

文章编号: 1003-207(2006)02-0012-04

# 引入无风险证券的均值——VaR 投资组合模型研究

安起光, 王厚杰

(山东财政学院金融学院, 山东 济南 250014)

**摘要:** 本文根据 Markowitz 均值-方差模型的研究发展过程, 结合机会约束模型, 引入无风险证券, 建立了用 VaR 代替方差作为风险度量指标的机会约束下均值——VaR 投资组合模型, 讨论了模型最优解的存在性和唯一性, 并得到了模型最优解的解析表达式。

**关键词:** 无风险证券; 投资组合; 置信水平; 机会约束; VaR

**中图分类号:** F270 **文献标识码:** A

## 1 引言

Markowitz 于 1952 年发表的论文“Portfolio Selection”中提出均值-方差方法, 首次定量地分析了投资组合中的风险与收益之间的内在关系, 使人们可以系统地描述和解决投资组合的最优化问题。由于他首次提出一个系统的处理风险与收益的方法而被授予 1990 年的诺贝尔经济学奖。但是在实际的操作中, 用方差作为风险度量指标具有一定的不足之处, 许多学者对均值-方差模型提出了改进和批评。其中 VaR 作为一种度量投资组合风险的新方法近年来发展迅速, 许多金融机构都已采用 VaR 来度量与管理投资组合的风险。

VaR (Value at Risk) 也称为风险价值, 最早产生于 1994 年, 起先是用来计量金融市场风险的统计工具, P. Jorion(1997) 是这样定义 VaR 的: “VaR 是给定的置信水平和目标时段下预期的最大损失 (或最坏情况下的损失)。”<sup>[1]</sup> 可以看出, VaR 专门度量下侧风险, 也就是发生损失的情况, VaR 计算中置信水平的选择反映了投资者的风险偏好, 更能体现投资者对于风险的心理感受。因此, 许多专家学者<sup>[2]-[8]</sup> 将 VaR 引入资产组合选择研究, 以之取代方差来度量风险, 进而建立了均值-VaR 投资组合模型。

在现实生活中, 具有风险厌恶特征的投资者进行投资决策时, 往往会根据自己的具体情况, 要求实际收益率比某个给定的期望收益率要大, 以该目标为导向制定相应的最优投资策略, 使投资风险最小。考虑到所做决策在不利情况发生时可能不满足约束条件, 故允许所做决策在一定程度上不满足约束条件, 但该决策应使约束条件成立的概率不小于某一置信水平。该方法由 Charnes 和 Cooper<sup>[2]</sup> 提出, 被称为机会约束。机会约束下的投资组合问题就是通过选择证券投资组合, 在实际收益率大于期望收益率的概率不小于某一置信水平的前提下, 使风险达到最小, 它是某些情况下投资者进行投资决策的依据, 具有一定的现实意义。不同的投资者可能会有不同的期望收益率与置信水平, 对于不同的期望收益率与置信水平, 投资者会采取不同的投资策略。

文献[3] 提出了在允许卖空时的机会约束下的投资组合问题, 该文以期望收益率与置信水平为导向, 建立了机会约束下的投资组合优化模型, 目标函数仍然是方差最小, 然后讨论了最优解的存在性与唯一性。文献[4] 在文献[3] 的基础上研究了机会约束与 VaR 约束下的投资组合问题, 目标函数还是方差最小。文献[5] 和[6] 根据均值-方差模型的框架, 建立了用 VaR 代替方差作为风险的测量指标时的均值-VaR 模型, 文献[7] 在证券收益率服从正态分布的前提下, 建立了均值-VaR 模型, 证明了最优解的存在唯一性, 得到了模型的有效边界, 并对均值-方差模型和均值-VaR 模型进行了较为详细的比较分析。文献[8] 在文献[5]-[7] 的基础上, 引入机会约束下, 建立了含机会约束的均值-VaR 投资组合模型。

收稿日期: 2005-09-10; 修改日期: 2006-03-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371025); 山东省教育厅人文社会科学重点项目 (J04T22); 山东财政学院博士基金资助项目

作者简介: 安起光 (1970-), 男 (汉族), 山东财政学院金融学院博士, 副教授, 研究方向: 金融工程与风险优化管理。

综上所述, 以上文献中的投资组合都是只包括风险资产, 没有讨论包含无风险资产的情况。根据 Markowitz 的均值- 方差模型的研究发展过程, 本文在文献[ 8] 的基础上引入无风险证券, 对于包含无风险证券的机会约束下均值——VaR 投资组合模型进行了研究, 得出了模型的有效边界并给出最优解均值的解析表达式。

## 2 模型建立

我们是在如下假设下讨论引入无风险证券的机会约束下均值——VaR 投资组合模型的: 假定有  $n$  种风险证券和 1 种无风险证券,  $n$  种风险证券的投资回报率为随机变量  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ ,  $\xi$  服从正态分布  $N(\mu, Q)$ , 其中  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$  为  $n$  种风险资产随机收益的均值,  $Q$  为  $n$  种风险资产随机收益的协方差矩阵, 是  $n$  阶正定对称矩阵。  $r_f$  为无风险证券回报率。  $X = \left\{ x \in R^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$ ,  $x_{n+1}$  为投资于无风险证券的财富比,  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为  $n$  种风险资产的权重,  $r_x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i + x_{n+1} r_f$ 。

VaR 定义的数学表述<sup>[1]</sup> 为:

$$Prob(r_x < - VaR_\alpha[r_x]) = 1 - \alpha \quad (1)$$

其中  $r_x$  为组合  $X$  的收益率,  $\alpha$  为置信水平且  $0.5 < \alpha < 1$ ,  $VaR_\alpha[r_x] > 0$ 。假设经济允许个体卖空行为, 资产的收益率服从正态分布, 即组合收益率  $r_x$  也服从正态分布。则式(1) 可变形为<sup>[2]</sup>:

$$VaR_\alpha[r_x] = z_\alpha \sigma[r_x] - E[r_x] \quad (2)$$

其中,  $F$  为标准正态分布的累计分布函数,  $z_\alpha$  为标准正态分布的  $\alpha$  分位数, 即  $F^{-1}(\alpha)$ 。

机会约束的数学表述为<sup>[2]</sup>:

$$Prob(r_x < R) = 1 - \beta \quad (3)$$

其中  $r_x$  为组合  $X$  的收益率,  $\beta$  为置信度且  $0.5 < \beta < \alpha < 1$ ,  $R$  为给定的收益率且  $R > 0$ 。式(3) 可以变形为(原理与 (1)  $\rightarrow$  (2) 相同):

$$E[r_x] = R + z_\beta \sigma[r_x] \quad (4)$$

其中  $z_\beta = F^{-1}(\beta)$ , 把式 (4) 代入式 (2) 可得:

$$E[r_x] = \frac{z_\beta}{z_\alpha - z_\beta} VaR_\alpha[r_x] + \frac{z_\alpha}{z_\alpha - z_\beta} R \quad (5)$$

其中  $z_\alpha > z_\beta$  (因为  $\alpha > \beta$ )。

满足以上条件的含无风险证券机会约束下均值——VaR 模型为:

$$\begin{cases} \min_{x \in Y} VaR_\alpha[r_x] = z_\alpha \sigma[r_x] - E[r_x] \\ Y = \left\{ x \in R^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, \right. \\ \left. E[r_x] \geq \frac{z_\beta}{z_\alpha - z_\beta} VaR_\alpha[r_x] + \frac{z_\alpha}{z_\alpha - z_\beta} R \right\} \end{cases} \quad (6)$$

## 3 模型求解

### 3.1 模型(6)解的存在唯一性

引理 1<sup>[8]</sup>:  $Y$  是  $R^{n+1}$  的闭凸子集。

引理 2<sup>[8]</sup>:  $VaR_\alpha[r_x] = z_\alpha \sigma[r_x] - E[r_x]$  为凸函数, 且在  $R^{n+1}$  的任一非空闭凸子集上存在唯一的最小值

定理: 当  $Y$  非空时, 模型 (6) 存在唯一最优解。

### 3.2 引入无风险证券的机会约束下均值——VAR 投资组合模型的有效边界

令  $\tau = (1, 1, \dots, 1)^T$ ,  $a = \tau^T Q^{-1} \tau$ ,  $b = \tau^T Q^{-1} \mu$ ,  $c = \mu^T Q^{-1} \mu$ , 引入无风险证券的均值——方差组合边界为:

$$\sigma[r_x] = \begin{cases} \frac{E[r_x] - r_f}{\sqrt{H}}, & E[r_x] > r_f \\ -\frac{E[r_x] - r_f}{\sqrt{H}}, & E[r_x] \leq r_f \end{cases} \quad (7)$$

其中  $H = c - 2br_f + ar_f^2 > 0$ 。根据文[8] 的结论: 假设投资组合回报率服从正态分布, 对事先给定的期望回报率, 如果存在置信水平为  $\alpha$  下的最小 VaR 投资组合, 则该投资组合一定属于均值——方差有效边界。把式 (2) 代入 (7) 中, 可得引入无风险证券的均值——VaR 组合边界方程:

$$VaR_\alpha[r_x] = \begin{cases} \frac{E[r_x](z_\alpha - \sqrt{H}) - z_\alpha r_f}{\sqrt{H}}, & E[r_x] > r_f \\ \frac{E[r_x](-z_\alpha - \sqrt{H}) + z_\alpha r_f}{\sqrt{H}}, & E[r_x] \leq r_f \end{cases} \quad (8)$$

此处我们只讨论  $E[r_x] > r_f$  的情况, 则均值——VaR 有效边界如图 1 所示, 图 1 中射线  $AB$  为引入无风险证券的均值——VaR 有效边界, 点  $A$  为全局 VaR 最小点, 其对应回报率的均值与 VaR 为:

$$E[r_x] = r_f, \quad VaR_\alpha[r_x] = -r_f。$$

从 VaR 的定义可以发现:  $A$  点表示全部投资于无风险证券的情况。有效边界  $AB$  的斜率为  $-\frac{\sqrt{H}}{z_\alpha - \sqrt{H}}$ 。图 1 中的直线  $MN_1$  和  $MN_2$  分别为不同

可能斜率下的机会约束线,其表达式为式(5)。F点为有效边界AB与机会约束线的交点,且F点的均值为:

$$E[r_x] = \frac{R\sqrt{H} - r_f z_\beta}{\sqrt{H} - z_\beta} \quad (9)$$

C、D、M点坐标分别为:

$$\left(0, \frac{z_\alpha r_f}{z_\alpha - \sqrt{H}}\right), (0, r_f), \left(0, \frac{z_\alpha}{z_\alpha - z_\beta} R\right)$$

模型(6)的最优解如果存在的话, ( $Var_\alpha[r_x]$ ,  $E[r_x]$ )就一定在有效边界AB上,因而AB中位于机会约束线MN上方的部分代表了机会约束下的均值——VAR投资组合模型的有效边界,模型(6)的最优解就是该有效边界上最小VAR所对应的点。

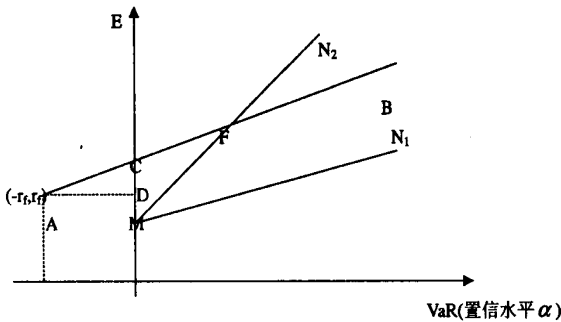


图1

### 3.3 引入无风险证券的机会约束下均值——VaR模型的最优解

(1) 当  $\frac{z_\alpha}{z_\alpha - z_\beta} R < r_f$  时,即机会约束线与E轴的交点M位于点D的下方,如图1。

a. 若斜率  $0 \leq K_{MN} \leq K_{AB}$ , 即  $0 < \frac{z_\beta}{z_\alpha - z_\beta} \leq$

$\frac{\sqrt{H}}{z_\alpha - \sqrt{H}}$ , 机会约束线位置如图1中MN<sub>1</sub>所示,其与有效边界AB无交点,模型(6)的有效边界仍为射线AB且其最优解的均值为 $r_f$ 。

b. 若斜率  $K_{MN} > K_{AB}$ , 即  $\frac{z_\beta}{z_\alpha - z_\beta} > \frac{\sqrt{H}}{z_\alpha - \sqrt{H}}$ ,

机会约束线位置如图1中MN<sub>2</sub>所示,其与有效边界AB有一个交点,模型(6)的有效边界为线段AF且其最优解的均值为 $r_f$ 。

(2) 当  $r_f \leq \frac{z_\alpha}{z_\alpha - z_\beta} R < \frac{z_\alpha r_f}{z_\alpha - \sqrt{H}}$  时,即机会约束线与E轴的交点M位于点C与点D之间,如图2。

图中直线AM的斜率为  $K_{AM} = \frac{z_\alpha(R - r_f) + z_\beta r_f}{(z_\alpha - z_\beta)r_f}$ 。

a. 若斜率  $0 \leq K_{MN} < K_{AM}$ , 即  $0 \leq \frac{z_\beta}{z_\alpha - z_\beta} < \frac{z_\alpha(R - r_f) + z_\beta r_f}{(z_\alpha - z_\beta)r_f}$ , 机会约束线位置如图2中MN<sub>1</sub>

所示,其与有效边界AB有一个交点,此交点F<sub>1</sub>位于E轴的左侧,模型(6)的有效边界为射线F<sub>1</sub>B,最优解的均值为式(9)。

b. 若斜率  $K_{AM} \leq K_{MN} \leq K_{AB}$ , 即  $\frac{z_\alpha(R - r_f) + z_\beta r_f}{(z_\alpha - z_\beta)r_f} \leq \frac{z_\beta}{z_\alpha - z_\beta} \leq \frac{\sqrt{H}}{z_\alpha - \sqrt{H}}$ , 机会约束线位置如图2中MN<sub>2</sub>所示,其与有效边界AB无交点,模型(6)的有效边界仍为射线AB且其最优解为 $r_f$ 。

c. 若斜率  $K_{MN} > K_{AB}$ , 即  $\frac{z_\beta}{z_\alpha - z_\beta} > \frac{\sqrt{H}}{z_\alpha - \sqrt{H}}$ ,

机会约束线位置如图2中MN<sub>3</sub>所示,其与有效边界AB有一个交点,此交点F<sub>2</sub>位于E轴的右侧,模型(6)的有效边界为线段AF<sub>2</sub>且最优解的均值为 $r_f$ 。

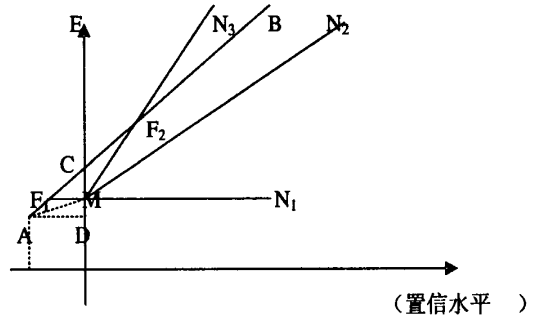


图2

(3) 当  $\frac{z_\alpha}{z_\alpha - z_\beta} R \geq \frac{z_\alpha r_f}{z_\alpha - \sqrt{H}}$  时,即机会约束线与E轴的交点M位于C点之上,如图3。

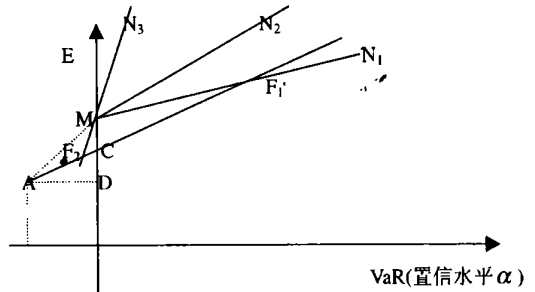


图3

a. 若斜率  $0 \leq K_{MN} < K_{AB}$ , 即  $0 \leq \frac{z_\beta}{z_\alpha - z_\beta} <$

$\frac{\sqrt{H}}{z_\alpha - \sqrt{H}}$ , 机会约束线如图3中MN<sub>1</sub>所示,其与有

有效边界  $AB$  有一个交点, 此交点  $F_1$  位于  $E$  轴的右侧, 模型(6)的有效边界为射线  $F_1B$  且其最优解的均值为式(9)。

b. 若斜率  $K_{AB} \leq K_{MN} < K_{AM}$ , 即  $\frac{\sqrt{H}}{z_\alpha - \sqrt{H}} \leq$

$\frac{Z_\beta}{z_\alpha - Z_\beta} < \frac{z_\alpha(R - r_f) + z_\beta r_f}{(z_\alpha - z_\beta)r_f}$ , 机会约束线如图 3 中

$MN_2$  所示, 其与有效边界  $AB$  无交点, 模型( $M$ )无有效边界, 所以没有最优解。

c. 若斜率  $K_{AM} \leq K_{MN}$ , 即  $\frac{z_\alpha(R - r_f) + \sqrt{H}r_f}{(z_\alpha - \sqrt{H})r_f}$

$\leq \frac{z_\beta}{z_\alpha - z_\beta}$ , 机会约束线如图 3 中  $MN_3$  所示, 其与有

效边界  $AB$  有一个交点, 此交点  $F_2$  位于  $E$  轴左侧, 模型(6)的有效边界为线段  $AF_2$  且其最优解的均值为  $r_f$ 。

#### 4 结束语

Markowitz 的均值-方差模型最初仅讨论风险资产, 有效边界是双曲线的一部分, 最优投资组合是有效边界上的一点, 后来引入无风险证券, 有效边界和最优投资组合发生了很大的变化。本文根据 Markowitz 的均值-方差模型的这一研究发展过程, 结合机会约束模型, 以期望收益率和置信水平为导向, 引入无风险证券, 建立了用 VaR 代替方差作为风险度量指标机会约束下的均值-VaR 投资组合模型, 讨论了模型最优解的存在性和唯一性及其

有效边界, 得到了模型最优解均值的解析表达式。

本文引入无风险证券, 借贷利率是相同的, 以后我们将进一步放松该前提假设, 讨论借贷利率不同时的含机会约束的均值——VaR 模型的最优解的存在唯一性及其模型的有效边界。同时含有交易费用, 或不允许卖空时等情况下的基于机会约束的均值——VaR 投资组合都将是下一步研究的方向。

#### 参考文献:

- [1] 菲利普·乔瑞(美)著, 陈跃等译. 风险价值 VaR(第二版)[M]. 北京, 中信出版社, 2005.
- [2] Charnes, A., Cooper, W. W, Chance-constrained Programming[J]. Management Science, 1959, 6(1): 73-7.
- [3] 韩其衡, 唐万生, 李光泉. 机会约束下的投资组合问题[J]. 系统工程学报, 2002, 17(1): 87-91.
- [4] 刘庆伟, 彭大衡. 投资机会与 VAR 约束下的投资组合分析[J]. 经济数学, 2002, 19(4): 80-85.
- [5] Alexander, G. J., Baptista, A. M., Economic implications of using a mean-VAR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis[J]. Journal of Economic Dynamic & Control, 2002, 26: 1159-1193.
- [6] Consigli G. Tail estimation and mean-VaR portfolio selection in markets subject to financial instability[J]. Journal of Banking & Finance, 2002, 26: 1355-1382.
- [7] 姚京, 李仲飞. 基于 VAR 的金融资产配置模型[J]. 中国管理科学, 2004, 12(1): 8-14.
- [8] 郭福华, 彭大衡, 吴健雄. 机会约束下的均值——VaR 投资组合模型[J]. 中国管理科学, 2004, 12(1): 28-34.

### The Study of A Mean-VaR Portfolio Model including Riskfree Security

AN Qi-Guang, WANG Hou-Jie

(Shandong Finance Institute, Jinan 250014, China)

**Abstract:** According to Markowitz's analysis of mean-VaR portfolio model and the constraint of investment chance model, under the assumption that the rates of return of portfolio are normal random variables, a mean-VaR portfolio model including riskfree securities is established under constraint of investment chance. Existence and uniqueness of the model's optimal solution are discussed on the base of mean-VaR model's effective border. We introduce the constraint of investment chance and obtained the explicit representation of the optimal solution.

**Key words:** riskfree security; portfolio; confidence level; constraint of investment chance; VaR