geqslant 0.$$

定理 2 又称为 Schur 条件, 其作用巨大, 通过 Schur 条件可以导出一批著名不等式[3-4]. 同时，Schur 条件在控制理论和图论等研究领域也有广泛的应用. 但在使用该定理证明形如 $f(\boldsymbol{x})\geqslant(\leqslant)f(\overline{A}(\boldsymbol{x}))$ 不等式时, 不仅要求函数对称, 而且对任何 $x_i,x_j(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 都要求满足条件 $(x_i-x_j)(\partial f/\partial x_i-\partial f/\partial x_j)\geqslant(\leqslant)0$, 条件比较苛刻. 本工作将介绍一类新的向量控制方法, 以克服上述弊端.

2　向量压缩控制与压缩单调函数

为了直观地说明向量压缩控制(记为 $\succ^z$), 本研究先以如下的一个 4 维向量为例:

$$\begin{aligned}&(4.5,4,2,0)\succ^z(4.2,4,2,0.3)\succ^z\\&(4,4,2,0.5)\succ^z(3.9,3.9,2,0.7)\succ^z\\&(3.8,3.8,2,0.9)\succ^z(3.7,3.7,2,1.1)\succ^z\cdots\succ^z\\&(3.3,3.3,2,1.9)\succ^z(3.25,3.25,2,2)\succ^z\\&(3.2,3.2,2.05,2.05)\succ^z\cdots\succ^z\\&(2.625,2.625,2.625,2.625\,5).\end{aligned}$$

为了定义此控制, 还需介绍一个引理.

引理 1　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 其从大到小排列后的向量为 $\tilde{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{G}=(a_{[1]},a_{[2]},\cdots,a_{[n]})$, 其中 $a_{[1]}\geqslant a_{[2]}\geqslant\cdots\geqslant a_{[n]}$, $\boldsymbol{G}$ 为相应的置换矩阵. 若设 $a_{[1]}>a_{[n]}$, 则任取 $d\in\left[A(\boldsymbol{a}),a_{[1]}\right]$, 存在唯一的实数 c、整数 s,t, 和向量 $\tilde{\boldsymbol{a}}_d=\Big(\underbrace{d,\cdots,d}_{s个},a_{[s+1]},a_{[s+2]},\cdots,a_{[n-t]},\underbrace{c,\cdots,c}_{t个}\Big)$, 使得 $a_{[s]}\geqslant d>a_{[s+1]}\geqslant a_{[n-t]}>c\geqslant a_{[n-t+1]}$, 且 $sd+tc=a_{[1]}+a_{[2]}+\cdots+a_{[s]}+a_{[n-t+1]}+a_{[n-t+2]}+\cdots+a_{[n]}$.

证明　对于任何 $d\in\left(A(\boldsymbol{a}),a_{[1]}\right]$, 一定存在唯一的 $s\in\mathbf{N}$, 使得 $a_{[s]}\geqslant d>a_{[s+1]}$. 按照上述向量控制方法, 数 t 和 c 是存在的.

下面证明 t 和 c 是由 s 唯一确定的.

符合条件 $a_{[n-t]}>c\geqslant a_{[n-t+1]}$ 的 $tc-(a_{[n-t+1]}+a_{[n-t+2]}+\cdots+a_{[n]})$ 关于 t 严格单调增加. 另设有数对 (t_1,c_1) 且 $t_1>t$, 则有 $c_1\geqslant a_{[n-t_1+1]}>c\geqslant a_{[n-t+1]}$, 此时

$$\begin{aligned}&t_1c_1-\left(a_{(n-t_1+1)}+a_{(n-t_1+2)}+\cdots+a_{(n)}\right)-\\&\left(tc-\left(a_{[n-t+1]}+a_{[n-t+2]}+\cdots+a_{[n]}\right)\right)=\\&t_1c_1-tc-\left(a_{[n-t_1+1]}+a_{[n-t_1+2]}+\cdots+a_{[n-t+2]}\right)=\\&\left(c_1-a_{[n-t_1+1]}\right)+\left(c_1-a_{[n-t_1+2]}\right)+\cdots+\\&\left(c_1-a_{[n-t+2]}\right)+t\left(c_1-c\right)>0.\end{aligned}$$

因此, 满足 $tc-\left(a_{[n-t+1]}+a_{[n-t+2]}+\cdots+a_{[n]}\right)=a_{[1]}+a_{[2]}+\cdots+a_{[s]}-sd$ 的数对 (t,c) 是唯一的.

若 $d=A(\boldsymbol{a})$, 此时 $s=n$, $t=0$, 命题也成立.

定义 5　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 若存在 $d\in\left[A(\boldsymbol{a}),a_{[1]}\right]$, 使得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_d$ (其中 $\boldsymbol{a}_d$ 的定义见引理 1), 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 压缩控制向量 $\boldsymbol{b}$, 记为 $\boldsymbol{a}\succ^z\boldsymbol{b}$.

评注 1　对于 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 若取 $d=a_{[1]}$, 知 $\boldsymbol{a}\succ^z\boldsymbol{a}$; 若取 $d=A(\boldsymbol{a})$, 可知

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\succ^z\left(A(\boldsymbol{a}),A(\boldsymbol{a}),\cdots,A(\boldsymbol{a})\right).$$

定义 6　设集合 $\boldsymbol{D}\subseteq\mathbf{R}^n$, $f:\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}$, 任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{D}$, 当 $\boldsymbol{x}\succ^z\boldsymbol{y}$ 时, 都有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant(\leqslant)f(\boldsymbol{y})$ 成立, 则称 f 为 D 上的压缩单调增(减)函数.

评注 2　参照定义 1 和 5 易知, 当 $\boldsymbol{a}\succ^z\boldsymbol{b}$ 时, 必有 $\boldsymbol{a}\succ\boldsymbol{b}$. 若集合 $\boldsymbol{H}\subseteq\mathbf{R}^n$, $\phi:\boldsymbol{H}\to\mathbf{R}$ 为 Schur 凸(凹)函数, 则当 $\boldsymbol{a}\succ^z\boldsymbol{b}$ 时, 有 $\boldsymbol{a}\succ\boldsymbol{b}$ 和 $\phi(\boldsymbol{a})\geqslant(\leqslant)\phi(\boldsymbol{b})$, 所以 Schur 凸(凹)函数必为压缩单调增(减)函数; 反之则不然. 其实 Schur凸(凹)函数一定是对称函数, 而例 2~5 中的函数都不是对称函数(见第 3 节), 因此从范围上来说, 向量压缩控制比经典的向量控制狭窄, 压缩单调增减函数范围比Schur凸(凹)函数广.

以上定义是把文献[3-5]中所谓最值压缩定理中的调整过程更加明确化, 因此, 本研究把压缩单调函数的判定定理也称为最值压缩定理. 这里给出一个新的证明方法, 在此先介绍引理 2, 其证明可参见文献[3-5].

引理 2　设区间 $I=[m,M]\subset\mathbf{R}$, $f:I^2\to\mathbf{R}$ 的偏导数存在且连续, 若 $\boldsymbol{D}=\{(x_1,x_2)\,|m\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant M\}\subset I^2$, 则 $\partial f/\partial x_1\geqslant(\leqslant)\partial f/\partial x_2$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上恒成立的充要条件为对满足 $\boldsymbol{b}<\boldsymbol{b}+l\leqslant\boldsymbol{a}-l<\boldsymbol{a}$ 的任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in I$ 和 l, 有 $f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\geqslant(\leqslant)f(\boldsymbol{a}-l,\boldsymbol{b}+l)$.

定理 3 (最值压缩定理)　设集合 $\boldsymbol{D}\subseteq\mathbf{R}^n$ 是有内点的对称凸集, $f:\boldsymbol{D}\to\boldsymbol{R}$ 连续且存在连续偏导数,

对于$i=1,2,\cdots,n$, 记

$$\breve{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\},$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\}.$$

若 $j\neq i$ 时, 不等式 $\frac{\partial f}{\partial x_i}>(<)\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 在$\breve{\boldsymbol{D}}_i\cap\widehat{\boldsymbol{D}}_j$ 上恒成立, 则对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{a}\succ^z\boldsymbol{b}$, 都有 $f(\boldsymbol{a})\geqslant(\leqslant)f(\boldsymbol{b})$, 即 f 为压缩单调增(减)函数.

证明　这里仅证明 $f(\boldsymbol{a})\geqslant f(\boldsymbol{b})$的情形.

若 $\boldsymbol{b}=a_d\neq(A(\boldsymbol{a}),A(\boldsymbol{a}),\cdots,A(\boldsymbol{a}))$, 则下面的 d,c,s,t 如引理 1 所述. 对于函数 f, 把其中的 $a_{[s+1]},a_{[s+2]},\cdots,a_{[n-t]}$ 看成常量, 其余的变量记为 $a_{[1]},a_{[2]},\cdots,a_{[s]}$ 和 $a_{[n-t+1]},a_{[n-t+2]},\cdots,a_{[n]}$, 则它们的变化区间分别为 $[d,M]$ 和 $[-M,c]$, 其中 $d>c$, M 为充分大, 且为了记述上的方便, 仍记为 f. 记 $A(\boldsymbol{a})=A$ 为常量, 在条件 $\sum\limits_{i=1}^{s}a_{[i]}+\sum\limits_{i=n-t+1}^{n}a_{[i]}=nA-\sum\limits_{i=s+1}^{n-t}a_{[i]}=B$ 下, 利用拉格朗日方法, 考虑函数 f 的最小值问题.

若函数 f 的最小值在内点 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_s,u_{n-t+1},u_{n-t+2},\cdots,u_n)$ 取到, 则设 $u_{t_0}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\{u_i\}$, $u_{t_1}=\min\limits_{n-t+1\leqslant i\leqslant n}\{u_i\}$. 由于 $d>c$, 因此 $u_{t_0}>u_{t_1}$,

$$(u_1,u_2,\cdots,u_s,a_{[s+1]},a_{[s+2]},\cdots,a_{[n-t]},u_{n-t+1},u_{n-t+2},\cdots,u_n)\in\breve{\boldsymbol{D}}_{t_0}\cap\widehat{\boldsymbol{D}}_{t_1}.\qquad(1)$$

对于函数 $F=f+\lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{s}a_{[i]}+\sum\limits_{i=n-t+1}^{n}a_{[i]}-B\right)$, 有

$$\left.\frac{\partial F}{\partial a_{[i]}}\right|_u=\left.\left(\frac{\partial F}{\partial a_{[i]}}+\lambda\right)\right|_u=0,$$
$$i=1,2,\cdots,t,n-t+1,n-t+2,\cdots,n.$$

第 t_0 式与第 t_1 式相减后, 有

$$\left.\left(\left(\frac{\partial F}{\partial b_{t_0}}+\lambda\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial b_{t_1}}+\lambda\right)\right)\right|_u=0,$$
$$\left.\left(\frac{\partial F}{\partial b_{t_0}}-\frac{\partial F}{\partial b_{t_1}}\right)\right|_u=0,$$

这与式 (1) 和题设矛盾. 至此, 可知函数 f 的最小值在边界上取到.

变量运动过程中, 当最大变量趋于 M 时, 由引理 2 知函数值反而增大, f 的最小值点不可能落在带有分量 M 的边界上. 因此, f 的最小值点分量有 d 或 c. 下面只要把此变量相应认成 d 或 c, 考虑少一个变量的函数 f, 依上类推可知 f 的最小值点是 $\Big(\underbrace{d,d,\cdots,d}_{s\text{个}}\underbrace{c,c,\cdots c}_{t\text{个}}\Big)$, 所以有 $f(\boldsymbol{a})\geqslant f(\boldsymbol{a}_d)$.

若 $\boldsymbol{a}_d=(A(\boldsymbol{a}),A(\boldsymbol{a}),\cdots,A(\boldsymbol{a}))$, 令 $d\to A(\boldsymbol{a})$, 由于 f 的连续性, $f(\boldsymbol{a})\geqslant f(A(\boldsymbol{a}),A(\boldsymbol{a}),\cdots,A(\boldsymbol{a}))$ 成立. 证毕.

因为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\succ^z(A(\boldsymbol{a}),A(\boldsymbol{a}),\cdots,A(\boldsymbol{a}))$, 以下推论成立.

推论 1　设集合 $\boldsymbol{D}\subseteq\mathbf{R}^n$ 是有内点的对称凸集, $f:\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}$ 连续且存在连续偏导数, 对于 $i=1,2,\cdots,n$, 记

$$\breve{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\},$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\}.$$

若 $j\neq i$ 时, 不等式 $\frac{\partial f}{\partial x_i}>(<)\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 在 $\breve{\boldsymbol{D}}_i\cap\widehat{\boldsymbol{D}}_j$ 上恒成立, 则对于任意向量 $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{D}$, 都有

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqslant(\leqslant)f(A(\boldsymbol{a}),A(\boldsymbol{a}),\cdots,A(\boldsymbol{a})).$$

3　一些常见函数的压缩单调性

例 2　设 $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $p,q>1$, $1/p+1/q=1$, 则

$$f:(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in(0,+\infty)^n\to\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}a_ib_i\right)^{1/q}-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i^{1/q}$$

为压缩单调增加函数, 则 Holder 不等式 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)^{1/p}\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_ib_i\right)^{1/q}-\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i^{1/q}\geqslant0$ 成立.

例 3　设 $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $p,q>1$, $1/p+1/q=1$, 则

$$f:(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in(0,+\infty)^n\to\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^{1/p}-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\left(b_k^{1/p}+1\right)^p\right)^{1/p}$$

为压缩单调增加函数, 则有 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^{1/p}+\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/p}\geqslant\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\left(b_k^{1/p}+1\right)^p\right)^{1/p}$. 若再令 $a_k=x_k^p$, $b_k=y_k^p/x_k^p$, 整理即得 Minkowski 不等式:

$\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k+y_k)^p\right)^{1/p}$, 其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in(0,+\infty)^n$.

例 4 设 $0<p_i<1$, $i=1,2,\cdots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$, 则 $f:(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in(0,+\infty)^n\to\sum\limits_{k=1}^{n} p_k b_k-\prod\limits_{k=1}^{n} b_k^{p_k}$ 为压缩单调增加函数, 则有 $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k b_k\geqslant\prod\limits_{k=1}^{n} b_k^{p_k}$.

例 5 设 $r>s$, 则 $f:(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in(0,+\infty)^n \to\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^{r/s}\right)^{1/r}-\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/s}$ 为压缩单调增加函数, 进而有 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^{r/s}/n\right)^{1/r}\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i/n\right)^{1/s}$. 再令 $b_i=a_i^s$, 易知幂平均不等式 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^r/n\right)^{1/r}\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^s/n\right)^{1/s}$ 成立, 其中 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in(0,+\infty)^n$.

4 向量几何压缩控制与几何压缩单调函数

为了直观地说明向量几何压缩控制, 本研究先以如下的一个 4 维向量为例:

$$(9,4,3,1)\succ^z(9/1.1,4,3,1.1)\succ^z (9/1.5,4,3,1.5)\succ^z(4,4,3,9/4)\succ^z (4.1,4.1,3,36/(4.1)^2)\succ^z(\sqrt{12},\sqrt{12},3,3)\succ^z\cdots\succ^z (\sqrt[4]{108},\sqrt[4]{108},\sqrt[4]{108},\sqrt[4]{108}).$$

定义 7 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in(0,+\infty)^n$, 若

$(\ln a_1,\ln a_2,\cdots,\ln a_n)\succ^z(\ln b_1,\ln b_2,\cdots,\ln b_n)$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 几何压缩向量 $\boldsymbol{b}$, 记为 $\ln\boldsymbol{a}\succ^z\ln\boldsymbol{b}$.

评注 3 对于 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in(0,+\infty)^n$, 可知 $\ln\boldsymbol{a}\succ^z\ln\boldsymbol{a}$ 和 $\ln(a_1,a_2,\cdots,a_n)\succ^z\ln(G(\boldsymbol{a}),G(\boldsymbol{a}),\cdots,G(\boldsymbol{a}))$.

定义 8 设集合 $\boldsymbol{D}\subseteq(0,+\infty)^n$, $f:\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}$, 任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{D}$, 当 $\ln\boldsymbol{x}\succ^z\ln\boldsymbol{y}$ 时, 都有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant(\leqslant)f(\boldsymbol{y})$ 成立, 则称 f 为 $\boldsymbol{D}$ 上的几何压缩单调增(减)函数.

定理 4 (最值几何压缩定理) 设集合 $\boldsymbol{D}\subseteq(0,+\infty)^n$ 是有内点的对称凸集, $f:\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}$ 连续且存在连续偏导数, 对于 $i=1,2,\cdots,n$,记

$$\breve{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\},$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\}.$$

若 $j\neq i$ 时, 不等式 $x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}>(<)\,x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 在 $\breve{\boldsymbol{D}}_i\cap\widehat{\boldsymbol{D}}_j$ 上恒成立, 则对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{D}$ 和 $\ln\boldsymbol{a}\succ^z\ln\boldsymbol{b}$ 都有 $f(\boldsymbol{a})\geqslant(\leqslant)f(\boldsymbol{b})$, 即 f 为几何压缩单调增(减)函数.

证明 对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 定义 $\ln\boldsymbol{D}\overset{\text{def}}{=\!=}\{\ln\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}\}$ 和 $g:\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\ln\boldsymbol{D}\to f(\mathrm{e}^t)$, 有 $\frac{\partial g}{\partial t_i}-\frac{\partial g}{\partial t_j}=\mathrm{e}^{t_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}-\mathrm{e}^{t_j}\frac{\partial f}{\partial x_j}=x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}-x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

函数 g 在 $\ln\breve{\boldsymbol{D}}_i$ 和 $\ln\widehat{\boldsymbol{D}}_j$ 上满足定理 3 条件, 对于任意 $\ln\boldsymbol{a},\ln\boldsymbol{b}\in\ln\boldsymbol{D}$, 当 $\ln\boldsymbol{a}\succ^z\ln\boldsymbol{b}$ 时, 有 $g(\ln\boldsymbol{a})\geqslant(\leqslant)g(\ln\boldsymbol{b})$, $f(\boldsymbol{a})\geqslant(\leqslant)f(\boldsymbol{b})$. 定理 4 得证.

推论 2 设集合 $\boldsymbol{D}\subseteq(0,+\infty)^n$ 是有内点的对称凸集, $f:\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}$ 连续且存在连续偏导数, 对于 $i=1,2,\cdots,n$, 记

$$\breve{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\},$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\}.$$

若 $j\neq i$ 时, 不等式 $x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}>(<)\,x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 在 $\breve{\boldsymbol{D}}_i\cap\widehat{\boldsymbol{D}}_j$ 上恒成立, 则对于任意向量 $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{D}$, $\widehat{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\}$, 都有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqslant(\leqslant)f(G(\boldsymbol{a}),G(\boldsymbol{a}),\cdots,G(\boldsymbol{a}))$.

推论 3 设集合 $\boldsymbol{D}\subseteq(0,+\infty)^n$ 是有内点的对称凸集, $f:\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}$ 连续对称且存在连续偏导数, 记

$$\breve{\boldsymbol{D}}_1=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\},$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}_2=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\}.$$

若不等式 $x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}>(<)\,x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}$ 在 $\breve{\boldsymbol{D}}_1\cap\widehat{\boldsymbol{D}}_2$ 上恒成立, 则对于任意向量 $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{D}$, 都有

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqslant(\leqslant)f(G(\boldsymbol{a}),G(\boldsymbol{a}),\cdots,G(\boldsymbol{a})).$$

例 6 设 $n\geqslant3$, $n\in\mathbf{N}$, $f:\boldsymbol{a}\in(0,+\infty)^n\to(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^n-\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{n-1}$ 为几何压缩单调增函数, 进而有Janos Suranyi不等式

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n+n\prod_{i=1}^{n} a_i\geqslant\sum_{i=1}^{n} a_i\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}$$

成立.

例 6 的详细证明可参见文献 [5].

5 向量 p-幂压缩控制与 p 幂压缩单调函数

定义 9 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in(0,+\infty)^n$, $p\neq 0$, 若

$\boldsymbol{a}^p \stackrel{\text{def}}{=\!=} (a_1^p,a_2^p,\cdots,a_n^p)\succ^z \boldsymbol{b}^p \stackrel{\text{def}}{=\!=} (b_1^p,b_2^p,\cdots,b_n^p)$,
则称向量 $\boldsymbol{a}$ p-幂压缩控制向量 $\boldsymbol{b}$, 记为 $\boldsymbol{a}^p\succ^z\boldsymbol{b}^p$.

评注 4 对于 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in(0,+\infty)^n$, 可以得到

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^p\succ^z(M_p(\boldsymbol{a}),M_p(\boldsymbol{a}),\cdots,M_p(\boldsymbol{a}))^p.$$

定义 10 设 $p\neq 0$, 集合 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^p\subseteq(0,+\infty)^n$, $f:\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}$, 任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{D}$, 当 $\boldsymbol{x}^p\succ^z\boldsymbol{y}^p$ 时, 都有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant(\leqslant)f(\boldsymbol{y})$ 成立, 则称 f 为 $\boldsymbol{D}$ 上的 p-幂压缩单调增(减)函数.

定理 5 (最值p-幂压缩定理) 设 $p\neq 0$, 集合 $\boldsymbol{D}\subseteq(0,+\infty)^n$ 是有内点的对称凸集, $f:\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}$ 连续且存在连续偏导数, 对于 $i=1,2,\cdots,n$, 记

$$\breve{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\},$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\}.$$

若 $j\neq i$ 时, 不等式 $x_i^{1-p}\frac{\partial f}{\partial x_i}>(<)\,x_j^{1-p}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 在 $\breve{\boldsymbol{D}}_i\cap\widehat{\boldsymbol{D}}_j$ 上恒成立, 则对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{a}^p\succ^z\boldsymbol{b}^p$ 都有 $f(\boldsymbol{a})\geqslant(\leqslant)f(\boldsymbol{b})$, 即 f 为 p-幂压缩单调增(减)函数.

证明 设 $\boldsymbol{D}^p=\{\boldsymbol{x}^p|\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}\}$, $g(t)=f\left(t^{1/p}\right)$,

$$\frac{g(t)}{\partial t_i}=\frac{1}{p}t_i^{\frac{1-p}{p}}\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{1}{p}x_i^{1-p}\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

当 $p>0$ 时, 可知 g 在 $\breve{\boldsymbol{D}}_i^p$ 和 $\widehat{\boldsymbol{D}}_j^p$ 上满足定理 3 的条件, 因此, 对 $\boldsymbol{a}^p\succ^z\boldsymbol{b}^p$, 有 $g(\boldsymbol{a}^p)\geqslant(\leqslant)g(\boldsymbol{b}^p)$, $f(\boldsymbol{a})\geqslant(\leqslant)f(\boldsymbol{b})$.

当 $p<0$ 时, 由于 $\breve{\boldsymbol{D}}_i^p=(\widehat{\boldsymbol{D}}^p)_i$, $\widehat{\boldsymbol{D}}_j^p=(\breve{\boldsymbol{D}}^p)_j$, 所以 $\frac{g(t)}{\partial t_j}-\frac{g(t)}{\partial t_i}=\frac{1}{p}(x_j^{1-p}\frac{\partial f}{\partial x_j}-x_i^{1-p}\frac{\partial f}{\partial x_i})>0$. 由定理 3 知, 对于 $\boldsymbol{a}^p\succ^z\boldsymbol{b}^p$, 有 $g(\boldsymbol{a}^p)\geqslant g(\boldsymbol{b}^p)$ 和 $f(\boldsymbol{a})\geqslant(\leqslant)f(\boldsymbol{b})$. 得证.

若 $p=-1$, 最值 p-幂压缩定理和 p-幂压缩单调增(减)函数也可分别称为最值调和压缩定理以及调和压缩单调增(减)函数.

推论 4 设 $p\neq 0$, 集合 $\boldsymbol{D}\subseteq(0,+\infty)^n$ 是有内点的对称凸集, $f:\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}$ 连续且存在连续偏导数, 对于 $i=1,2,\cdots,n$, 记

$$\breve{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\},$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}_i=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_i=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\}.$$

若 $j\neq i$ 时, 不等式 $x_i^{1-p}\frac{\partial f}{\partial x_i}>(<)\,x_j^{1-p}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 在 $\breve{\boldsymbol{D}}_i\cap\widehat{\boldsymbol{D}}_j$ 上恒成立, 则对于任意向量 $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{D}$, 都有

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqslant f(M_p(\boldsymbol{a}),M_p(\boldsymbol{a}),\cdots,M_p(\boldsymbol{a})).$$

推论 5 $p\neq 0$, 集合 $\boldsymbol{D}\subseteq(0,+\infty)^n$ 是有内点的对称凸集, $f:\boldsymbol{D}\to\mathbf{R}$ 连续对称且存在连续偏导数, 记

$$\breve{\boldsymbol{D}}_1=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\},$$

$$\widehat{\boldsymbol{D}}_2=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_2=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x_k\}\}-\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}|x_1=x_2=\cdots=x_n\}.$$

若不等式 $x_1^{1-p}\frac{\partial f}{\partial x_1}>(<)\,x_2^{1-p}\frac{\partial f}{\partial x_2}$ 在 $\breve{\boldsymbol{D}}_1\cap\widehat{\boldsymbol{D}}_2$ 上恒成立, 则对于任意向量 $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{D}$ 和它的幂平均 $M_p(\boldsymbol{a})$, 都有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqslant f(M_p(\boldsymbol{a}),M_p(\boldsymbol{a}),\cdots,M_p(\boldsymbol{a}))$.

例 7 设 $n\geqslant 3$, $q>\frac{(n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n}$, 则 $f:\boldsymbol{a}\in(0,+\infty)^n\to qA(\boldsymbol{a})+(1-q)H(\boldsymbol{a})-G(\boldsymbol{a})$ 为调和压缩单调增加函数, 进而有

$$\frac{(n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n}A(\boldsymbol{a})+\left(1-\frac{(n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n}\right)H(\boldsymbol{a})\geqslant G(\boldsymbol{a}).\quad(2)$$

证明 经简单计算, 有

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}=\frac{q}{n}+(1-q)\frac{n}{a_1^2\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^{-1}\right)^2}-\frac{1}{na_1}G(\boldsymbol{a}),$$

$$a_1^2\frac{\partial f}{\partial a_1}-a_2^2\frac{\partial f}{\partial a_2}=(a_1-a_2)\left(\frac{q}{n}(a_1+a_2)-\frac{1}{n}G(\boldsymbol{a})\right).$$

当 $\boldsymbol{a}\in\breve{\boldsymbol{D}}_1\cap\widehat{\boldsymbol{D}}_2$ 时, 有

$$a_1^2\frac{\partial f}{\partial a_1}-a_2^2\frac{\partial f}{\partial a_2}>(a_1-a_2)\cdot\left(\frac{(n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n^2}(a_1+a_2)-\frac{1}{n}a_1^{\frac{n-1}{n}}a_2^{\frac{1}{n}}\right)=$$

$$\frac{1}{n^2}a_2(a_1-a_2)\left((n-1)^{\frac{n-1}{n}}(t+1)-nt^{\frac{n-1}{n}}\right)\stackrel{\text{def}}{=\!=}\frac{1}{n^2}a_2(a_1-a_2)g(t),$$

式中, $t=\frac{a_1}{a_2}>1$.

由于 $g'(t) = (n-1)^{\frac{n-1}{n}} - (n-1)t^{-\frac{1}{n}} = t^{-\frac{1}{n}}(n-1)^{\frac{n-1}{n}} \cdot (t^{\frac{1}{n}} - (n-1)^{\frac{1}{n}})$, 因此, g 在 $(1, n-1)$ 下降, 在 $(n-1, +\infty)$ 上升, 在 $t = n-1$ 处取最小值.

$$g(n-1) = (n-1)^{\frac{n-1}{n}}(n-1+1) - n(n-1)^{\frac{n-1}{n}} = 0.$$

至此, 已证 $a_1^2\frac{\partial f}{\partial a_1} - a_2^2\frac{\partial f}{\partial a_2} > 0$ 在 $\boldsymbol{a} \in \breve{\boldsymbol{D}}_1 \cap \widehat{\boldsymbol{D}}_2$ 成立. 由定理 5($p=-1$)可知, f 为调和压缩单调增加函数. 对于任意 $\boldsymbol{a}$ 都有 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geqslant f(M_{-1}(\boldsymbol{a}), M_{-1}(\boldsymbol{a}), \cdots, M_{-1}(\boldsymbol{a}))$, 即

$$qA(\boldsymbol{a}) + (1-q)H(\boldsymbol{a}) - G(\boldsymbol{a}) \geqslant 0.$$

再令 $q \to \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n}$, 可知式 (2) 成立.

评注 5　文献 [6] 证明了

$$\frac{n-1}{n}A(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{n}H(\boldsymbol{a}) \geqslant G(\boldsymbol{a}). \tag{3}$$

文献 [3] 设 $r = \frac{n^2}{n^2+4n-4}$, 则

$$rA(\boldsymbol{a}) + (1-r)H(\boldsymbol{a}) \geqslant G(\boldsymbol{a}). \tag{4}$$

由此可以证明 $\frac{(n-1)^{\frac{n-1}{n}}}{n} \leqslant \frac{n^2}{n^2+4n-4} \leqslant \frac{n-1}{n}$, 所以式 (2) 强于式 (3) 和 (4).

例 8　设 $r = -\frac{\ln n}{(n-1)(\ln n - \ln(n-1))}$, 则可证 $r \leqslant -1$ 和 $f: \boldsymbol{a} \in (0, +\infty) \to A(\boldsymbol{a})(M_r(\boldsymbol{a}))^{1/(n-1)} - G^{n/(n-1)}(\boldsymbol{a})$ 为 r-幂压缩单调增加函数, 进而有 $A(\boldsymbol{a})M_{1/r}^{n-1}(\boldsymbol{a}) \leqslant G^n(\boldsymbol{a}) \leqslant A^{n-1}(\boldsymbol{a})M_r(\boldsymbol{a})$.

例 8 的详细证明可参见文献 [5].

参考文献:

[1] MARSHALL A W, OLKIN I. Inequalities: theory of majorization and its applications [M]. New York: Academic Press Inc, 1979.

[2] 王伯英. 控制不等式基础 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1990.

[3] ZHANG X M, XI B Y. A new method to prove and find analytic inequalities [J]. Abstract and Applied Analysis, 2010, 12: 89-99.

[4] 张小明, 褚玉明. 解析不等式新论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2008: 217-259.

[5] 张小明. 最值定理与分析不等式 [J]. 不等式研究通讯, 2010, 17: 107-138.

[6] ALZER H. Sierpinski's inequality [J]. J Belgian Math Soc B, 1989, 41: 139-144.