第16卷第3期
2010年6月
上海大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF SHANGHAI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)
Vol. 16 No. 3
Jun. 2010

doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2010.03.010

极小子群及4阶循环子群的半覆盖远离性

张方锁， 郭秀云

(上海大学 理学院,上海 200444)

摘要: 群 G 的一个子群 H 称为在 G 中具有半覆盖远离性,如果存在 G 的一个主群列 $1=G_0<G_1<\cdots<G_l=G$,使得对每一个 $j=1,2,\cdots,l$,或者 H 覆盖 G_j/G_{j-1},或者 H 远离 G_j/G_{j-1}. 利用极小子群及4阶循环子群具有半覆盖远离性的性质,得到一些新的关于有限群为幂零群或超可解群的充分必要条件,推广了以前的结论.

关键词: 半覆盖远离性;极小子群;幂零群;超可解嵌入子群;超可解群

中图分类号: O 152.1　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1007-2861(2010)03-0268-04

Minimal Subgroups and Cyclic Subgroups of Order 4 with Semi-Cover-Avoiding Property

ZHANG Fang-suo, GUO Xiu-yun

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: A subgroup H is said to be semi-cover-avoiding in a group G if there is a chief series $1=G_0<G_1<\cdots<G_l=G$ such that for every $j=1,2,\cdots,l$, either H covers G_j/G_{j-1} or H avoids G_j/G_{j-1}. In this paper, some new necessary and sufficient conditions for a finite group G to be nilponent or supersolvable are given by using minimal subgroups and cyclic subgroups of order 4 with semi-cover-avoiding property in the group. Some known results are generalized.

Key words: semi cover-avoiding property; minimal subgroup; nilpotent group; supersolvble group; supersolvble embedding group

通过极小子群的性质研究有限群的结构成为近年来人们感兴趣的课题之一,新的研究成果层出不穷. Itô 曾经证明:如果对某个奇素数 p,有限群 G 的每个 p 阶子群均在 G 的中心,那么 G 是 p-幂零的. 此后,研究人员从各个方面来推广这一结果. Wang[1] 引入 c-正规的概念,并证明若群 G 的极小子群及4阶循环子群在 G 中 c-正规,则 G 是超可解. 樊恽等[2]引入半覆盖远离性(覆盖远离性和 c-正规性二者的推广),并证明若有限群 G 的极小子群及4阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性,则 G 是超可解的. 本研究在上述研究的基础上,分别考虑有限群 G 的每个极小子群含于 G 的超中心和含于 G 的最大超可解嵌入子群,而4阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性的情况,得到一些新的结果,推广了上述 Itô 定理和文献[3]的一些结论.

本文涉及的群均为有限群,p, q 表示素数, $\pi(G)$ 表示群 G 阶的所有素因子的集合.

收稿日期:2008-11-28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771132);上海大学研究生创新基金资助项目
通信作者:郭秀云(1956~),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为有限群. E-mail: xyguo@shu.edu.cn

1　基本引理

如果 M 和 N 都是群 G 的正规子群且 $N\subseteq M$,则称商群 M/N 为 G 的正规因子. 显然,G 的每个主因子均为正规因子. 设 H 是群 G 的一个子群,M/N 为 G 的正规因子,如果 $H\cdot M=H\cdot N$,则称 H 覆盖 M/N;当 $H\cap M=H\cap N$ 时,则称 H 远离 M/N.

定义 1[2]　设 H 是群 G 的一个子群,如果存在群 G 的一个主群列 $1=G_0<G_1<\cdots<G_l=G$,使得对每一个 $j=1,2,\cdots,l$,或者 H 覆盖 G_j/G_{j-1},或者 H 远离 G_j/G_{j-1},则称 H 在 G 中具有半覆盖远离性.

定义 2[4]　设 G 为有限群,记 $SE(G)$ 为 G 的最大超可解嵌入子群,它是 G 中一切超可解嵌入子群之积.

引理 1[5]　设 H 是群 G 的一个子群. 如果 H 在群 G 中具有半覆盖远离性,那么对任意满足 $H\leqslant K\leqslant G$ 的子群 K,H 在群 K 中具有半覆盖远离性.

引理 2[6]　设 p 是 $|G|$ 的最小素因子,$P\in Syl_p(G)$,且 P 循环,则 G 有正规 p-补.

引理 3[6]　设 H 是群 G 的一个子群,$N\trianglelefteq G$. 若 $N\leqslant\Phi(H)$,则 $N\leqslant\Phi(G)$.

引理 4[7]　若 G 为内 p-幂零群,则

(1) $G=P\rtimes Q$,P 是 G 的 Sylow p-子群,Q 是 G 的非正规 Sylow q-子群,且 Q 是循环的,$P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群;

(2) 当 $p>2$ 时,$\exp(P)=p$;当 $p=2$ 时,$\exp(P)\leqslant 4$;

(3) 若 P 为 Abel 群,则 P 为初等 Abel 群;

(4) $c\in P\backslash\Phi(P)$ 当且仅当 $[c,b]\neq 1$,其中 b 是 Q 的生成元;

(5) $Z(G)=\Phi(G)=\Phi(P)\times\Phi(Q)$.

引理 5[7]　G 为内超可解群,则

(1) $G=P\rtimes M$,P 是 G 的 Sylow p-子群,M 是超可解的,$P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群,且 P 是非循环的;

(2) 当 $p>2$ 时,$\exp(P)=p$;当 $p=2$ 时,$\exp(P)\leqslant 4$,此时 G 为内幂零群;

(3) 若 P 为 Abel 群,则 P 为初等 Abel 群;

(4) 若 P 为非 Abel 群,则 $\Phi(P)=Z(P)=P'$;

(5) 存在 $x\in P\backslash\Phi(P)$,使得 $\langle x\rangle\ntrianglelefteq G$.

2　主要结果及证明

引理 6　设 $p\in\pi(G)$,且 G 为内 p-幂零群,P 是 G 的 Sylow p-子群,若存在 $x\in P\backslash\Phi(P)$,使 $\langle x\rangle$ 在 G 中具有半覆盖远离性,则 $P=\langle x\rangle$.

证明　因 G 为内 p-幂零群,由引理 4 可知,P 是 G 的正规子群,且 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群. 由假设条件知,$\langle x\rangle$ 在 G 中具有半覆盖远离性,从而存在 G 的一个主群列 $1=G_0<G_1<\cdots<G_l=G$,使得对每一个 $j=1,2,\cdots<l$,$\langle x\rangle$ 或者覆盖 G_j/G_{j-1},或者远离 G_j/G_{j-1}. 由于 $x\in G$,所以存在正整数 k,使得 x 不属于 G_k,但 $x\in G_{k+1}$,于是 $G_k\cap\langle x\rangle\neq G_{k+1}\cap\langle x\rangle$,从而 $\langle x\rangle$ 覆盖 G_{k+1}/G_k,即 $G_k\langle x\rangle=G_{k+1}\langle x\rangle=G_{k+1}$. 由 $P\cap G_k\trianglelefteq G$ 和 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群,有 $(P\cap G_k)\Phi(P)=\Phi(P)$ 或 P. 如果 $(P\cap G_k)\Phi(P)=P$,则 $P\cap G_k=P$,这与 $x\notin P\cap G_k$ 矛盾. 故 $(P\cap G_k)\Phi(P)=\Phi(P)$,从而 $P\cap G_k\leqslant\Phi(P)$. 再考虑 G 的正规子群 $(P\cap G_{k+1})\Phi(P)$,则有 $P=(P\cap G_{k+1})\Phi(P)=(P\cap\langle x\rangle G_k)\Phi(P)=\langle x\rangle(P\cap G_k)\Phi(P)=\langle x\rangle$.

定理 1　设 N 是群 G 的正规子群,且 G/N 为 p-幂零群. 若 N 的每个 p 阶子群含于 $Z_\infty(G)$,且当 $p=2$ 时,4 阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性,则 G 是 p-幂零群.

证明　若定理不成立,设 G 为极小阶反例.

(1) G 是内 p-幂零群.

设 K 是 G 的任意真子群,则 $K\cap N\trianglelefteq K$,$K/K\cap N\cong KN/N\leqslant G/N$ 为 p 幂零群. 由引理 1 及假设条件可知,$K\cap N$ 的每个 p 阶子群包含于 $Z_\infty(G)\cap KZ_\infty(K)$. 当 $p=2$ 时,它的 4 阶循环子群在 K 中具有半覆盖远离性,从而 K 满足定理假设条件. 由 G 阶的极小性,可知 K 是 p-幂零群,从而 G 是内 p-幂零群.

(2) $p=2$,且 $\exp(P)=4$,P 非循环.

由(1)知 G 是内 p-幂零群,根据引理 4 的性质,可知 $G=P\rtimes Q$,P 是 G 的 Sylow p-子群,Q 是 G 的非正规 Sylow q-子群,$P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群,且当 $p>2$ 时,$\exp(P)=p$;当 $p=2$ 时,$\exp(P)\leqslant 4$. 由 G/N 是 p-幂零的,可以断言 $P\leqslant N$. 事实上,由 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群,可知 $\Phi(P)(P\cap N)=P$ 或 $\Phi(P)$. 若 $\Phi(P)(P\cap N)=\Phi(P)$,则 $P\cap N\leqslant\Phi(P)$,因为 $G/(P\cap N)\lesssim G/N\times G/P$ 为 p-幂零群,故 $G/\Phi(P)$ 为 p-幂零群. 由引理 3 知 $\Phi(P)\leqslant\Phi(G)$,从而 $G/\Phi(G)$ 为 p-幂零群,故 G 是 p-幂零群,矛盾. 故必有 $P\cap N=P$,即 $P\leqslant N$. 若 $\exp(P)=p$,由假设条件知 $P\leqslant Z_\infty(G)$. 又 $G/P\cong Q$

为幂零群,故 $G/Z_\infty(G)$ 为幂零群,从而 G 为幂零群,矛盾. 所以必有 $p=2$,且 $\exp(P)=4$. 若 P 是循环,由引理2可知,G 是 p-幂零群,矛盾,从而 P 非循环.

(3) 对任意的 $x\in P\backslash\Phi(P)$,则 $o(x)=4$.

若否,设存在 $x\in P\backslash\Phi(P)$,使得 $o(x)=2$. 令 $M=\langle x\rangle^G$,则 $M\leqslant P$ 且 $1<M\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$. 由 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群,可知 $P=M\Phi(P)=M$. 又对任意的 $g\in G$,a^g 是2阶元,由假设条件可知 $a^g\in \mathbf{Z}_\infty(G)$,从而 $P=M\leqslant Z_\infty(G)$. 又 G/P 为幂零群,故 $G/Z_\infty(G)$ 为幂零群,从而 G 为幂零群,矛盾.

(4) 导出矛盾.

设 $x\in P\backslash\Phi(P)$,则 $o(x)=4$. 由假设条件知 $\langle x\rangle$ 在 G 中具有半覆盖远离性,根据引理6,可知 $P=\langle x\rangle$,即 P 是循环群,这与(2)中的 P 非循环矛盾. 证毕.

推论1 $p\in\pi(G)$ 且群 G 的每个 p 阶子群含于 $Z_\infty(G)$,进一步,当 $p=2$ 时,4阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性,则 G 是 p-幂零群.

推论2 设 N 是群 G 的正规子群,G/N 为幂零群. 若 N 的每个极小子群含于 $Z_\infty(G)$,且4阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性,则 G 是幂零群.

推论3 若群 G 的每个极小子群含于 $Z_\infty(G)$,且4阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性,则 G 是幂零群.

根据推论2,若 $N=G^N$,可以得到一个幂零群的判别准则,这里 G^N 为群 G 的幂零剩余.

定理2 设 G^N 为群 G 的幂零剩余,则 G 是幂零群当且仅当 G^N 的每个极小子群含于 $Z_\infty(G)$,且4阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性.

证明 由推论2可知充分性显然成立. 若 G 是幂零群,则此时 $G^N=1$,$Z_\infty(G)=G$,则 G^N 的每个子群在 G 中具有半覆盖远离性. 从而必要性也成立.

推论4[5] 设 G 为一有限群,G^N 为 G 的幂零剩余,则 G 是幂零群当且仅当 G^N 的每个极小子群含于 $Z_\infty(G)$,且4阶循环子群在 G 中 c-正规.

定理3 设群 $G=AB$,其中 A,B 为 G 的 Hall 子群. 如果 A 与 B 的每个极小子群含于 $Z_\infty(G)$,且 G 的4阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性,则 G 是幂零群.

证明 设 L 为 A 的任意一个极小子群,由题设可知,$L\leqslant Z_\infty(G)\cap A\leqslant Z_\infty(A)$. 由引理1可知,$A$ 中的4阶循环子群在 A 中具有半覆盖远离性. 根据推论3可得 A 为幂零群,同理可证 B 也为幂零群,因而 $G=AB$ 为可解群. 令 H 为 G 的任意一个极小子群,因为 A,B 为 G 的 Hall 子群,则存在 $g\in G$,使得 $H^g\leqslant A$ 或 $H^g\leqslant B$. 根据题设可知 $H^g\leqslant Z_\infty(G)$,从而 $H\leqslant Z_\infty(G)$. 再由推论3可得,G 是幂零群.

因为 $Z_\infty(G)\leqslant SE(G)$,下面考虑 G 的每个极小子群含于 $SE(G)$,且4阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性的情况,得到下述定理.

定理4 设 N 是群 G 的正规子群,G/N 为超可解群. 若 N 的每个极小子群含于 $SE(G)$,且4阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性,则 G 为超可解群.

证明 若定理不成立,设 G 为极小阶反例,则

(1) G 是内超可解群.

设 K 是 G 的任意的真子群,则 $K\cap N\trianglelefteq K$,$K/K\cap N\cong KN/N\leqslant G/N$ 为超可解群. 因为 $K\cap N$ 的每个极小子群包含于 $SE(G)\cap K$,而 $SE(G)\cap K$ 为 K 的超可解嵌入子群,又 $SE(K)$ 为 K 的最大超可解嵌入子群,所以 $SE(G)\cap K\leqslant SE(K)$. 由引理1知 $K\cap N$ 的4阶循环子群在 K 中具有半覆盖远离性,从而 K 满足假设条件. 由 G 阶的极小性,可知 K 为超可解群,从而 G 是内超可解群.

(2) $P\leqslant N$.

由(1)知 G 为内超可解群,则 G 满足引理5中的(1)~(5)条件. 由 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群,又 $P\cap N\trianglelefteq G$,故 $(P\cap N)\Phi(P)=P$ 或 $\Phi(P)$. 若 $(P\cap N)\Phi(P)=\Phi(P)$,则 $P\cap N\leqslant\Phi(P)$. 由 $G/P\cong M$ 为超可解和 $G/(P\cap N)\lesssim G/P\times G/N$,可知 $G/P\cap N$ 为超可解群,故 $G/\Phi(P)$ 超可解. 故 $G/\Phi(G)$ 超可解,从而 G 超可解,矛盾. 则 $(P\cap N)\Phi(P)=P$,即 $P\cap N=P$,从而 $P\leqslant N$.

(3) G 为 2^aq^b 阶的内2-幂零群.

若 $\exp(P)=p$,由假设条件和(2)知 $P\leqslant SE(G)$,又 G/P 为超可解,故 G 超可解,矛盾. 所以必有 $p=2$,$\exp(P)=4$. 此时由引理5的(2)知 G 是内幂零群,即 G 为 2^aq^b 阶的内2-幂零群.

(4) 对任意的 $x\in P\backslash\Phi(P)$,则 $o(x)=4$.

若否,设存在 $x\in P\backslash\Phi(P)$,使得 $o(x)=2$. 令 $T=\langle x\rangle^G$,则 $T\leqslant P$ 且 $1<T\Phi(P)/\Phi(P)\leqslant G/\Phi(P)$. 由 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群,可知 $P=T\Phi(P)=T$. 又对任意的 $g\in G$,a^g 是2阶元,由假设条件可知 $a^g\in SE(G)$,从而 $P=T\leqslant SE(G)$. 又 G/P 为超可解,故 G 超可解,矛盾.

(5) 导出矛盾.

设 $x\in P\backslash\Phi(P)$,则 $o(x)=4$,由条件知,$\langle x\rangle$ 在 G 中具有半覆盖远离性. 由引理6 可知 $P=\langle x\rangle$,即 P 是循环群. 由引理 5 的(1)知 P 是非循环的,矛盾.

推论 5　若群 G 的每个极小子群含于 $SE(G)$,且 4 阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性,则 G 为超可解群.

注:若定理 4 中的假设条件不变,不能推出 G 是幂零群. 例如,群 $G=S_3$,取 N 为 S_3 的正规的 Slyow 3-子群,满足定理 4 的假设条件,但 S_3 不是幂零群.

根据文献[2]中的结论:群 G 是超可解当且仅当 G 的每个子群在 G 中具有覆盖远离性,因为覆盖远离性蕴含着半覆盖远离性,可以得到一个超可解群的判别准则.

定理 5　设 G 为群,则 G 是超可解群当且仅当 G 的每个极小子群含于 $SE(G)$,且 4 阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性.

证明　由推论 5 知充分性显然成立. 若 G 是超可解群,则 $SE(G)=G$,由超可解群的每个子群都具有半覆盖远离性,可知必要性也是成立的.

定理 6　设群 $G=AB$,其中 A,B 为 G 的 Hall 子群,且 A,B 中有一个为 G 的正规子群. 如果 A 与 B 的每个极小子群含于 $SE(G)$,且 G 的 4 阶循环子群在 G 中具有半覆盖远离性,则 G 为超可解群.

证明　设 N 为 A 的极小子群,由题意可知 $N\leqslant SE(G)\cap A\leqslant SE(A)$. 由引理 1 可知,$A$ 中的 4 阶循环子群在 A 中具有半覆盖远离性,根据推论 5 可得 A 为超可解群. 同理可证 B 也为超可解群. 不妨设 $A\trianglelefteq G$,则 $AB/A\cong B$ 超可解,故 $G=AB$ 为可解群. 令 L 为 G 的任意一个极小子群,因为 A,B 为 G 的 Hall 子群,则存在 $g\in G$,使得 $L^g\leqslant A$ 或 $L^g\leqslant B$. 根据题意可知 $L^g\leqslant SE(G)$,从而 $L\leqslant SE(G)$. 再由推论 5 可得,G 为超可解群.

参考文献:

[1] WANG Y M. *C*-normality of groups and its properties [J]. Journal of Algebra, 1996, 180:954-965.

[2] 樊恽,郭秀云,岑嘉评. 关于子群的两种广义正规性的注记[J]. 数学年刊,2006,27A(2):169-176.

[3] 王燕鸣. 极小子群对有限群结构的影响[J]. 数学学报,2001,44(2):197-200.

[4] WEINSTEIN M. 幂零与可解之间[M]. 张远达,译. 武汉:武汉大学出版社,1988.

[5] GUO X Y, GUO P F, SHUM K P. On semi cover-avoiding subgroups of finite groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2007, 209:151-158.

[6] 徐明曜. 有限群导引(上,下)[M]. 北京:科学出版社,2001.

[7] 陈重穆. 内外-Σ 群与极小非 Σ 群[M]. 重庆:西南师范大学出版社,1988.

(编辑:孟庆勋)