doi:10.3969/j.issn.1007-2861.2010.03.007

内积空间上向量值 Padé-型逼近表的块状结构特征

苏　瑞，　潘宝珍

(上海大学 理学院,上海 200444)

摘要:从多项式空间到向量空间引入一种广义线性泛函,在内积空间上定义和构造向量值 Padé-型逼近.借助向量值 Padé-型逼近的误差公式,给出关于线性泛函的正交多项式的定义,同时推导出向量值 Padé-型逼近表的块状结构特征.利用 Padé-型逼近表的这一特征,可以减少向量值 Padé-型逼近的计算量.最后,通过数值实例说明该方法的有效性.

关键词:向量值;Padé-型逼近;正交多项式;块状结构特征

中图分类号:O 241.83　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1007-2861(2010)03-0253-04

Block Structure of Vector-Valued Padé-Type Table in the Inner Space

SU Rui,　PAN Bao-zhen

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: A vector-valued Padé-type approximation is defined in the inner space by introducing a generalized linear functional from a polynomial space to a vector space. With the error formula for vector-valued Padé-type approximation, the orthogonal polynomial with respect to a generalized linear functional is defined. The block structure of Padé-type table is derived. The structure can be used to reduce computation of Padé-type approximations. An example is given to illustrate effectiveness of the method.

Key words: vector-valued; Padé-type approximation; orthogonal polynomial; block structure

Padé-型逼近在理论物理、系统控制理论、模型简化和积分方程领域都有着广泛的应用.从1979年法国数学家 Brezinski[1] 研究了数量 Padé-型逼近开始,许多数学工作者将 Padé-型逼近理论加以发展.1983年,Draux[2] 将 Padé-型逼近从数量情形推广到非交换代数的情形,并提出矩阵 Padé-型逼近.1999年,Salam[3] 将 Padé-型逼近推广到向量情形,向量值 Padé-型逼近是借助于 Clifford 代数的方法来定义,该方法在具体计算中很难实现.2004年,顾传青[4] 引入一种从多项式空间到矩阵空间上的广义线性泛函,从而在矩阵内积的基础上构造和定义了矩阵值 Padé-型逼近.

本研究借助于向量值 Padé-型逼近的误差公式及高阶向量值 Padé-型逼近[5-7],推导出向量值 Padé-型逼近表的块状结构特征,即当向量值 Padé-型逼近的生成多项式取为关于线性泛函的正交多项式时,块状结构特征表中的逼近元素及逼近阶是完全相同的,可以利用该特征在计算高阶向量值 Padé-型逼近

收稿日期:2008-12-05
基金项目:上海市重点学科建设资助项目(J50101)
通信作者:潘宝珍(1965~),女,副教授,博士,研究方向为泛函分析. E-mail:bzpan@staff.shu.edu.cn

时减少计算量.

1 向量值 Padé-型逼近的定义与构造

向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_d)\in\mathbf{C}^d$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_d)\in\mathbf{C}^d$, $a_i,b_i\in\mathbf{C}$. 它们的内积定义为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{d}a_i b_i, \tag{1}$$

定义向量 $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_d)\in\mathbf{C}^d$ 的范数

$$\|\boldsymbol{g}^2\|=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g}^*=\sum_{i=1}^{d}|g_i|^2,$$

这里 $\boldsymbol{g}^*$ 表示 $\boldsymbol{g}$ 的复共轭.

向量 $\boldsymbol{g}$ 的广义逆(Samelson 逆)定义为

$$\boldsymbol{g}^{-1}=1/\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}^*/\|\boldsymbol{g}\|^2,\ \boldsymbol{g}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{g}\in\mathbf{C}^d.$$

设 P 是一元实系数多项式, P_k 表示 P 中次数不超过 k 的多项式的集合. 设向量 $\boldsymbol{g}$ 形式幂级数为

$$\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{c}_1z+\boldsymbol{c}_2z^2+\cdots+\boldsymbol{c}_nz^n+\cdots, \tag{2}$$

式中, $\boldsymbol{c}_i\in\mathbf{C}^d$, $z\in\mathbf{C}$.

设 $\phi:P\rightarrow\mathbf{C}^d$ 为作用在多项式空间到向量空间上的线性泛函,定义为

$$\phi(x^n)=\boldsymbol{c}_n,\ \boldsymbol{c}_n\in\mathbf{C}^d,\ n=0,1,\cdots.$$

如果 $|xz|<1$, 则有 $(1-xz)^{-1}=1+xz+(xz)^2+\cdots$. 将线性泛函作用在 $(1-xz)^{-1}$ 上,可得

$$\phi((1-xz)^{-1})=\phi(1+xz+(xz)^2+\cdots)=\boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{c}_1z+\boldsymbol{c}_2z^2+\cdots+\boldsymbol{c}_nz^n+\cdots=\boldsymbol{f}(z).$$

设 $v\in P_n$ 是次数为 n 的数量多项式,有

$$v(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n,\ b_n\neq0, \tag{3}$$

定义具有向量值系数的多项式 $\boldsymbol{W}(z)$ 为

$$\boldsymbol{W}(z)=\phi\left(\frac{v(x)-v(z)}{x-z}\right). \tag{4}$$

注意到 ϕ 是作用于多项式空间的广义线性泛函, 因而 $\boldsymbol{W}(z)$ 是关于 z 的次数为 $n-1$ 的具有向量值系数的多项式. 再令

$$\tilde{v}(z)=z^nv(z^{-1}),\ \tilde{\boldsymbol{W}}(z)=z^{n-1}\boldsymbol{W}(z^{-1}). \tag{5}$$

定理 1[5] 设 $\tilde{v}(0)\neq0$,则成立

$$\tilde{\boldsymbol{W}}(z)/\tilde{v}(z)-\boldsymbol{f}(z)=O(z^n)(z\rightarrow0).$$

定义 1 定义向量值函数 $\boldsymbol{R}_{n-1,n}(z)=\tilde{\boldsymbol{W}}(z)/\tilde{v}(z)$ 为 $(n-1,n)$ 阶向量值 Padé-型逼近, 记为 $(n-1/n)_f(z)$.

设 $\phi^{(l)}:P\rightarrow\mathbf{C}^d$ 是作用于多项式空间到向量空间的广义线性泛函, 定义为

$$\phi^{(l)}(x^k)=\boldsymbol{c}_{l+k},\ k=0,1,\cdots,\ l=m-n+1, \tag{6}$$

当 $l+k<0$ 时,规定 $\phi^{(l)}(x^k)=\boldsymbol{0}$.

设

$$\boldsymbol{W}_l(z)=\boldsymbol{\phi}^{(m-n+1)}\left(\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z})}{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}}\right), \tag{7}$$

和

$$\tilde{\boldsymbol{W}}_l(z)=z^{l-1}\boldsymbol{W}_l(z^{-1}),$$

根据构造公式(4)~(7),定义

$$\boldsymbol{P}_{mn}(z)=\tilde{v}(z)\sum_{i=0}^{m-n}\boldsymbol{c}_iz^i+z^{m-n+1}\tilde{\boldsymbol{W}}_l(z),m\geqslant n. \tag{8}$$

定理 2[5] 设 $\tilde{v}(0)\neq0$, 则成立 $\boldsymbol{P}_{mn}(z)/\tilde{v}(z)-\boldsymbol{f}(z)=O(z^{m+1})$.

定义 2 定义向量值函数 $\boldsymbol{R}_{m,n}(z)=\boldsymbol{P}_{mn}(z)/\tilde{v}(z)$ 为 (m,n) 阶向量值 Padé-型逼近, 记为 $(m/n)_f(z)$.

2 向量值 Padé-型逼近表的结构特征

由向量值 Padé-型逼近误差公式[5],有

$$\boldsymbol{f}(z)-(m/n)_f(z)=\frac{z^{m+1}}{\tilde{v}(z)}\phi^{(m-n+1)}\left(\frac{v(x)}{1-xz}\right)=\frac{z^{m+1}}{\tilde{v}(z)}(\phi^{(m-n+1)}(v)+\phi^{(m-n+1)}(xv)z+\phi^{(m-n+1)}(x^2v)z^2+\cdots). \tag{9}$$

根据 $(m/n)_f(z)$ 的构造方式可知, $(m/n)_f(z)$ 实际上取决于 n 个任意常数,为此令

$$\phi^{(m-n+1)}(x^kv(x))=0,\ k=0,1,\cdots,n-1. \tag{10}$$

定义 3 满足方程(10)的数量多项式 $v(x)$ 定义为关于广义线性泛函 $\phi^{(m-n+1)}$ 的正交多项式,由正交多项式 $v(x)$ 所确定的 $(m/n)_f(z)$,称为给定向量幂级数 $\boldsymbol{f}(z)$ 的高阶向量 Padé-型逼近.

若在式(10)中代入 $v(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n$, 施加广义线性泛函 $\phi^{(m-n+1)}$,并与向量 $\boldsymbol{c}_{m-n+1}$ 分别作内积, 得到下列线性方程组:

$$\begin{cases} b_0(\boldsymbol{c}_{m-n+1},\boldsymbol{c}_{m-n+1})+b_1(\boldsymbol{c}_{m-n+1},\boldsymbol{c}_{m-n+2})+\cdots+\\ \quad b_n(\boldsymbol{c}_{m-n+1},\boldsymbol{c}_{m+1})=0,\\ b_0(\boldsymbol{c}_{m-n+1},\boldsymbol{c}_{m-n+2})+b_1(\boldsymbol{c}_{m-n+1},\boldsymbol{c}_{m-n+3})+\cdots+\\ \quad b_n(\boldsymbol{c}_{m-n+1},\boldsymbol{c}_{m+2})=0,\\ \qquad\cdots\\ b_0(\boldsymbol{c}_{m-n+1},\boldsymbol{c}_{m})+b_1(\boldsymbol{c}_{m-n+1},\boldsymbol{c}_{m+1})+\cdots+\\ \quad b_n(\boldsymbol{c}_{m-n+1},\boldsymbol{c}_{m+n})=0. \end{cases}$$

通过上述方程组已完整建立向量值 Padé-型逼近的行列式表达式[5]. 本研究在此基础上讨论由正

交关系(10)确定的生成多项式所构造的向量值 Padé-型逼近表的分布特征.

定理 3　设 (1) $v_n(x)$满足

$$\phi^{(m-n+1)}(x^k v_n(x)) = 0, k = 0,1,\cdots,n-1,$$

而 $u_p(z)$是任一关于 z 的 p 次多项式($0\leqslant p\leqslant n$);(2) $(m/n)_f(z)$是$\boldsymbol{f}(z)$的以 $v_n(z)$为生成多项式的向量 Padé-型逼近,则向量幂级数$\boldsymbol{f}(z)$的以 $v(z) = u_p(z)v_n(z)$为生成多项式的$(m+p+h/n+p)_f(z)$向量值 Padé-型逼近满足

$$(m+p+h/n+p)_f(z) = (m/n)_f(z),$$

式中,$0\leqslant p+h\leqslant n$.

证明　由高阶向量值 Padé-型逼近的定义得

$$(m/n)_f(z) = \sum_{k=0}^{m-n}\boldsymbol{c}_k z^k + z^{m-n+1}\frac{\widetilde{\boldsymbol{W}}_l(z)}{\widetilde{v}_n(z)},$$

$$l = m-n+1. \tag{11}$$

将式中 m 换为 $m+p+h$,n 换为 $n+p$,以 $v_n(z)u_p(z)$为生成多项式,构造的向量值 Padé-型逼近,有

$$(m+p+h/n+p)_f(z) = \sum_{k=0}^{m+h-n}\boldsymbol{c}_k z^k + z^{m+h-n+1}\cdot\frac{\widetilde{\boldsymbol{W}}'(z)}{u_p\widetilde{(z)v_n}(z)} = \sum_{k=0}^{m-n}\boldsymbol{c}_k z^k + \sum_{k=m-n+1}^{m+h-n}\boldsymbol{c}_k z^k + z^{m+h-n+1}\frac{\widetilde{\boldsymbol{W}}'(z)}{u_p\widetilde{(z)v_n}(z)}, \tag{12}$$

式中,

$$\boldsymbol{W}_l(z) = \phi^{(m-n+1)}\left(\frac{v_n(x)-v_n(z)}{x-z}\right),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}'(z) &= \phi^{(m+h-n+1)}\left(\frac{v_n(x)u_p(x)-u_p(z)v_n(z)}{x-z}\right) = \\ &\phi^{(m-n+1)}\left\{x^h\frac{u_p(x)v_n(x)-u_p(z)v_n(z)}{x-z}\right\} = \\ &\phi^{(m-n+1)}\left\{\frac{v_n(x)-v_n(z)}{x-z}u_p(z)z^h - \frac{x^h-z^h}{x-z}u_p(z)v_n(z) + \frac{u_p(x)x^h-u_p(z)z^h}{x-z}v_n(x)\right\}.\end{aligned} \tag{13}$$

因为$\frac{u_p(x)x^h-u_p(z)z^h}{x-z}$是 x 的 $p+h-1<n$ 次多项式,由定理的正交条件可得

$$\phi^{(m-n+1)}\left(\frac{u_p(x)x^h-u_p(z)z^h}{x-z}v_n(x)\right) = 0. \tag{14}$$

由式(14),可推出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}'(z) &= z^h u_p(z)\phi^{(m-n+1)}\left(\frac{v_n(x)-v_n(z)}{x-z}\right) - u_p(z)v_n(z)\phi^{(m-n+1)}\left(\frac{x^h-z^h}{x-z}\right) = \\ &z^h u_p(z)\boldsymbol{W}_l(z) - u_p(z)v_n(z)\phi^{(m-n+1)}\left(\sum_{k=0}^{h-1}x^{h-1-k}z^k\right).\end{aligned} \tag{15}$$

注意到泛函只作用在 x 上,观察式(13)发现,$\boldsymbol{W}'(z)$实际上是关于 z 的 $n+p-1$ 次多项式,即

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}'(z) = z^{n+p-1}\boldsymbol{W}'(z^{-1}),$$

于是,有

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{W}}'(z) &= z^{n+p-1}\{z^{-h}u_p(z^{-1})\boldsymbol{W}_l(z^{-1}) - u_p(z^{-1})v_n(z^{-1})\cdot \\ &\phi^{(m-n+1)}(\sum_{k=0}^{n-1}x^{p-1-k}z^{-k})\} = \\ &z^{-h}\{\widetilde{u}_p(z)\widetilde{\boldsymbol{W}}_l(z) - \widetilde{u}_p(z)\widetilde{v}_n(z)\cdot \\ &\phi^{(m-n+1)}(\sum_{k=0}^{h-1}(xz)^k)\},\end{aligned} \tag{16}$$

式中,$\widetilde{u}_p(z) = z^{-h}u_p(z^{-1})$, $\widetilde{v}_n(z) = z^{-n}v_n(z^{-1})$.

再将式(16)的 $\widetilde{\boldsymbol{W}}'(z)$代入式(12),得

$$\begin{aligned}(m+p+h/n+p)_f(z) &= \sum_{k=0}^{m-n}\boldsymbol{c}_k z^k + \sum_{m-n+1}^{m+h-n}\boldsymbol{c}_k z^k + \\ &\frac{z^{m+h-n+1}}{\widetilde{u}_p(z)\widetilde{v}_n(z)}\left\{z^{-h}\left\{\widetilde{u}_p(z)\widetilde{\boldsymbol{W}}_l(z) - \widetilde{u}_p(z)\widetilde{v}_n(z)\phi^{(m-n+1)}\left(\sum_{k=0}^{h-1}(xz)^k\right)\right\}\right\} = \\ &\sum_{k=0}^{m-n}\boldsymbol{c}_k z^k + \sum_{k=m-n+1}^{m+h-n}\boldsymbol{c}_k z^k + z^{m-n+1}\frac{\widetilde{\boldsymbol{W}}_l(z)}{\widetilde{v}_n(z)} - \\ &\sum_{m-n+1}^{m+h-n}\boldsymbol{c}_k z^k = (m/n)_f(z).\end{aligned} \tag{17}$$

注解 1　只有在给定生成多项式且此生成多项式是有正交关系确定的条件下,定理 3 成立.

例　当 $m=3$, $n=2$, 即 $m-n+1=2$ 时,设 $v_2(z) = b_0+b_1z+b_2z^2$(不妨设 $b_2=1$),令

$$\begin{cases}\phi^{(2)}(v_2(x)) = b_0\boldsymbol{c}_2 + b_1\boldsymbol{c}_3 + \boldsymbol{c}_4 = 0, \\ \phi^{(2)}(xv_2(x)) = b_0\boldsymbol{c}_3 + b_1\boldsymbol{c}_4 + \boldsymbol{c}_5 = 0.\end{cases} \tag{18}$$

对方程组(18)中的每一个方程分别与向量 $\boldsymbol{c}_2$ 作内积,所求得的形式正交多项式为 $v_2(z)$. 记$(3/2)_f(z)$是以 $v_2(z)$为生成多项式的 Padé-型逼近,则

由定理3得

$$(3+p+h/2+p)_f(z) = (3/2)_f(z),$$
$$0 \leqslant p+h \leqslant 2,$$

式中,$(3+p+h/2+p)_f(z)$是以$u_p(z)v_2(z)$为生成多项式的Padé-型逼近,$u_p(z)$是任意p次多项式($0 \leqslant p \leqslant 2$).如此得到向量值Padé-型逼近表块状结构特征,即如下的逼近元素相同(逼近阶也完全相同):

$$(3/2)_f(z),$$
$$(4/2)_f(z)(4/3)_f(z),$$
$$(5/2)_f(z)(5/3)_f(z)(5/4)_f(z).$$

注解2　若要计算$(5/4)_f(z)$,根据注解1,只要计算$(3/2)_f(z)$.这样减少了向量值Padé-型逼近的计算量,但逼近阶却达到$O(z^6)$.

例1　考察控制论中的向量指数函数

$$\boldsymbol{f}(z) = \mathrm{e}^{z\boldsymbol{A}} = (1,0,0,1)^{\mathrm{T}} + (0,1,0,-2)^{\mathrm{T}}z + (0,-1,0,2)^{\mathrm{T}}z^2 + (0,2/3,0,-4/3)^{\mathrm{T}}z^3 + (0,1/3,0,2/3)^{\mathrm{T}}z^4 + (0,2/15,0,4/15)^{\mathrm{T}}z^5 + \cdots,$$

式中,$\boldsymbol{A} = (0,1,0,-2)^{\mathrm{T}}$.求$(5/4)_f(z)$.

解　当把向量值Padé-型逼近$(5/4)_f(z)$的生成多项式取为正交多项式$\tilde{v}_2(z)$时,根据定理2,只需计算$(3/2)_f(z)$,其分子、分母分别计算[5]如下:

$$\tilde{v}_2(z) = \det\begin{bmatrix} (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_2) & (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3) & (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_4) \\ (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3) & (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_4) & (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_5) \\ z^2 & z & 1 \end{bmatrix} = (-1/9)(21z^2+48z+55),$$

$$\boldsymbol{P}_{32}(z) = \det\begin{bmatrix} (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_2) & (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3) & (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_4) \\ (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3) & (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_4) & (\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_5) \\ \boldsymbol{c}_0z^3+\boldsymbol{c}_1z^2 & \boldsymbol{c}_0z+\boldsymbol{c}_1z^2+\boldsymbol{c}_2z^3 & \boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{c}_1z+\boldsymbol{c}_2z^2+\boldsymbol{c}_3z^3 \end{bmatrix} =$$
$$(-1/9)(21z^2+48z+55,(29/3)z^3-7z^2+55z, 0,(-58/3)z^3+35z^2-62z+55)^{\mathrm{T}}.$$

易验证$(3/2)_f(z) = (5/4)_f(z) = \boldsymbol{P}_{32}(\mathrm{z})/\tilde{v}_2(z)$.

参考文献:

[1] BREZINSKI C. Padé-type approximation and general orthogonal polynomials [M]. Basel: Birkhäuser, 1980.

[2] DRAUX A. Approximants de type Padé et de Padé [M]. Lille: Universié des Science et Technologies de Lille, 1983:1-89.

[3] SALAM A. Vector Padé-type approximants and vector Padé Approximants [J]. J Approximation Theory, 1999, 97(1):92-112.

[4] GU C Q. Matrix Padé-type approximant and directional matrix in the inner product space [J]. J Comput Appl Math, 2004, 164/165:365-385.

[5] LI C J. A new vector-valued Padé-type approximation in the inner space [J]. Numer Math J Chinese Univ: English Series, 2006, 15(2):127-136.

[6] 潘宝珍.用于积分方程解的函数值Padé-型逼近的恒等式与递推算法[J].应用科学学报,2006,24(1):74-77.

[7] GU C Q, PAN B Z, WU B B. Orthogonal polynomials and determinant formulas of function-valued Padé-type approximation using for solution of integral equations [J]. Appl Math Mech: Engl Ed, 2006, 27(6):853-860.

(编辑:孟庆勋)