文章编号: 1007-2861(2009)05-0496-05

有限群的正规嵌入子群

郭鹏飞[1,2], 魏先彪[1]

(1. 上海大学 理学院,上海 200444; 2. 连云港师范高等专科学校 数学系,江苏 连云港 222006)

摘要: 群 G 的子群 H 称为 G 的正规嵌入子群, 如果对于$|H|$的每个素因子 p, 存在 G 的一个正规子群 K,使得 H 的一个 Sylow p-子群也是 K 的一个 Sylow p-子群. 假设对于 G 的每个非循环 Sylow 子群 P 有一个子群 D,使得 $1<|D|<|P|$, 且 P 的所有阶为$|D|$和 $2|D|$(若 P 是非交换 2-群且$|P:D|>2$)的子群 H 是 G 的正规嵌入子群, 得到 G 为 p-幂零群以及超可解群的一些充分条件, 部分结果被推广到群系.

关键词: 正规嵌入子群;p-正规嵌入子群;p-幂零群;超可解群

中图分类号: O 152.1　　　　**文献标志码**: A

Normally Embedded Subgroups of Finite Groups

GUO Peng-fei[1,2], WEI Xian-biao[1]

(1. College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China;
2. Department of Mathematics, Lianyungang Teachers College, Lianyungang 222006, Jiangsu, China)

Abstract: A subgroup H of a finite group G is said to be normally embedded in G if, for every prime p dividing the order of H, there exists a normal subgroup K of G such that a Sylow p-subgroup of H is also a Sylow p-subgroup of K. This paper assumes that every non-cyclic Sylow subgroup P of G has a subgroup D such that $1<|D|<|P|$ and all subgroups H of P with order $|H|=|D|$ and with $2|D|$ (if P is a non-abelian 2-group and $|P:D|>2$) are normally embedded in G, and some sufficient conditions are obtained on G to be p-nilpotent groups and supersolvable groups. Moreover, some of them are extended to formations.

Key words: normally embedded subgroups; p-normally embedded subgroups; p-nilpotent groups; supersolvable groups

本研究考虑的群均为有限群, 所用群论术语、符号都是规范的, 可参阅文献[1]. 20 世纪 80 年代以来, 研究有限群的结构及其子群的某种正规性的关系一直是有限群论重要的课题之一. 群论学家们不仅给出了各种各样的广义正规性的概念, 而且获得了大量的研究成果. 近来, Skiba[2]引入一种广义正规子群——弱 s-置换子群(见定义 1.3), 并且利用弱 s-置换子群的性质得到: 设 F 是一个包含所有超可解群的饱和群系, 群 G 有一个正规子群 E,使得 $G/E\in F$. 假设对于 E 的每个非循环 Sylow 子群 P 有一个子群 D,使得 $1<|D|<|P|$, 且 P 的所有阶为$|D|$和 $2|D|$(若 P 是非交换 2-群且$|P:D|>2$)的

收稿日期:2008-05-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771132);江苏省高校"青蓝工程"资助项目
通信作者:郭鹏飞(1972 ~),男,副教授,博士,研究方向为有限群. E-mail:guopf999@163.com

无超可解补的子群 H 是 G 的弱 s-置换子群，则 $G \in F$[3-4]. 正规嵌入子群（见定义 1.2）也是正规性的推广，但是正规嵌入性与弱 s-置换性并无蕴含关系（见例 1.1 和例 1.2）. 我们将研究：若群 G 的每个非循环 Sylow 子群 P 有一个子群 D，使得 $1<|D|<|P|$，且 P 的所有阶为 $|D|$ 和 $2|D|$（若 P 是非交换 2-群且 $|P:D|>2$）的子群 H 是 G 的正规嵌入子群，则 G 的结构如何？我们给出群 G 为 p-幂零群以及超可解群的一些充分条件.

1　预备知识

Fischer[5]引进了正规嵌入子群的概念，并且得到许多结果.

定义 1.1　群 G 的子群 H 称为 G 的 p-正规嵌入子群，如果对于 $|H|$ 的一个素因子 p，存在 G 的一个正规子群 K，使得 H 的一个 Sylow p-子群也是 K 的一个 Sylow p-子群.

定义 1.2　群 G 的子群 H 称为 G 的正规嵌入子群，如果对于 $|H|$ 的每个素因子 p，都存在 G 的一个正规子群 K，使得 H 的一个 Sylow p-子群也是 K 的一个 Sylow p-子群.

定义 1.3[2]　群 G 的子群 H 称为 G 的弱 s-置换子群，如果存在 G 的一个次正规子群 T，使得 $HT=G$ 且 $H\cap T\leqslant H_{sG}$（其中 H_{sG} 是包含于 H 的 G 的所有 s-拟正规子群生成的群）.

显然，弱 s-置换子群与正规嵌入子群都是子群正规性的推广，但这二者之间却没有蕴含关系.

例 1.1　设 S_4 是 4 次对称群，$H=\langle c\rangle$ 是由 c 生成的 3 阶循环群. 显然，H 是 G 的正规嵌入子群，但非弱 s-置换子群.

下面给出一个满足弱 s-置换但不满足正规嵌入子群的例子.

例 1.2　设 A_4 是 4 次交代群，$C_2=\langle c\rangle$ 是由 c 生成的 2 阶循环群. 又设 $G=C_2\times A_4$，其中 $A_4=K_4\langle t\rangle$，$K_4=\langle a,b\rangle$ 是由两个 2 阶元 a 和 b 生成的 Klein 4 元群，t 是一个 3 阶元. 令 $H=\langle ac\rangle$，容易验证：$HA_4=G$ 且 $H\cap A_4=1$，所以 H 是 G 的弱 s-置换子群. 但是 $H\not\trianglelefteq G$ 且 G 无 6 阶正规子群，因此 H 不是 G 的正规嵌入子群.

引理 1.1[5]　设 G 为一个群，U 是 G 的 p-正规嵌入子群. 再设 $K\trianglelefteq G$ 且 $H\leqslant G$，则

（1）若 $U\leqslant H$，则 U 是 H 的 p-正规嵌入子群；

（2）UK 是 G 的 p-正规嵌入子群且 UK/K 是 G/K 的 p-正规嵌入子群；

（3）若 $K\leqslant H$ 且 H/K 是 G/K 的 p-正规嵌入子群，则 H 是 G 的 p-正规嵌入子群；

（4）$U\cap K$ 是 G 的 p-正规嵌入子群，且若 K 是 p-群，则 $U\cap K\trianglelefteq G$；

（5）U 覆盖或远离 G 的每个 p-主因子.

注 1.1　（a）从 p-正规嵌入子群定义来看，若 H 是 p-群且 H 是群 G 的 p-正规嵌入子群，则 H 是 G 的正规嵌入子群；

（b）若 H 是 G 的正规嵌入子群，引理 1.1 也成立.

引理 1.2[5]　设 U 是群 G 的正规嵌入子群，则 U 是 G 的覆盖远离子群.

引理 1.3　设 F 是一个包含所有幂零群的饱和群系，$P=G^F$ 是群 G 的可解 F-剩余. 假设 G 的每个不包含 P 的极大子群都属于 F，则 P 是一个 p-群（p 是 $|G|$ 的某一素因子）；再设 P 的每个素数阶群和 4 阶群（若 $p=2$）是 G 的正规嵌入子群，则 $|P/\Phi(P)|=p$.

证明　由文献[6]，P 是一个 p-群且下列两条成立：（1）$P/\Phi(P)$ 是 P 的一个 G-主因子；（2）P 的方次数是 p 或 4（若 $p=2$ 且 P 非交换群）. 假设 P 的每个素数阶群和 4 阶群（若 $p=2$）是 G 的正规嵌入子群. 若 $|P/\Phi(P)|>p$，取 $X/\Phi(P)\leqslant P/\Phi(P)$ 且 $|X/\Phi(P)|=p$. 另设 $x\in X\setminus\Phi(P)$ 且 $L=\langle x\rangle$，可以得到 $|L|=p$ 或者 $|L|=4$ 且 $L\Phi(P)/\Phi(P)=X/\Phi(P)$. 由引理 1.2，$L$ 覆盖或远离 G 的每个主因子. 若 $L\not\trianglelefteq G$，则 $LP=P=L\Phi(P)=L$ 或者 $L\cap P=L\neq L\cap\Phi(P)$，与假设矛盾. 所以 $L\trianglelefteq G$，因此 $L\Phi(P)/\Phi(P)=X/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$，与 $P/\Phi(P)$ 是 P 的一个 G-主因子矛盾，从而 $|P/\Phi(P)|=p$.

引理 1.4[7]　设 N 是群 G 的可解正规子群且 $N\neq 1$. 若 G 的每个包含于 N 的极小正规子群不包含于 $\Phi(G)$，则 N 的 Fitting 子群 $F(N)$ 是 G 的包含于 N 的极小正规子群的直积.

设 A 是有限 p-群. 当 $p>2$ 时，令 $\Omega(A)=\Omega_1(A)$；当 $p=2$ 时，令 $\Omega(A)=\langle\Omega_1(A),\Omega_2(A)\rangle$，则有下面这个引理.

引理 1.5[8]　设 p 是群 G 的阶的一个素因子，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$. 若 $\Omega(P\cap G')\leqslant Z(N_G(P))$，则 G 是 p-幂零群.

引理 1.6[2]　设 F 是一个包含超可解群类 U 的饱和群系，G 有一个正规子群 E，使得 $G/E\in F$. 若 E 是循环群，则 $G\in F$.

2 主要结果

定理2.1 设群 G 的阶的一个素因子 p 满足 $(|G|,p-1)=1$, $E\trianglelefteq G$, $P\in \mathrm{Syl}_p(E)$ 且 G/E 是 p-幂零群. 假设 P 是循环群或者 P 有一个子群 D,使得 $1<|D|<|P|$, 且 P 的所有阶为 $|D|$ 和 $2|D|$(若 P 是非交换 2-群且 $|P:D|>2$)的子群 H 是 G 的正规嵌入子群, 则 G 是 p-幂零群.

证明 假设定理不真且设 G 为极小阶反例.

(1) P 不是循环群.

如果 P 为循环群,则由 $N_E(P)/C_E(P)\lesssim \mathrm{Aut}(P)$ 以及 $(|G|,p-1)=1$ 即知 $N_E(P)=C_E(P)$. 由 Burnside 定理[1], E 是 p-幂零群. 设 T 为 E 的正规 p-补, 考虑商群 G/T 以及 E/T. 由于 $(G/T)/(E/T)\cong G/E$ 是 p-幂零群, $PT/T\in \mathrm{Syl}_p(E/T)$ 且 PT/T 是循环群, 故 G/T 满足定理的条件. 群 G 的极小性隐含着 G/T 是 p-幂零群, 所以 G 是 p-幂零群, 与假设矛盾.

(2) 设 N 是 G 的任一包含于 E 的极小正规子群, 则 N 为 p-群.

首先设 N 既非 p'-群也非 p-群. 令 $R=P\cap N\in \mathrm{Syl}_p(N)$,易证 P 存在一个子群 H_1,使得 $|H_1|=|D|$, 且 $H_1N\neq H_1$, $N\cap H_1\neq 1$, 即 H_1 不是 G 的覆盖远离子群. 引理 1.2 说明 H_1 不是 G 的正规嵌入子群, 与假设矛盾, 所以 N 或者为 p'-群或者为 p-群. 若 N 为 p'-群, 考虑商群 G/N 以及 E/N. 由于 $(G/N)/(E/N)\cong G/E$ 是 p-幂零群, $PN/N\in \mathrm{Syl}_p(E/N)$. 取 P 的任一阶为 $|D|$ 和 $2|D|$(若 P 是非交换 2-群且 $|P:D|>2$)的子群 H. 由引理 1.1(2), HN/N 是 G/N的正规嵌入子群, 故 G/N 满足定理的条件. 群 G 的极小性隐含着 G/N 是 p-幂零群, 所以 G 是 p-幂零群, 与假设矛盾, 故 N 为 p-群.

(3) 若 $E\neq G$, 则 $E=P$.

若 $E\neq G$, 由假设及引理 1.1(1) 可知, E 满足定理条件. 由 G 的极小性, E 是 p-幂零群. 设 K 是 E 正规 p-补, 则 $K\trianglelefteq G$. 由于 $G/E\cong (G/K)/(E/K)$ 是 p-幂零群. 再由引理 1.1(2) 可知, G/K 满足定理条件. 由 G 的极小性, G/K 是 p-幂零群, 因此 G 是 p-幂零群, 矛盾.

(4) $|N|<|D|$ 或者 $|N|=|D|=p$.

① 当 $|N|>|D|$, 由引理 1.2 可知, H 是 G 的覆盖远离子群, 故存在 $D_1\leqslant N$,使得 $|D_1|=|D|$, 那么 $D_1\cap N\neq 1$ 且 $D_1N\neq D_1$, 与 D_1 是 G 的覆盖远离子群矛盾.

② 若 $|N|=|D|\geqslant p^2$, 再由引理 1.2, H 是 G 的覆盖远离子群, 故存在 $R\leqslant E$,使得 $|R:N|=p$ 且 $R=ND$, 故 $|R|/|D|=|N|/|N\cap D|=p$. 由 D 的覆盖远离性, 又 $ND\neq D$, 所以 $|N|=|N|/|N\cap D|=p$, 与假设矛盾, 故 $|N|=|D|=p$.

(5) $|D|>p$.

若 $E=P$. 设 $|D|=p$, 令 $L=G^{\mathcal{F}}$, 则 $L\leqslant E$($\mathcal{F}$ 是 p-幂零群系). 取 $L\nleqslant M\lessdot G$, 则 $G/L\cong M/(M\cap L)\in \mathcal{F}$. 由引理 1.1(1) 及 G 的极小性, $M\in \mathcal{F}$. 再由引理 1.3, $|L/\Phi(L)|=p$. 由于 $(G/\Phi(L))/C_{G/\Phi(L)}(L/\Phi(L))\lesssim \mathrm{Aut}(L/\Phi(L))$, 再由 $(|G|,p-1)=1$, $L/\Phi(L)\leqslant Z(G/\Phi(L))$, 所以 $G/\Phi(L)\in \mathcal{F}$, 因此 $L\leqslant \Phi(L)$, 矛盾, 进而 $|D|>p$.

若 $E=G$ 且 $|N|=|D|=p$. 由假设, G 存在一正规子群 B, 使得 $H\in \mathrm{Syl}_p(B)$. 再设 $|B|\neq p$, 则由 Burnside 定理[1]及 $(|G|,p-1)=1$, B 是 p-幂零群. 与(2)矛盾. 这使得 G 的每一 p 阶子群正规于 G. 易证: 每一 p 阶子群含于 G 的中心. 由 Itô 定理, G 是 p-幂零群, 矛盾.

(6) E 中包含 G 的唯一极小正规子群 N, G/N 是 p-幂零群且 $N\nleqslant \Phi(G)$.

由于 $|N|<|D|$, 易知 G/N 满足定理条件. 由 G 的极小性, G/N 是 p-幂零群. 由于所有 p-幂零群是一个饱和群系, 故 N 是 G 的包含于 E 的唯一极小正规子群且 $N\nleqslant \Phi(G)$.

(7) 导出矛盾.

若 $E=P$, 由于 N 是含于 E 的 G 的唯一极小正规子群, 由(6)及引理 1.4, $N=P$, 与假设矛盾. 若 $E=G$, 令 $H_2\leqslant G$ 且 $|H_2|/|H|=p$. 任取 $H_1\lessdot H_2$. 由假设, G 存在一正规子群 A, 使得 $H_1\in \mathrm{Syl}_p(A)$. 又由 N 的唯一极小正规性, $N\leqslant A$, 故 $N\leqslant H_1$. 由 H_1 的任意性, $N\leqslant \Phi(H_2)$. 因此 $N\leqslant \Phi(G)$[9], 与(6)矛盾.

推论2.1 设群 G 的阶的一个素因子 p 满足 $(|G|,p-1)=1$, $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$. 假设对于 G 的每个非循环 Sylow 子群 P 有一个子群 D,使得 $1<|D|<|P|$, 且 P 的所有阶为 $|D|$ 和 $2|D|$(若 P 是非交换 2-群且 $|P:D|>2$)的子群 H 是 G 的正规嵌入子群, 则 G 是 p-幂零群.

定理2.2 设 p 是群 G 的阶的一个素因子, $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$ 且 $N_G(P)$ 是 p-幂零群. 假设对于 G 的每个非循环 Sylow 子群 P 有一个子群 D,使得 $1<|D|<

$|P|$，且 P 的所有阶为 $|D|$ 和 $2|D|$（若 P 是非交换 2-群且 $|P:D|>2$）的子群 H 是 G 的正规嵌入子群，则 G 是 p-幂零群.

证明　由推论 2.1 可知，当 $p=2$ 时，定理成立. 下设 $p>2$.

设 G 为极小阶反例，分以下步骤证明.

（1）$O_{p'}(G)=1$.

若 $O_{p'}(G)\neq 1$，考虑商群 $G/O_{p'}(G)$. 由引理 1.1(2)，可以验证 $G/O_{p'}(G)$ 满足定理的条件. 由 G 的极小性可知，$G/O_{p'}(G)$ 为 p-幂零群，因此 G 为 p-幂零群，矛盾，故 $O_{p'}(G)=1$.

（2）若 M 为 G 的真子群，且 $P\leqslant M\leqslant G$，则 M 为 p-幂零群.

由于 $N_M(P)\leqslant N_G(P)$，所以 $N_M(P)$ 为 p-幂零群. 由引理 1.1(1) 易知，M 满足定理的条件. 由 G 的极小性可知，M 为 p-幂零群.

（3）$1<O_p(G)<P$ 且 $N_G(P)=P$.

事实上，因 $P\leqslant N_G(Z(J(P)))$，根据 Glauberman-Thompson 定理[10] 可得，$N_G(Z(J(P)))=G$，进而 $O_p(G)\neq 1$. $O_p(G)<P$ 显然成立. 如果 $N_G(P)>P$，则令 $N_G(P)=P\times Q_1$ 且 $Q_1\neq 1$，那么 $Q_1\leqslant C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$，矛盾，因此 $N_G(P)=P$.

（4）设 N 是 G 的包含于 $O_p(G)$ 的极小正规子群，则 $|N|<|D|$ 且 $|D|>p$.

与定理 2.1 证明(4)相同，$|N|<|D|$ 或 $|N|=|D|=p$. 由假设及文献[3]易知，$H\trianglelefteq P=N_G(P)$，从而 $H\leqslant Z(N_G(P))$. 由引理 1.5，G 是 p-幂零群，矛盾，因此 $|D|>p$.

（5）G/N 是 p-幂零群，N 是 G 的唯一极小正规子群且 $N\not\leqslant\Phi(G)$.

由(4)，$|N|<|D|$，易证 G/N 满足定理条件. 由 G 的极小性可知，G/N 是 p-幂零群. 由 $O_{p'}(G)=1$ 及 p-幂零群类组成一个饱和群系可知，N 是 G 的唯一极小正规子群且 $N\not\leqslant\Phi(G)$.

（6）$N=O_p(G)=F(G)$.

由(5)，G 存在一极大子群 M，使得 $G=NM$. 由于 N 是初等交换群，所以 $N\cap M=1$. 因为 $O_p(G)=O_p(G)\cap NM=N(O_p(G)\cap M)$，又 $O_p(G)\leqslant F(G)\leqslant C_G(N)$，所以 $O_p(G)\cap M\trianglelefteq G$. 若 $O_p(G)\cap M\neq 1$，则 $N\leqslant O_p(G)\cap M$，与 $N\cap M=1$ 矛盾，故 $O_p(G)\cap M=1$，这时有 $N=O_p(G)$. 由(1)，$O_p(G)=F(G)$.

（7）导出矛盾.

当 $|P:D|=p$ 时，任取 $H\leqslant G$ 且 $|H|=|D|$. 由引理 1.2，H 覆盖或远离 G 的每个 p-主因子，即 $HN=N$ 或者 $H\cap N=1$. 若 $H\cap N=1$，则 $|N|=p$. 由于 $N\not\leqslant\Phi(G)$，所以存在 G 的极大子群 R，使得 $G=NR$ 且 $N\cap R=1$，那么 $G/N\cong R$ 是 p-幂零群. 又因为 $G/C_G(N)\lesssim \mathrm{Aut}(N)$，所以 $G'\leqslant C_G(N)$，因此 $G'=G'\cap NR=N(G'\cap R)=N(G'\cap R)$ 是 p-幂零群. 易知 G' 是 p-群，所以 $P\trianglelefteq G$，故 $N_G(P)=G$ 是 p-幂零群，与假设矛盾，因此 $N\leqslant H$. 由 H 的任意性，$N\leqslant\Phi(P)$. 由文献[9]，$N\leqslant\Phi(G)$，与(5)矛盾.

当 $|P:D|>p$ 时，任取 $H\leqslant G$ 且 $|H|=|D|$. 由假设，G 存在一正规子群 K，使得 $H\in \mathrm{Syl}_p(K)$. 又 $N\leqslant K$，故 $N\leqslant H$. 由 H 的任意性，$N\leqslant\Phi(L)$（其中 $|L:H|=p$），故 $N\leqslant\Phi(G)$，与(5)矛盾.

定理 2.3　设 F 是一个包含所有超可解群的饱和群系，群 G 有一个正规子群 E，使得 $G/E\in F$. 假设对于 E 的每个非循环 Sylow 子群 P 有一个子群 D，使得 $1<|D|<|P|$，且 P 的所有阶为 $|D|$ 和 $2|D|$（若 P 是非交换 2-群且 $|P:D|>2$）的子群 H 是 G 的正规嵌入子群，则 $G\in F$.

证明　假设定理不真，考虑阶为 $|G||E|$ 的极小阶反例.

（1）对于 E 的每个 Hall 子群 K，K 满足定理条件；对于 E 的每个正规于 G 的 Hall 子群 X，G/X 满足定理条件.

设 K 是 E 的任一 Hall 子群且 P 是 K 的任一非循环 Sylow 子群. 由引理 1.1(1)，K 满足定理条件. 设 X 是 E 的一个正规 Hall 子群，则 $(G/X)/(E/X)\cong G/E\in F$. 取 E/X 的任一非循环 Sylow 子群 P^*/X（其中 $p\mid |E/X|$ 且 P 是 X 的某一 Sylow p-子群，使得 $P^*=PX$），则 P 是 E 的一个非循环 Sylow 子群. 取 P^*/X 的一个子群 H^*/X，使得 $|H^*/X|=|D|$，则 $H^*=HX$（其中 H 是 H^* 的某一 Sylow p-子群）. 显然 $|H|=|D|$. 由假设及引理 1.1(2)，$H^*/X=HX/X$ 是 G/X 的正规嵌入子群. 因此，G/X 满足定理条件.

（2）$E=P$.

若 $E=G$，由推论 2.1 易知，G 存在超可解型 Sylow 塔. 设 $G=T\rtimes Q$，其中 $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$，$q\in \min(\pi(G))$. 显然 G 对于 T 来说满足定理条件. 再由 $|G||E|$ 的极小性，$G\in F$，矛盾. 设 X 是 E 的非平凡正规 Hall 子群，则 $X\trianglelefteq G$. 由(1)，G/X 满足定理条件. 由 $|G||E|$ 的极小性，$G/X\in F$. 再由 $|G||E|$ 的极小性，$X=E$. 利用推论 2.1 易知，E 存在超可

解型 Sylow 塔, 因此, $X = E = P$.

(3) G 的任一包含于 E 的极小正规子群 N 是初等交换群.

由(2)即知.

(4) $|N| < |D|$或$|N| = |D| = p$.

类似于定理 2.1 证明(4)易证.

(5) $|D| > p$.

设$|D| = p$, 令 $L = G^{F}$, 则 $L \leqslant E$. 取 $L \nleqslant M \lessdot G$, 则$G/L \cong M/(M \cap L) \in F$. 由引理 1.1(1)及 G 的极小性, $M \in F$. 由引理 1.3, $|L/\Phi(L)| = p$. 由引理 1.6, $G/\Phi(L) \in F$, 因此 $L \leqslant \Phi(L)$, 矛盾, 从而 $|D| > p$.

(6) 设 N 是含于 E 的 G 极小正规子群, 则 $G/N \in F$.

由(4)和(5), $|N| < |D|$, 从而 $1 < |D^{*}| < |P^{*}|$ (其中$|D^{*}| = |D:N|$, $|P^{*}| = |P/N|$). 当 $p > 2$ 时, 令 $H^{*} = H/N$ 且$|H^{*}| = |D^{*}|$, 则$|H| = |D|$. 由引理 1.1(2), H^{*} 是 G/N 的正规嵌入子群. 同理可证, 当 $p = 2$ 时, G/N 满足定理条件, 因此 $G/N \in F$.

(7) N 是 G 的含于 E 的唯一极小正规子群且 $N \nleqslant \Phi(G)$.

由(6)及 F 是饱和群系可知.

(8) 导出矛盾.

由(7)及引理 1.4, $N = P$. 若$|N| = |P| \geqslant p^{2}$, 与(4)矛盾; 若$|N| = |P| = p$, 由(6)及引理 1.6, $G \in F$, 与假设矛盾.

推论 2.2 设群 G 有一个正规子群 E, 使得 G/E 是超可解群. 再设对于 E 的每个非循环 Sylow 子群 P 有一个子群 D, 使得 $1 < |D| < |P|$, 且 P 的所有阶为$|D|$和$2|D|$(若 P 是非交换 2-群且$|P:D| > 2$)的子群 H 是 G 的正规嵌入子群, 则 G 是超可解群.

参考文献:

[1] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 2 版. 北京:科学出版社,2001:1-181.

[2] SKIBA A N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups [J]. Journal of Algebra, 2007, 315:192-209.

[3] SKIBA A N. A note on c-normal subgroups of finite groups [J]. Algebra and Discrete Mathematics, 2005 (3):85-95.

[4] SKIBA A N, TITOV O V. Finite groups with c-quasinormal subgroups [J]. Siberian Mathematical Journal, 2007, 48(3):544-554.

[5] DOERK K, HAWKES T. Finite soluble groups [M]. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992:250-256.

[6] SHEMETKOV L A. Formations of finite groups [M]. Moscow: Nauka, 1978.

[7] LI D Y, GUO X Y. The influence of c-normality of subgroups on the structure of finite groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 150:53-60.

[8] BALLESTER-BOLINCHES A, GUO X Y. Some results on p-nilpotence and solubility of finite groups [J]. Journal of Algebra, 2000, 228:491-496.

[9] ROBINSON D J S. A course in the theory of groups [M]. New York: Springer, 1993:117-300.

[10] 徐明曜,黄建华,李慧陵,等. 有限群导引(下册)[M]. 北京:科学出版社,2001:1-108.

(编辑:刘志强)