

# 二次 $D$ 稳定约束下不确定 T-S 模糊系统的 $L_\infty$ 鲁棒可靠控制

蔡俊伟<sup>1,2</sup>, 胡寿松<sup>3</sup>, 李志宇<sup>1</sup>

- (1. 南京航空航天大学自动化学院, 江苏 南京 210016;  
2. 中国电子科技集团公司第二十八研究所, 江苏 南京 210007;  
3. 南京航空航天大学飞行控制研究所, 江苏 南京 210016)

**摘要:** 针对一类受持续有界扰动的 T-S 不确定模糊系统, 提出了考虑执行器故障的鲁棒可靠控制器设计方法。引入基于  $L_\infty$  范数理论的鲁棒性能指标及二次  $D$  稳定的概念, 给出了鲁棒可靠控制器存在的充分条件。通过求解线性矩阵不等式完成可靠控制器的设计, 从而使系统即使在发生执行器故障的情况下仍能满足给定的  $L_\infty$  性能指标, 并且闭环系统二次  $D$  稳定。仿真实例表明了本方法的有效性。

**关键词:** T-S 模糊系统; 持续有界扰动; 二次  $D$  稳定; 线性矩阵不等式; 可靠控制

**中图分类号:** TP 273

**文献标志码:** A

## Robust reliable $L_\infty$ control for uncertain T-S fuzzy systems with quadratic $D$ stability constraints

CAI Jun-wei<sup>1,2</sup>, HU Shou-song<sup>3</sup>, LI Zhi-yu<sup>1</sup>

- (1. Coll. of Automation Engineering, Nanjing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;  
2. The 28th Inst. of China Electronics Technology Group Corporation, Nanjing 210017, China;  
3. Flight Control Inst., Nanjing Univ. of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** For a class of uncertain T-S systems with persistent bounded disturbances, a design method for robust reliable controllers against actuator faults is presented. By introducing a robust performance based on the theory of  $L_\infty$ -norm and the notion of quadratic  $D$  stability, a sufficient condition for the existence of the robust reliable controllers is obtained. The design of reliable controllers can be achieved by solving linear matrix inequalities (LMI), thus meeting the required  $L_\infty$ -norm performance index and making the closed-loop system be quadratic  $D$  stable even in the presence of actuator failures. Finally, a simulation example illustrates the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** T-S fuzzy system; persistent bounded disturbance; quadratic  $D$  stability; linear matrix inequality; reliable control

## 0 引言

现代工程系统若发生故障有可能造成人员和财产的巨大损失。为了提高系统的可靠性, 可靠控制得到了广泛的发展和重视<sup>[1-3]</sup>。然而, 仅保证故障系统的稳定性还不够, 还需考虑一些性能指标, 如鲁棒性、动态性等。目前, 大多数非线性系统的可靠控制研究成果仅考虑故障系统的稳定性<sup>[2]</sup>, 或者还考虑了对能量有界扰动的鲁棒性<sup>[3]</sup>, 对持续有界扰动具有鲁棒性及满足一定动态性的非线性系统可靠控制研究还未见报道。

利用模糊 T-S 模型对非线性系统进行建模和控制器设计, 已成为模糊控制领域的一个热点, 为解决非线性系统的容错控制提供了一条出路<sup>[2-3]</sup>。扰动是控制系统不稳定和动态性能恶化的重要根源。 $H_\infty$  控制可以有效地抑制扰动, 但要求扰动能量有界。在实际工程现场, 外扰是可能持续有界存在的, 将导致系统不稳定或性能恶化。文献[4-5]研究了非线性系统的  $L_\infty$  控制方法, 可抑制持续有界扰动对控制系统的影响, 但未考虑系统发生故障的情况, 且未考虑动态性。 $D$  域约束控制可以使控制系统具有一定的稳态和动态性。文献[6-7]研究了非线性系统的  $D$  域约束控制问题, 但

收稿日期: 2008-10-08; 修回日期: 2009-03-17。

基金项目: 国家自然科学基金(60234010); 航空科学基金(05E52031)资助课题

作者简介: 蔡俊伟(1980-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为可靠控制。E-mail: cjwnuaa@tom.com

未考虑系统发生故障的情况,且要求干扰能量有界。

本文针对一类受持续有界扰动的 T-S 不确定模糊系统,研究了使得执行器发生故障的闭环系统在二次  $D$  稳定约束下的  $L_\infty$  鲁棒容错控制问题。给出了基于 LMI 的控制器设计方法。所设计的控制器可保证系统即使在发生执行器故障的情况下,仍能抑制持续有界扰动对系统的影响,并保证一定的动态性能。最后,仿真实验验证了该方法的有效性。

### 1 问题描述

考虑如下由 T-S 模型所描述的不确定非线性系统

Plant rule  $i$ : If  $\theta_1(t)$  is  $F_1^i$  and  $\dots$  and  $\theta_n(t)$  is  $F_n^i$

$$\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + (B_{wi} + \Delta B_{wi}(t))w(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1)$$

式中,  $\theta_i(t)$  为模糊规则的前件变量;  $F_j^i$  表示模糊集合;  $r$  为 If-then 规则数;  $x(t) \in \mathbf{R}^n, u(t) \in \mathbf{R}^m, w(t) \in L_\infty$  分别表示状态向量、控制输入向量和  $w(t) \in L_\infty$  的扰动向量;  $A_i, B_i, B_{wi}$  是适维常值矩阵,  $\Delta A_i(t), \Delta B_i(t), \Delta B_{wi}(t)$  是适维时变矩阵,且满足范数有界条件

$$[\Delta A_i, \Delta B_i, \Delta B_{wi}] = HF(t)[E_{A_i}, E_{B_i}, E_{B_{wi}}] \quad (2)$$

式中,  $H, E_{A_i}, E_{B_i}, E_{B_{wi}}$  是维数已知的常数矩阵;  $F_i(t)$  是未知函数矩阵,其元素 Lebesgue 可测且满足  $F_i^T(t)F_i(t) \leq I$ 。

T-S 模糊系统(1)清晰化后的输出模型为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t))[(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + (B_{wi} + \Delta B_{wi}(t))w(t)] \quad (3)$$

式中,  $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)]$ ,  $h_i(\theta(t)) = \mu_i(\theta(t)) / \sum_{j=1}^r \mu_j(\theta(t))$ ,  $\mu_i(\theta(t)) = \prod_{j=1}^n F_j^i(\theta_j(t))$ ,  $F_j^i(\theta_j(t))$  是  $\theta_j(t)$  属于模糊集合  $F_j^i$  的隶属度。假设  $\mu_i(\theta(t)) \geq 0 (i = 1, 2, \dots, r)$ , 则  $h_i(\theta(t)) \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) = 1$ 。

考虑执行器故障模型

$$u^f(t) = Ru(t) \quad (4)$$

式中,故障矩阵  $R = \text{diag}[r_1, r_2, \dots, r_m], 0 \leq r_{-i} \leq r_i \leq \bar{r}_i, \bar{r}_i \leq 1 (i = 1, 2, \dots, m, r_{-i})$  和  $\bar{r}_i$  为给定的常数。  $r_i = 0$  表示第  $i$  个执行器完全失效,  $r_i = 1$  表示第  $i$  个执行器正常,  $0 \leq r_{-i} < r_i \leq \bar{r}_i$  且  $r_i \neq 1$  表示第  $i$  个执行器部分失效。

定义  $R_0 = \text{diag}[r_{10}, r_{20}, \dots, r_{m0}], r_{i0} = (\bar{r}_i + r_{-i})/2, R_1 = \text{diag}[r_{11}, r_{21}, \dots, r_{m1}], r_{i1} = (\bar{r}_i - r_{-i})/2$ 。因此  $R$  可表示为

$$R = R_0 + R_1 \Delta J \quad (5)$$

式中,  $\Delta J = \text{diag}[j_1, j_2, \dots, j_m], -1 \leq j_i \leq 1$ 。

为简化描述,令  $h_i \triangleq h_i(\theta(t))$ 。采用如下非线性状态反馈控制器

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i K_i x(t) \quad (6)$$

则包含了执行器故障的闭环系统为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_j + \Delta B_j(t))u(t) + (B_{wi} + \Delta B_{wi}(t))w(t)] \quad (7)$$

$$RK_j x(t) + (B_{wi} + \Delta B_{wi}(t))w(t)] \quad (7)$$

定义 1<sup>[4]</sup>  $L_\infty$  性能指标取为

$$\|x(t)\|_\infty \leq \rho \|w(t)\|_\infty, \forall w(t) \in L_\infty \quad (8)$$

若考虑初始条件的影响,则  $L_\infty$  性能指标为

$$\|x(t)\|_\infty \leq \beta \|x(0)\| + \rho \|w(t)\|_\infty, \forall w(t) \in L_\infty \quad (9)$$

式中,  $\beta > 0, L_\infty$  范数定义为  $\|x(t)\|_\infty \triangleq \sup_t |x(t)|, |x(t)| \triangleq \sqrt{x^T(t)x(t)}$ 。

定义 2<sup>[8]</sup> 若存在对称矩阵  $L \in \mathbf{R}^{m \times m}$  和矩阵  $M \in \mathbf{R}^{m \times m}$ , 使得  $D = \{s \in \mathbf{C}; L + sM + \bar{s}M^T < 0\}$ , 则称  $D$  域是一个线性矩阵不等式 (linear matrix inequality, LMI) 区域。矩阵值函数  $f_D(z) = L + sM + \bar{s}M^T$  称为  $D$  域的特征函数。

定义 3 系统(7)称为二次  $D$  稳定,若对于所有时间存在一个对称矩阵  $P$  满足

$$M_D(\hat{A}(x), P) = L \otimes P + M \otimes \hat{P}A(h) + M^T \otimes \hat{A}(h)P < 0 \quad (10)$$

式中,  $\hat{A}(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i + \Delta A_i(t) + (B_j + \Delta B_j(t))RK_j)$ , 符号  $\otimes$  表示 Kronecker 积。

本文的目标是设计可靠控制器(6),使故障闭环系统(7)二次  $D$  稳定,并满足  $L_\infty$  性能指标(9)。

引理 1<sup>[4]</sup> 若不等式  $\dot{w}(t) \leq -\zeta w(t) + \kappa v(t)$  成立,其中  $\zeta > 0, \kappa > 0$ , 则

$$w(t) \leq e^{-\zeta t} w(0) + \kappa \int_0^t e^{-\zeta(t-\tau)} v(\tau) d\tau \quad (11)$$

引理 2<sup>[8]</sup> 设  $U, V, W, X$  为适维常值矩阵,  $X$  为对称矩阵,且满足  $V^T V \leq I$ , 则  $X + UVW + W^T V^T U^T < 0$  的充分必要条件为存在标量  $\epsilon > 0$ , 使得  $X + \epsilon U U^T + \epsilon^{-1} W^T W < 0$ 。

引理 3 设  $U, V, W, X$  为适维常值矩阵,  $X$  为对称矩阵,且满足  $(I \otimes V^T)(I \otimes V) \leq I \otimes I$ , 则  $X + UVW + W^T V^T U^T < 0$  的充分必要条件为存在标量  $\epsilon > 0$ , 使得  $X + \epsilon U U^T + \epsilon^{-1} W^T W < 0$ 。

证明 根据 Kronecker 积性质知  $X > Y$  等价于  $I \otimes X > I \otimes Y$ 。由上述及 Kronecker 积性质可知  $V^T V \leq I$  等价于  $(I \otimes V^T)(I \otimes V) \leq I \otimes I$ , 据此并由引理 2, 该引理得证。

### 2 主要结果

定理 1 给定正常数  $\alpha, c$ , 若存在正定矩阵  $Q$ , 矩阵  $Y_i$  及标量  $\epsilon_{1ij} > 0, \epsilon_{2ij} > 0 (i, j = 1, 2, \dots, r)$ , 使下列 LMI 有解

$$\begin{bmatrix} \phi_{1ij} & B_{wi} & \phi_{13ij} & Y_j^T \\ * & -cI & E_{B_{wi}}^T & 0 \\ * & * & \phi_{33ij} & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_{2ij} I \end{bmatrix} < 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (12)$$

式中, “\*” 表示对称位置上元素的转置;

$$\phi_{11ij} = A_i Q + B_i R_0 Y_j + Q A_i^T + Y_j^T R_0 B_i^T +$$

$$\alpha Q + \epsilon_{1ij} H H^T + \epsilon_{2ij} B_i R_1 R_1 B_i^T$$

$$\phi_{33ij} = Q E_{A_i}^T + Y_j^T R_0 E_{B_i}^T + \epsilon_{2ij} B_i R_1 R_1 B_i^T$$

$$\Phi_{3ij} = -\epsilon_{1ij} \mathbf{I} + \epsilon_{2ij} \mathbf{E}_B \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{E}_B^T$$

则存在  $L_\infty$  模糊可靠控制器(6)使得闭环系统(7)满足  $L_\infty$  性能指标(9),其中

$$\beta = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{Q}^{-1})/\lambda_{\min}(\mathbf{Q}^{-1})}, \rho = \sqrt{c/(\alpha\lambda_{\min}(\mathbf{Q}^{-1}))}$$

控制器增益矩阵  $\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{Q}^{-1}$ 。

证明 由闭环系统(7),可得

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{P}^{1/2} \mathbf{x}(t)|^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12i} \\ * & -c\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} - \alpha \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + c \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) \quad (13)$$

式中,  $\Gamma_{11} = \mathbf{P}(\mathbf{A}_i + \Delta \mathbf{A}_i(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{R} \mathbf{K}_j + \Delta \mathbf{B}_i(t) \mathbf{R} \mathbf{K}_j) + (\mathbf{A}_j + \Delta \mathbf{A}_j(t) + \mathbf{B}_j \mathbf{R} \mathbf{K}_i + \Delta \mathbf{B}_j(t) \mathbf{R} \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P} + \alpha \mathbf{P}$ ,  $\Gamma_{12i} = \mathbf{P}(\mathbf{B}_{wi} + \Delta \mathbf{B}_{wi}(t))$ 。

令  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ ,  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{K}_i \mathbf{Q}$ , 对 LMI(12)左右乘以  $\text{diag}[\mathbf{P}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$ , 并根据 Schur 补、式(5)及引理 2 可得与 LMI(12)等价的不等式组

$$\begin{bmatrix} \Phi_{211ij} & \mathbf{P} \mathbf{B}_{wi} & \Phi_{213ij} \\ * & -c\mathbf{I} & \mathbf{E}_B^T \\ * & * & -\epsilon_{1ij} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r \quad (14)$$

式中,  $\Phi_{211ij} = \mathbf{P}(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{R} \mathbf{K}_j) + (\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{R} \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P} + \alpha \mathbf{P} + \epsilon_{1ij} \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{P}$ ,  $\Phi_{213ij} = (\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B \mathbf{R} \mathbf{K}_j)^T$ 。

根据引理 2 及式(2),不等式组(14)等价于

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \mathbf{P}(\mathbf{B}_{wi} + \Delta \mathbf{B}_{wi}(t)) \\ * & -c\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r \quad (15)$$

至此可知若 LMI(12)成立,则不等式(15)组成立。由

不等式组(15)、式(13)及  $h_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^r h_i = 1$  可知,若 LMI(12)成立,则

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{P}^{1/2} \mathbf{x}(t)|^2 \leq -\alpha \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + c \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) \quad (16)$$

根据引理 1 可得

$$|\mathbf{P}^{1/2} \mathbf{x}(t)|^2 \leq e^{-\alpha t} |\mathbf{P}^{1/2} \mathbf{x}(0)|^2 + c \int_0^t e^{-\alpha \tau} |\mathbf{w}(t - \tau)|^2 d\tau$$

由上述不等式,  $\lambda_{\min}(\mathbf{P}) |\mathbf{x}(t)|^2 \leq |\mathbf{P}^{1/2} \mathbf{x}(t)|^2$  及  $L_\infty$  范数的性质可得

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}(t)\|_\infty^2 \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) |\mathbf{x}(0)|^2 + \frac{c}{\alpha} \|\mathbf{w}(t)\|_\infty^2$$

因此,  $\|\mathbf{x}(t)\|_\infty \leq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{P})/\lambda_{\min}(\mathbf{P})} |\mathbf{x}(0)| + \sqrt{c/(\alpha \lambda_{\min}(\mathbf{P}))} \cdot \|\mathbf{w}(t)\|_\infty$ 。定理 1 得证。

定理 2 若存在正定矩阵  $\mathbf{X}$ 、矩阵  $\mathbf{Y}_i$  及标量  $\epsilon_{ij} > 0$ ,  $\mu_{ij} > 0 (i, j = 1, 2, \dots, r)$ , 使下列 LMI 有解

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11ij} & \Psi_{112ij} & \mathbf{I} \otimes \mathbf{Y}_j^T \\ * & \Psi_{122ij} & 0 \\ * & * & -\mu_{ij} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r \quad (17)$$

$\Psi_{11ij} = \mathbf{L} \otimes \mathbf{X} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{B}_i \mathbf{R}_0 \mathbf{Y}_j) + \mathbf{M}^T \otimes (\mathbf{A}_j \mathbf{X} + \mathbf{B}_j \mathbf{R}_0 \mathbf{Y}_i)^T + \epsilon_{ij} (\mathbf{M} \mathbf{M}^T) \otimes (\mathbf{H} \mathbf{H}^T) + \mu_{ij} (\mathbf{M} \mathbf{M}^T) \otimes (\mathbf{B}_i \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{B}_i^T)$ ,

$\Psi_{112ij} = \mathbf{I} \otimes (\mathbf{X} \mathbf{E}_A^T + \mathbf{Y}_j^T \mathbf{R}_0 \mathbf{E}_B^T) + \mu_{ij} \mathbf{M} \otimes (\mathbf{B}_i \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{E}_B^T)$ ,  $\Psi_{122ij} = -\epsilon_{ij} \mathbf{I} + \mu_{ij} (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{E}_B \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{E}_B^T))$ , 则存在二次  $D$  稳定模糊可靠控制器(6), 控制器增益矩阵  $\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{X}^{-1}$ 。

证明 由定义 3 可知, 正定对称矩阵  $\mathbf{P}$  满足

$$\mathbf{M}_D(\hat{\mathbf{A}}(x), \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{P}(\mathbf{A}_i + \Delta \mathbf{A}_i(t) + (\mathbf{B}_i + \Delta \mathbf{B}_i(t)) \mathbf{R} \mathbf{K}_j)) + \mathbf{M}^T \otimes ((\mathbf{A}_i + \Delta \mathbf{A}_i(t) + (\mathbf{B}_i + \Delta \mathbf{B}_i(t)) \mathbf{R} \mathbf{K}_j)^T \mathbf{P})] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Gamma_{ij} < 0$$

可保证系统(7)二次  $D$  稳定。由  $h_i \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^r h_i = 1$  可知  $\Gamma_{ij} < 0$ ,

可保证  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Gamma_{ij} < 0$  成立。

将式(2)代入  $\Gamma_{ij}$ , 并根据 Kronecker 积的性质, 可得

$$\Gamma_{ij} = \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{P}(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{R} \mathbf{K}_j)) + \mathbf{M}^T \otimes ((\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{R} \mathbf{K}_j)^T \mathbf{P}) + (\mathbf{M} \otimes (\mathbf{P} \mathbf{H})) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}(t)) (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B \mathbf{R} \mathbf{K}_j)) + (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B \mathbf{R} \mathbf{K}_j))^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}(t))^T (\mathbf{M} \otimes (\mathbf{P} \mathbf{H}))^T \quad (18)$$

应用引理 3 并根据 Kronecker 积的性质及 Schur 补, 式(18)小于零等价于

$$\begin{bmatrix} \Psi_{211ij} & \mathbf{I} \otimes (\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B \mathbf{R} \mathbf{K}_j)^T \\ * & -\epsilon_{ij} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

式中,  $\Psi_{211ij} = \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{P}(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{R} \mathbf{K}_j)) + \mathbf{M}^T \otimes ((\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{R} \mathbf{K}_j)^T \mathbf{P}) + \epsilon_{ij} (\mathbf{M} \mathbf{M}^T) \otimes (\mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{P})$ 。

根据引理 3、Schur 补及 Kronecker 积的性质可知, 存在标量  $\mu_{ij} > 0$ , 不等式(19)等价于

$$\begin{bmatrix} \Psi_{311ij} & \Psi_{312ij} & \mathbf{I} \otimes \mathbf{K}_j^T \\ * & \Psi_{322ij} & 0 \\ * & * & -\mu_{ij} \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} \Psi_{311ij} &= \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{P}(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{R}_0 \mathbf{K}_j)) + \mathbf{M}^T \otimes ((\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{R}_0 \mathbf{K}_j)^T \mathbf{P}) + \epsilon_{ij} (\mathbf{M} \mathbf{M}^T) \otimes (\mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{P}) + \mu_{ij} (\mathbf{M} \mathbf{M}^T) \otimes (\mathbf{P} \mathbf{B}_i \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}) \\ \Psi_{312ij} &= \mathbf{I} \otimes (\mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B \mathbf{R}_0 \mathbf{K}_j)^T + \mu_{ij} \mathbf{M} \otimes (\mathbf{P} \mathbf{B}_i \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{E}_B^T) \\ \Psi_{322ij} &= -\epsilon_{ij} \mathbf{I} + \mu_{ij} \mathbf{I} \otimes (\mathbf{E}_B \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{E}_B^T) \end{aligned}$$

对不等式(20)左右乘以  $\text{diag}[\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$ , 并令  $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ ,  $\mathbf{K}_j \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Y}_j$ , 可得不等式(17), 不等式(17)成立即可保证  $\Gamma_{ij} < 0$ 。定理 2 得证。

注 1 当  $D$  域为左半平面垂直带  $\text{Re}(s) < -\alpha$  时, 定理 2 中  $\mathbf{L} = 2\alpha$ ,  $\mathbf{M} = 1$ ; 当  $D$  域为中心为  $-(q, 0)$ , 半径为  $d$  的圆盘区域时, 定理 2 中

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -d & q \\ q & -d \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注 2 若  $D$  域为左半平面垂直带  $\text{Re}(s) < -\alpha$ , 系统衰减率至少为  $\alpha$ 。若圆盘  $D$  域中心为  $(-q, 0)$ , 半径为  $d$ , 系统衰减率在  $-2(q+d)$  和  $-2(q-d)$  之间, 系统状态变化率  $\zeta =$

$\sqrt{q^2 - d^2}/q$  满足  $\zeta \int_0^{T_r} \sqrt{\dot{x}^T(t) X \dot{x}(t)} dt < \sqrt{V(x(0))}$ , 其中  $X$  为正定矩阵。对于圆盘区域  $0 \leq \zeta < 1$ ,  $\zeta$  起着与线性系统阻尼比相同的作用。

**注 3** 非线性系统的动态性能通过衰减率和变化率  $\zeta$  来描述。非线性系统的衰减率和  $\zeta$  分别起着和线性系统的  $-\xi\omega_n$  和阻尼比相同的作用。

**定理 3** 给定正常数  $\alpha, c$ , 若存在正定矩阵  $X$ , 矩阵  $Y_i$  以及标量  $\epsilon_{1ij} > 0, \epsilon_{2ij} > 0, \epsilon_{3ij} > 0, \mu_{ij} > 0 (i, j = 1, 2, \dots, r)$ , 使下列 LMI 有解

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11ij} & B_{wi} & \Sigma_{13ij} & Y_j^T \\ * & -cI & E_{B_{wi}}^T & 0 \\ * & * & \Sigma_{33ij} & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_{2ij}I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11ij} & \Xi_{12ij} & I \otimes Y_j^T \\ * & \Xi_{13ij} & 0 \\ * & * & -\mu_{ij}I \end{bmatrix} < 0, i, j = 1, 2, \dots, r \quad (22)$$

式中

$$\begin{aligned} \Sigma_{11ij} &= A_i X + B_i R_0 Y_j + X A_i^T + Y_j^T R_0 B_i^T + \alpha X + \epsilon_{1ij} H H^T + \\ &\epsilon_{2ij} B_i R_1 R_1 B_i^T, \Sigma_{13ij} = X E_{A_i}^T + Y_j^T R_0 E_{B_i}^T + \epsilon_{2ij} B_i R_1 R_1 E_{B_i}^T, \\ \Sigma_{33ij} &= -\epsilon_{1ij} I + \epsilon_{2ij} E_{B_i} R_1 R_1 E_{B_i}^T, \\ \Xi_{11ij} &= L \otimes X + M \otimes (A_i X + B_i R_0 Y_j) + \\ &M^T \otimes (A_i X + B_i R_0 Y_j)^T + \epsilon_{3ij} (M M^T) \otimes (H H^T) + \\ &\mu_{ij} (M M^T) \otimes (B_i R_1 R_1 B_i^T), \\ \Xi_{12ij} &= I \otimes (X E_{A_i}^T + Y_j^T R_0 E_{B_i}^T) + \\ &\mu_{ij} M \otimes (B_i R_1 R_1 E_{B_i}^T), \\ \Xi_{13ij} &= -\epsilon_{3ij} I + \mu_{ij} (I \otimes (E_{B_i} R_1 R_1 E_{B_i}^T)) \end{aligned}$$

则存在二次 D 稳定约束  $L_\infty$  模糊鲁棒可靠控制器(6), 控制器增益矩阵  $K_i = Y_i X^{-1}$ 。

**证明** 令定理 1 中的变量  $Q$  等于定理 2 中的变量  $X$ , 定理 3 得证。

**推论 1** 给定正常数  $\alpha, c$ , 若存在正定矩阵  $X$ , 矩阵  $Y_i$  以及标量  $\epsilon_{1ij} > 0, \epsilon_{2ij} > 0$ , 使下列 LMI 有解

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11ij} & B_{wi} & X E_{A_i}^T + Y_j^T E_{B_i}^T \\ * & -cI & E_{B_{wi}}^T \\ * & * & -\epsilon_{1ij}I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11ij} & I \otimes (X E_{A_i}^T + Y_j^T E_{B_i}^T) \\ * & -\epsilon_{2ij}I \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

$i, j = 1, 2, \dots, r$

式中

$$\begin{aligned} \Theta_{11ij} &= A_i X + B_i Y_j + X A_i^T + Y_j^T B_i^T + \alpha X + \epsilon_{1ij} H H^T \\ \Xi_{11ij} &= L \otimes X + M \otimes (A_i X + B_i Y_j) + M^T \otimes \\ &(A_i X + B_i Y_j)^T + \epsilon_{2ij} (M M^T) \otimes (H H^T) \end{aligned}$$

则存在次 D 稳定约束  $L_\infty$  模糊鲁棒标准器(6)控制器增益矩阵  $K_i = Y_i X^{-1}$ 。

**证明** 令  $R=I$ , 类似定理 3 证明过程可得证, 此处省略。

### 3 仿真实例

考虑如下小车倒立摆系统<sup>[4]</sup>

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g \sin(x_1) - a n l x_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1) u}{4l/3 - a n l \cos^2(x_1)} + 0.1 \omega(t)$$

式中,  $x_1$  表示摆偏离垂直位置的角度;  $x_2$  表示角速度;  $\omega(t)$  表示外扰;  $g=9.8 \text{ m/s}^2$  为重力常数;  $a=1/(m+M)$ ,  $m$  是摆的质量,  $M$  是推车质量;  $2l$  是摆的长度;  $u$  是作用在小车上的力。参数选为  $m=2 \text{ kg}, M=8 \text{ kg}, 2l=1 \text{ m}, \omega(t)$  为幅值为 5, 周期为 2 s 的持续方波扰动。分别在  $x_1(t)$  为  $0^\circ$  和  $80^\circ$  附近线性化, 选取模糊隶属函数为  $h_1(x_1(t)) = 1 - \frac{2}{\pi} |x_1(t)|, h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t))$ , 可得 T-S 模糊模型如式(1)所示, 其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - a n l} & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{9g}{4\pi(4l/3 - a n l \beta^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - a n l} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a \beta}{4l/3 - a n l \beta^2} \end{bmatrix}$$

$$B_{w_1} = B_{w_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{A_1} = E_{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{B_1} = E_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

令  $\alpha=1, c=1, r=0, \bar{r}=1$ 。考虑  $D$  域为左半平面垂直带  $\text{Re}(s) < -0.2$ , 根据定理 3, 可得二次 D 稳定约束  $L_\infty$  模糊鲁棒可靠控制器增益  $K_1 = K_2 = [1 \ 084.09, 119.59]$ ,  $L_\infty$  性能指标参数  $\beta=2.82, \rho=0.42$ 。由推论 1, 可得二次 D 稳定约束下  $L_\infty$  模糊标准控制器增益  $K_1 = K_2 = [455.30, 209.25]$ ,  $L_\infty$  性能指标参数  $\beta=2.36, \rho=0.39$ 。

图 1 给出了可靠控制器作用下系统正常和发生故障(4 s 时发生故障,  $R=0.2$ )时状态 1 的响应曲线。从图中可看出当系统正常及发生故障时, 所设计的可靠控制器可保证系统渐近稳定, 具有较好的  $L_\infty$  性能和动态性能。

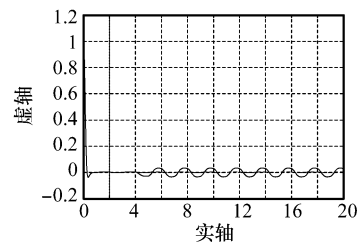


图 1 可靠控制器作用下系统正常和故障状态 1 响应

图 2 和图 3 分别给出了标准控制器作用下极点分布情况,“×”代表系统正常时的极点,“。”代表发生执行器故障时的极点,可见标准控制器作用下故障闭环系统极点跳出了指定的  $D$  域。

图 4 和图 5 分别给出了模糊可靠控制器作用下子系统 1 和 2 的极点分布情况,可见可靠控制器作用下正常和故障的闭环系统极点都在指定的  $D$  域内。

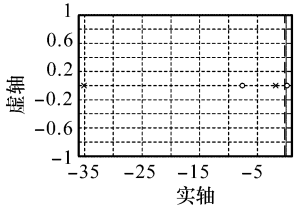


图 2 标准控制器作用下系统正常和故障子系统 1 极点分布

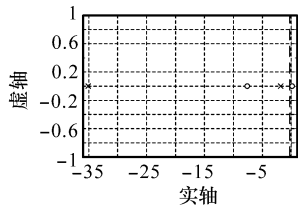


图 3 标准控制器作用下系统正常和故障子系统 2 极点分布

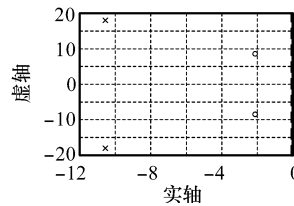


图 4 可靠控制器作用下系统正常和故障子系统 1 极点分布

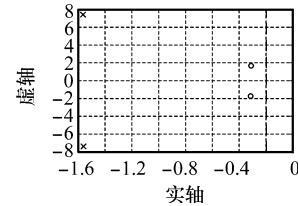


图 5 可靠控制器作用下系统正常和故障子系统 2 极点分布

## 4 结束语

本文针对一类受持续有界扰动的 T-S 不确定模糊系

(上接第 141 页)

统,基于 LMI,给出了二次  $D$  稳定约束下  $L_\infty$  鲁棒可靠控制器的设计方法。所设计的控制器可保证系统即使在发生执行器故障的情况下,仍能抑制持续有界扰动对系统的影响,并保证一定的动态性能。最后仿真实例说明了不对系统进行可靠设计,若一旦系统发生故障,闭环极点可能脱离指定的区域。若对系统进行可靠设计,无论系统发生故障与否,闭环极点均在指定的区域内。

线是实际跟踪的轨迹,图中两条线已基本完全重合。从上面仿真图可以看出,追踪航天器在本文设计的控制器作用下,满足推力上界约束就能够准确、快速地达到期望的运动轨迹,实现对最优交会轨迹的跟踪。

## 4 结论

本文讨论了航天器轨迹跟踪的控制器设计问题,在空间交会状态空间模型的基础上,通过分析航天器的轨道动力学方程,给出了空间最省燃料交会轨迹和空间最优交会轨迹跟踪控制问题的数学描述。利用线性系统的特征结构配置理论和模型参考跟踪理论提出了一种空间最优交会轨迹跟踪控制的参数化方法。文中对航天器最优轨迹跟踪控制进行了仿真。仿真结果表明,追踪航天器在本文设计的控制器作用下,满足推力上界约束就能够准确、快速地达到期望的运动轨迹,验证了本文所提控制方案的有效性。

## 参考文献:

[1] Lembeck C A, Prussing J E. Optimal impulsive intercept with low-thrust rendezvous return[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamic*, 1993, 16(3): 426 - 433.

统,基于 LMI,给出了二次  $D$  稳定约束下  $L_\infty$  鲁棒可靠控制器的设计方法。所设计的控制器可保证系统即使在发生执行器故障的情况下,仍能抑制持续有界扰动对系统的影响,并保证一定的动态性能。最后仿真实例说明了不对系统进行可靠设计,若一旦系统发生故障,闭环极点可能脱离指定的区域。若对系统进行可靠设计,无论系统发生故障与否,闭环极点均在指定的区域内。

## 参考文献:

[1] Veilette R J. Reliable linear quadratic state-feedback control[J]. *Automatica*, 1995, 31(1): 137 - 143.  
 [2] Chen B, Liu X P. Reliable control design of fuzzy dynamic systems with time-varying delay[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, 146(3): 349 - 374.  
 [3] Wu H N, Zhang H Y. Reliable  $H_\infty$  fuzzy control for continuous-time nonlinear systems with actuator failures[J]. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2006, 14(5): 609 - 618.  
 [4] Tseng C S, Hwang C K. Fuzzy observer-based fuzzy control design for nonlinear systems with persistent bounded disturbance[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(2): 164 - 179.  
 [5] 陶洪峰,胡寿松,蔡俊伟. 变时滞 T-S 模糊系统的  $L_\infty$  静态输出反馈控制[J]. *自动化学报*, 2008, 34(4): 453 - 459.  
 [6] Assawinchaichote W, Nguang S K, Shi P, et al.  $H_\infty$  fuzzy state-feedback control design for nonlinear systems with  $D$ -stability constraints: An LMI approach[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, 78(4): 514 - 531.  
 [7] 刘飞,苏宏业,褚健. 基于模糊模型的不确定非线性系统鲁棒  $D$  镇定[J]. *控制与决策*, 2002, 17(5): 532 - 535.  
 [8] Wang Y, Xie L, Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems[J]. *Systems and Control Letter*, 1992, 19(1): 139 - 149.

[2] Guelman M, Aleshin M. Optimal bounded low-thrust rendezvous with fixed terminal-approach direction[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamic*, 2001, 24(2): 378 - 385.  
 [3] Park C, Guibout V, Scheeres D. Solving optimal continuous thrust rendezvous problems with generating functions[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamic*, 2006, 29(2): 321 - 331.  
 [4] Bevilacqua R, Romano M. Fuel-optimal spacecraft rendezvous with hybrid on-off continuous and impulsive thrust[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamic*, 2007, 30(4): 1175 - 1178.  
 [5] Duan G R, Liu W Q, Liu G P. Robust model reference control for multivariable linear systems: a parametric approach[J]. *Journal of Systems and Control Engineering, Part 1 of The Transaction the Institute of Mechanical Engineers*, 2001, 215: 599 - 610.  
 [6] Duan G R. Solutions to matrix equation  $AV + BW = VF$  and their application to eigenstructure assignment in linear systems[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1993, 38(2): 276 - 280.  
 [7] Duan G R. Solution to matrix equation  $AV + BW = EVF$  and eigenstructure assignment for descriptor systems[J]. *Automatica*, 1992, 28(3): 639 - 643.