doi: 10.3969/j. issn. 1007-2861. 2010. 04. 013

迷向面积测度与凸体的投影

司　林

(北京林业大学 理学院,北京 100083)

摘要: 凸体的迷向面积测度与其投影的极值问题密切相关. 首先讨论两个凸体具有迷向面积测度时,其 Blaschke 和的投影问题;然后就凸体的面积测度迷向时,讨论 Schneider 投影问题,并得到它与极小表面积的一个关系.

关键词: 凸体;迷向面积测度;Blaschke 和;Schneider 投影问题

中图分类号: O 184　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1007-2861(2010)04-0394-03

Isotropic Surface Area Measure and Projection of Convex Bodies

SI Lin

(College of Science, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China)

Abstract: In this paper, projection of Blaschke sum of two convex bodies is considered when these convex bodies have an isotropic surface measure. The Schneider projection problem is also discussed when the convex body has an isotropic surface measure.

Key words: convex body; isotropic surface measure; Blaschke sum; Schneider projection problem

n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中一个有非空内点的紧凸集称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个凸体,$\mathbf{R}^n$ 中所有凸体的集合记为 $\mathscr{K}^n$. 一个凸体 K 的支撑函数 $h(K,\cdot)$ 可定义为

$$h(K,u)=\max\{\langle u,x\rangle,\ x\in K\},\ u\in S^{n-1},$$

式中,$\langle u,x\rangle$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中通常的内积,S^{n-1} 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的 $n-1$ 维单位球面. 凸体 K 可以被它的支撑函数 $h(K,\cdot)$ 唯一确定. 把凸体 K 的体积记为 $V(K)$,$\mathbf{R}^n$ 中单位球的体积记为 ω_n,$\mathbf{R}^{n-1}$ 中单位球的体积记为 ω_{n-1}. 如果 $K_1,K_2,\cdots,K_r\in\mathscr{K}^n$,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 为一列非负实数,那么一个重要的事实是,$\lambda_1K_1,\lambda_2K_2,\cdots,\lambda_rK_r$ 的 Minkowski 和的体积可展开为关于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 的一个 n 次齐次多项式[1],即

$$V(\lambda_1K_1+\lambda_2K_2+\cdots+\lambda_rK_r)=\sum_{i_1=1}^{r}\cdots\sum_{i_n=1}^{r}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n}V(K_{i_1},K_{i_2},\cdots,K_{i_n}),$$

式中,系数 $V(K_{i_1},K_{i_2},\cdots,K_{i_n})$ 在 $K_{i_1},K_{i_2},\cdots,K_{i_n}$ 的位置置换下是不变的,称为 $K_{i_1},K_{i_2},\cdots,K_{i_n}$ 的混合体积.

相伴于 $K_1,K_2,\cdots,K_{n-1}\in\mathscr{K}^n$,在 S^{n-1} 上存在唯一的一个 Borel 测度[1] $S(K_1,K_2,\cdots,K_{n-1};\cdot)$,使得对任意的 $K\in\mathscr{K}^n$,有

$$V(K_1,K_2,\cdots,K_{n-1},K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h(K,u)\,\mathrm{d}S(K_1,K_2,\cdots,K_{n-1};u),$$

式中,$S(K_1,K_2,\cdots,K_{n-1};\cdot)$ 通常被称作相伴于 $K_1,K_2,\cdots,K_{n-1}$ 的混合面积测度.

混合面积测度 $S(K,\cdots,K;\cdot)$ 被称为 K 的表面积测度,通常记为 $\sigma_K(\cdot)$. 由 Gauss 映射的定义可

收稿日期:2009-04-13
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671117);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(YX2010-29)
通信作者:司　林(1978~),男,讲师,博士,研究方向为离散几何与凸几何. E-mail:silin@bjfu.edu.cn

知,如果 A 是 S^{n-1} 上的一个 Borel 子集,$\boldsymbol{u}_x$ 表示 K 在 x 的单位外法向量,那么

$$\boldsymbol{\sigma}_K(A) = \boldsymbol{v}\{x \in \mathrm{bd}(K) : \boldsymbol{u}_x \in A\},$$

式中,$\boldsymbol{v}$ 为 K 上的 $n-1$ 维面积测度. 这样 K 的表面积 $\partial(K)$ 可表示为

$$\partial(K) = \boldsymbol{\sigma}_K(S^{n-1}).$$

对任意 $K \in \mathscr{K}^n$,存在如下的一个仿射不变量[2-3]

$$\partial_K = \min\{\partial(K)/V(K)^{\frac{n-1}{n}} : T \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n), \; |\det T| = 1\},$$

式中,$L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的所有线性变换. 通常,∂_K 被称为 K 的极小表面积.

定义 1[3-4] S^{n-1} 上的一个 Borel 测度 μ 被称作是迷向的,如果对任意 $\theta \in S^{n-1}$,有

$$\int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle|^2 \mathrm{d}\mu(u) = \frac{\mu(S^{n-1})}{n}.$$

如果一个凸体 K 的表面积测度 $\boldsymbol{\sigma}_K(\cdot)$ 是迷向的,那么称凸体 K 是表面迷向的.

Petty 定理[5]是关于迷向面积测度的一个重要结果.

定理 1(Petty 定理) 如果 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个凸体, 那么

$$\partial(K) = \partial_K V(K)^{\frac{n-1}{n}},$$

当且仅当 $\boldsymbol{\sigma}_K(\cdot)$ 是迷向的.

迷向面积测度与凸体的一些极值问题密切相关[6-8],本研究讨论表面迷向凸体投影的一些极值性质.

1 凸体 Blaschke 和的投影

Minkowski 存在性定理[1]给出了 S^{n-1} 上测度与凸体的关系.

定理 2(Minkowski 存在性定理) 如果 μ 是定义在 S^{n-1} 上的 Borel 测度,并且满足:

(1) 存在 S^{n-1} 上的 Borel 可测集 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 及线性无关的向量 $\boldsymbol{u}_1 \in B_1, \boldsymbol{u}_2 \in B_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in B_n$,使得 $\mu(B_i) \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$;

(2) $\int_{S^{n-1}} u \mathrm{d}\mu(u) = 0$, 那么存在一个凸体 K,使得 $\mu = \boldsymbol{\sigma}_K(\cdot)$.

如果 $K_1, K_2 \in \mathscr{K}^n$,那么由混合面积测度的性质,知 $\boldsymbol{\sigma}_{K_1}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{K_2}(\cdot)$ 满足 Minkowski 定理的假设, 所以

$$\int_{S^{n-1}} u \mathrm{d}(\boldsymbol{\sigma}_{K_1}(u) + \boldsymbol{\sigma}_{K_2}(u)) = 0.$$

对 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^+$,由 Minkowski 定理可知,存在一个凸体 $\lambda_1 \cdot K_1 + \lambda_2 \cdot K_2$,使得

$$\boldsymbol{\sigma}_{\lambda_1 \cdot K_1 + \lambda_2 \cdot K_2}(\cdot) = \lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_{K_1}(\cdot) + \lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_{K_2}(\cdot),$$

式中,$\lambda_1 \cdot K_1 + \lambda_2 \cdot K_2$ 通常被称作 K_1, K_2 的 Blaschke 和.

对于任意两个凸体的 Blaschke 和,可得如下定理.

定理 3 如果 K_1, K_2 是 $\mathscr{K}^n$ 中表面迷向的两个体积为 1 的凸体, 则对任意的 $\theta \in S^{n-1}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^+$,有

$$\frac{\lambda_1 \partial_{K_1} + \lambda_2 \partial_{K_2}}{2n} \leqslant \mathrm{vol}_{n-1}(P_\theta(\lambda_1 \cdot K_1 + \lambda_2 \cdot K_2)) \leqslant \frac{\lambda_1 \partial_{K_1} + \lambda_2 \partial_{K_2}}{2\sqrt{n}},$$

式中,P_θ 表示在垂直于 θ 的子空间 $\theta^\perp$ 上的正交投影算子,vol_{n-1} 表示 $n-1$ 维体积.

证明 凸体 K 的投影的体积与它的面积测度 $\boldsymbol{\sigma}_K(\cdot)$ 的关系如下:

$$\mathrm{vol}_{n-1} P_\theta(K) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle| \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_K(u).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式及 Petty 定理,得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}_{n-1} P_\theta(\lambda_1 \cdot K_1 + \lambda_2 \cdot K_2) = \\
&\frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle| \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{\lambda_1 \cdot K_1 + \lambda_2 \cdot K_2}(u) = \\
&\frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle| \mathrm{d}\lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_{K_1}(u) + \\
&\frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle| \mathrm{d}\lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_{K_2}(u) \leqslant \\
&\frac{1}{2} \left(\int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle|^2 \mathrm{d}\lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_{K_1}(u) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{S^{n-1}} \mathrm{d}\lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_{K_1}(u) \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\frac{1}{2} \left(\int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle|^2 \mathrm{d}\lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_{K_2}(u) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{S^{n-1}} \mathrm{d}\lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_{K_2}(u) \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_{K_1}(S^{n-1})}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (\lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_{K_1}(S^{n-1}))^{\frac{1}{2}} + \\
&\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_{K_2}(S^{n-1})}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (\lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_{K_2}(S^{n-1}))^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_1 \partial_{K_1} + \lambda_2 \partial_{K_2}}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

下面证明定理 3 的不等式的左边,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}_{n-1} P_\theta(\lambda_1 \cdot K_1 + \lambda_2 \cdot K_2) = \\
&\frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle| \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_{\lambda_1 \cdot K_1 + \lambda_2 \cdot K_2}(u) = \\
&\frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle| \mathrm{d}\lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_{K_1}(u) + \\
&\frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle| \mathrm{d}\lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_{K_2}(u) \geqslant \\
&\frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle|^2 \mathrm{d}\lambda_1 \boldsymbol{\sigma}_{K_1}(u) +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}|\langle u,\theta\rangle|^2\mathrm{d}\lambda_2\sigma_{K_2}(u)=\frac{\lambda_1\partial_{K_1}+\lambda_2\partial_{K_2}}{2n}.$$

在定理3中,如果令 $K_1=K$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$,则有如下的推论.

推论1 如果 K 是 $\mathscr{K}^n$ 中体积为1的表面迷向凸体,则对任意的 $\theta\in S^{n-1}$,有

$$\frac{\partial_K}{2n}\leqslant \mathrm{vol}_{n-1}P_\theta(K)\leqslant\frac{\partial_K}{2\sqrt{n}}.$$

2 关于 Schneider 投影问题的一个结果

如果 K 是一个凸体,那么它的投影体 ΠK 的支撑函数定义为

$$h(\Pi K)=\mathrm{vol}_{n-1}(P_\theta(K)),\ \theta\in S^{n-1}.$$

关于投影体,一个重要的未解决的问题是 Schneider 投影问题,即当 K 在中心对称的凸体类中变化时,确定仿射不变量的最小上界

$$[V(\Pi K)/V(K)^{n-1}]^{1/n}.$$

Schneider 最先提出了这个问题,并对其解给出了猜想及其在随机几何中的应用.之后,Schneider 投影问题及其修正形式又引发了许多的研究[9-10].

本研究就凸体的表面积测度迷向时,给出 Schneider 投影问题的仿射不变量与凸体极小表面积的一个关系,得到如下定理.

定理4 如果 K 是关于原点中心对称的表面迷向凸体,那么

$$[V(\Pi K)/V(K)^{n-1}]^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\omega_{n-1}\omega_n^{\frac{1}{n}-1}\partial_K.$$

如果 K 是一个关于原点中心对称的凸体,那么它的极体 K^* 可定义为

$$K^*=\{x\in\mathbf{R}^n:|\langle x,y\rangle|\leqslant 1,\forall y\in K\}.$$

关于凸体和它的极体的关系由定理5中的不等式[1]给出.

定理5(Blaschke-Santaló 不等式) 如果 K 是关于原点中心对称的凸体,那么

$$V(K)V(K^*)\leqslant\omega_n^2,$$

当且仅当 K 是一个椭球,等号成立.

定理4的证明 对任意的凸体 K,Cauchy 表面积公式[1]可表示为

$$\int_{S^{n-1}}\mathrm{vol}_{n-1}(P_\theta(K))\sigma(\mathrm{d}\theta)=\frac{\omega_{n-1}}{n\omega_n}\partial(K).$$

由逆向 Hölder 不等式及 Cauchy 表面积公式,可得

$$V(\Pi^*K)=\omega_n\int_{S^{n-1}}\frac{1}{[\mathrm{vol}_{n-1}(P_\theta(K))]^n}\sigma(\mathrm{d}\theta)\geqslant\omega_n\Big[\int_{S^{n-1}}\mathrm{vol}_{n-1}(P_\theta(K))\sigma(\mathrm{d}\theta)\Big]^{-n}\cdot\Big[\int_{S^{n-1}}1^{\frac{1}{1+n}}\sigma(\mathrm{d}\theta)\Big]^{1+n}=\omega_n\Big[\frac{\omega_{n-1}}{n\omega_n}\partial(K)\Big]^{-n}.$$

应用 Blaschke-Santaló 不等式,可得

$$V(\Pi K)\leqslant\omega_n\Big[\frac{\omega_{n-1}}{n\omega_n}\partial(K)\Big]^n.$$

因为 $\sigma_K(\cdot)$ 迷向,由 Petty 定理,有

$$V(\Pi K)/V(K)^{n-1}\leqslant\omega_n\Big[\frac{\omega_{n-1}}{n\omega_n}\Big]^n\partial_K^n,$$

因此,得

$$[V(\Pi K)/V(K)^{n-1}]^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\omega_{n-1}\omega_n^{\frac{1}{n}-1}\partial_K.$$

参考文献:

[1] GARDNER R. Geometric tomography [M]. New York: Cambridge University Press, 2006.

[2] GIANNOPOULOS A, MILMAN V. Extremal problems and isotropic positions of convex bodies [J]. Israel J Math, 2000, 117:29-60.

[3] GIANNOPOULOS A, PAPADIMITRAKIS M. Isotropic surface area measure [J]. Mathematika, 1999, 46:1-13.

[4] BASTERO J, ROMANCE M. Positions of convex bodies associated to extremal problems and isotropic measures [J]. Adv Math, 2004, 184:64-88.

[5] PETTY C M. Surface area of a convex body under affine transformations [J]. Proc Amer Math Soc, 1961, 12: 824-828.

[6] HE B W, LENG G S. Isotropic bodies and Bourgain's problem [J]. Science in China Series A, 2005, 48:666-679.

[7] LUTWAK E, YANG D, ZHANG G. Volume inequalities for isotropic measures [J]. Amer J Math, 2007, 129: 1711-1723.

[8] PAOURIS G. Concentration of mass and central limit properties of isotropic convex bodies [J]. Proc Amer Math Soc, 2005, 133:565-575.

[9] HE B W, LENG G S, LI K. Projection problems for symmetric polytopes [J]. Adv Math, 2006, 207:73-90.

[10] LUTWAK E, YANG D, ZHANG G. A new affine invariant for polytopes and Schneider's projection problem [J]. Trans Amer Math Soc, 2001, 353:1767-1779.

(编辑:孟庆勋)