文章编号：1001-506X(2010)01-0147-05

基于 LMI 的不确定时滞切换广义系统的保成本控制

顾则全[1]，刘贺平[1]，廖福成[2]，王允建[1]
（1. 北京科技大学信息工程学院，北京 100083；
2. 北京科技大学应用科学学院，北京 100083）

摘 要：研究了一类具有状态时滞不确定性的切换广义系统在任意切换策略下的二次稳定保成本控制问题。利用线性矩阵不等式(linear matrix inequality，LMI)技术，给出了状态反馈保成本控制器存在的充分条件，使得所研究的时滞不确定切换广义系统是可行的，并满足相应的性能指标。进一步将保成本控制器的设计问题转化为线性矩阵不等式的可行解问题。数值仿真算例说明了该方法的有效性。

关键词：切换广义系统；不确定性；时滞；保成本控制；二次稳定性；线性矩阵不等式
中图分类号：TP 273 **文献标志码**：A

Guaranteed cost control for uncertain time-delay switched singular systems based on LMI

GU Ze-quan[1], LIU He-ping[1], LIAO Fu-cheng[2], WANG Yun-jian[1]
(1. *Information Engineering School, Univ. of Science & Technology Beijing, Beijing 100083, China*;
2. *Applied Science School, Univ. of Science & Technology Beijing, Beijing 100083, China*)

Abstract: The guaranteed cost control problem of quadratic stabilization for a class of uncertain time-delay switched singular systems under arbitrary switching laws is studied. Based on linear matrix inequality technique, a sufficient condition on the existence of guaranteed cost state feedback controllers is derived, which assures that the uncertain time-delay switched singular system is admissible, and a corresponding cost index can be guaranteed. The design problem of the guaranteed cost controller can be turned into the solvable problem of a set of linear matrix inequalities. A numerical simulation example is employed to illustrate the effectiveness of this approach.

Keywords: switched singular system; uncertainty; time-delay; guaranteed cost control; quadratic stability; linear matrix inequality

0 引 言

广义系统是一类更一般化，并有着广泛应用背景的动力系统。它区别于一般的正常系统，具有自身一些重要的特点，因此大量出现在许多实际的系统模型中，例如电力系统、能源系统、航天工程、化学过程、经济系统、社会系统和生物系统等[1]。从 20 世纪 70 年代以来，广义系统始终是众多学者研究的热点[2-4]。同时，由于测量灵敏度不够、信息传输延时和元件的老化等原因，系统中存在不确定因素和时滞现象是极其普遍的。正是由于时滞在实际系统中大量存在，以及时滞系统分析和控制的困难性，使得时滞系统的分析和综合一直是控制理论与控制工程领域中研究的一个热点问题[5-6]。

与广义系统和时滞系统蓬勃发展情况相类似的是切换系统的研究。切换系统是一类模型简单而研究较多的混杂动态系统，一般由一组连续微分方程描述的子系统以及作用在其中的切换规则构成，近年来引起了人们极大的关注[7-12]。切换系统有着广泛的实际背景，它可以应用于受约束机器人控制和车摆系统的控制等复杂系统的描述和控制。因此，对切换系统的研究具有重要的理论价值和实际意义。另一方面，在实际控制系统设计中，不仅要求控制系统闭环稳定，而且要求闭环系统满足一定的性能指标。自

收稿日期：2008－11－16；**修回日期**：2009－04－08。
基金项目：国家自然科学基金(10671011)；北京市教委重点学科共建项目(XK100080537)资助课题
作者简介：顾则全(1981－)，男，博士研究生，主要研究方向为切换系统、广义系统、鲁棒控制。E-mail：guzequan@163.com

1972 年 Chang 和 Peng 首次提出了不确定系统保性能控制(亦即保成本控制)的思想[13]以来,保性能控制引起许多学者的极大兴趣[14-17]。

目前研究的切换系统,其子系统都是正常的线性或非线性系统,而关于切换广义系统的研究却不多见。文献[18]研究了线性切换广义系统的能达性问题,并得到了线性切换广义系统能达的一个必要条件;文献[19]给出了一类由任意有限个子系统组成的切换广义系统容许控制器的设计方法;文献[20-21]应用共同 Lyapunov 函数方法,分别研究了一类离散和连续线性切换广义系统在任意切换律下的稳定性问题;文献[22] 应用共同 Lyapunov 函数法和凸组合技术,给出了线性矩阵不等式表示的控制器存在的充分条件。本文主要研究了含有状态时滞的不确定切换广义系统的二次稳定保成本控制问题,利用 Lyapunov 稳定性理论以及线性矩阵不等式的知识,给出了在任意的切换策略下,状态反馈保成本控制器存在的充分条件及控制器的设计方案。

1 准备知识

1.1 广义系统

考虑如下的不确定时滞广义系统

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t))\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}_d+\Delta\boldsymbol{A}_d(t))\boldsymbol{x}(t-d)+\\ &\quad (\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B}(t))\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-d,0]\end{aligned} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为系统的状态,$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 是控制输入;$d>0$ 是滞后的时间常数;$\boldsymbol{\phi}(t)$是给定的初始向量值连续函数;$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{A}_d$、$\boldsymbol{B}$ 为适当维数矩阵且 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{E}=r<n$;$\Delta\boldsymbol{A}(t)$、$\Delta\boldsymbol{A}_d(t)$、$\Delta\boldsymbol{B}(t)$为系统的不确定项,并且假设它们具有如下结构:$[\Delta\boldsymbol{A}(t)\quad \Delta\boldsymbol{A}_d(t)\quad \Delta\boldsymbol{B}(t)]=\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)[\boldsymbol{G}_1\quad \boldsymbol{G}_d\quad \boldsymbol{G}_2]$,$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{G}_1$、$\boldsymbol{G}_d$、$\boldsymbol{G}_2$ 为适当维数的已知常数矩阵,$\boldsymbol{F}(t)$是未知函数矩阵,且满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$。

系统(1)的无控制标称系统为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(t-d),\\ \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-d,0]\end{aligned} \tag{2}$$

在问题描述过程中,需要以下定义和引理:

定义 1[1]

(1) 矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$称为正则的,如果存在标量 $\lambda\in\mathbf{C}$,使得 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\neq0$;

(2) 矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$称为无脉冲的,如果 $\deg(\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}))=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{E}$。

引理 1[5] 如果矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$是正则的且无脉冲,则时滞广义系统(2)在$[0,+\infty)$上存在唯一解,且无脉冲。

定义 2[5]

(1) 时滞广义系统(2)称为正则的且无脉冲,如果$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$正则且无脉冲;

(2) 时滞广义系统(2)称为是稳定的,如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$,使得对于满足 $\sup\limits_{-d\leqslant t\leqslant0}\|\boldsymbol{\phi}(t)\|\leqslant\delta(\varepsilon)$的任意相容初始条件$\boldsymbol{\phi}(t)$,系统(2)的解 $\boldsymbol{x}(t)$满足 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\varepsilon$ 且 $\boldsymbol{x}(t)\to0(t\to\infty)$。

引理 2[16] 时滞广义系统(2)是正则的,无脉冲且稳定,如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对称矩阵 $\boldsymbol{Q}>0$,使得

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\geqslant0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}<0 \tag{4}$$

定义 3[16] 时滞广义系统(1)称为是鲁棒稳定的($\boldsymbol{u}(t)\equiv0$),如果对任意满足 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$ 的未知矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$,系统是正则、无脉冲且稳定的。一般地,$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{E}=r<n$,为确保系统(1)存在唯一解,恒假定系统(1)是正则的,即 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\neq0$。

1.2 切换广义系统

线性切换广义系统可表示为

$$\boldsymbol{E}_{\sigma(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_{\sigma(t)}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_{\sigma(t)}\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}(t),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{5}$$

式中,切换规则 $\sigma(t):[0,+\infty)\to M=\{1,2,\cdots,m\}$是分段常值函数,$\sigma(t)=i$ 表明系统此时切换到第 i 个子系统,$i\in M$;$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量;$\boldsymbol{u}_i\in\mathbf{R}^{m_i}$ 为控制输入向量;$\boldsymbol{E}_i$,$\boldsymbol{A}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}$为定常矩阵,$\boldsymbol{B}_i$ 为具有适当维数的定常矩阵,且 $\boldsymbol{E}_i$ 为奇异阵,$\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{D}\subset\mathbf{R}^n$ 为一致初始状态。

当 $\boldsymbol{E}_i$ 非奇异时,系统退化为一般意义下的线性切换系统。

定义 4 对具有一致初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 的某一切换序列 $\pi=\{\boldsymbol{x}_0;(i_0,t_0),\cdots,(i_n,t_n),\cdots,|i_k\in M,k\in N\}$,若系统存在唯一的状态响应 $\boldsymbol{x}(t)$,且当 $t\in\lfloor t_j,t_{j+1}\rfloor$时,$\boldsymbol{x}(t)$满足$\boldsymbol{E}_{ij}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}(t)$,在切换时刻满足 $\boldsymbol{x}(t_j)=\boldsymbol{H}_j\boldsymbol{x}(t_j^-)$,则称 $\boldsymbol{x}(t)$是系统在切换律 π 下的解,其中 $\boldsymbol{H}_j\in\mathbf{R}^{n\times n}$为定常矩阵,$j\in\{1,2,\cdots\}$。

注 1 对于广义系统来说,不是任何的初始状态都是允许的,即使系统无脉冲,也可能由于非一致初始状态而产生脉冲解。为了避免上述情况发生,本文假定每个子系统正则且无脉冲时,$\boldsymbol{H}_j$ 能够确保系统不产生脉冲解,即 $\boldsymbol{x}(t_j)=\boldsymbol{H}_j\boldsymbol{x}(t_j^-)$是第 t_j 个子系统的一致初始状态。实际上,一般的切换系统也存在解不连续(状态跳跃)的情形。

定义 5 对线性切换广义系统(5),若 $\boldsymbol{u}_i(t)\equiv0(\forall i\in M)$,当 $t\to\infty$时,有 $\boldsymbol{x}(t)\to0$,则称系统(5)在切换律 π 下渐近稳定。

2 主要结果

考虑如下不确定时滞切换广义系统

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})\boldsymbol{x}(t-d)+\\ &\quad (\boldsymbol{B}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i)\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-d,0]\end{aligned} \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为系统的状态;$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 为系统的输入;$d>0$是系统的滞后时间常数;$\boldsymbol{\phi}(t)$是给定的初始向量值连续函数;对切换规则 $\sigma(t)=i\in M$,式(6)表示系统此时切换到第 i 个子系统;$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}_i$、$\boldsymbol{A}_{di}\in\mathbf{R}^{n\times n}$为定常矩阵,$\boldsymbol{B}_i$ 是适当维数矩阵且 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{E}=r<n$;$\Delta\boldsymbol{A}_i$,$\Delta\boldsymbol{A}_{di}$,$\Delta\boldsymbol{B}_i$ 为系统的不确定项,且具有如下结构

$$[\Delta\boldsymbol{A}_i\quad \Delta\boldsymbol{A}_{di}\quad \Delta\boldsymbol{B}_i]=\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{\Gamma}_i(t)[\boldsymbol{G}_{1i}\quad \boldsymbol{G}_{di}\quad \boldsymbol{G}_{2i}] \tag{7}$$

$\boldsymbol{D}_i$、$\boldsymbol{G}_{1i}$、$\boldsymbol{G}_{di}$、$\boldsymbol{G}_{2i}$为适当维数矩阵,$\boldsymbol{\Gamma}_i(t)$为未知函数矩阵,且满足 $\boldsymbol{\Gamma}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}_i(t)\leqslant\boldsymbol{I}$。

针对不确定时滞切换广义系统(6),引入成本函数

$$J=\int_0^{+\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm dt \tag{8}$$

式中，对称阵 $\boldsymbol{S}>0$，$\boldsymbol{R}>0$ 为给定的加权矩阵。

对系统(6)，取控制律 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}(t)$，其中 $\boldsymbol{K}_i(i\in M)$ 是控制器增益，则相应的闭环切换广义系统是

$$\begin{gathered}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}(t)+\\(\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})\boldsymbol{x}(t-d)\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-d,0]\end{gathered}\tag{9}$$

定义 6　称闭环系统(9)是二次稳定的，如果存在反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}_i$，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 以及对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得对满足所有不确定项的 $\boldsymbol{\Gamma}_i(t)(i\in M)$，有式(3)及下列不等式组成立

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Omega}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Omega}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})\boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\\(\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}<0,\ \forall i\in M\end{gathered}\tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}_i=\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i$$

此时，称系统(6)对控制器 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}(t)$ 是二次稳定的。

显然，系统的二次稳定性保证了鲁棒稳定性。

定义 7　对系统(6)和成本函数(8)，若存在反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}_i$ 的控制律 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}(t)$，使得系统(6)是二次稳定的，并且其成本值满足 $J\leqslant J^*$，其中 J^* 称为时滞切换广义系统(6)的成本上界，$\boldsymbol{u}(t)$ 称为系统(6)的二次稳定保成本控制律。

定理 1　对给定的切换广义系统(6)和成本函数(8)，如果存在一组适当维数的矩阵 $\boldsymbol{K}_i(i\in M)$，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得对满足所有不确定项的 $\boldsymbol{\Gamma}_i(t)(i\in M)$。有式(3)及下列不等式组成立

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Omega}_i+Q+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i & * \\ (\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}<0,\quad \forall i\in M \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}_i=\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i$$

式中，“ * ”表示对称位置上的转置矩阵，下文同。则 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(6)的一个二次稳定保成本控制律，且成本函数满足 $J\leqslant\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\phi}(0)+\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(\tau)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\phi}(\tau)\mathrm d\tau$。

证明　由于 $\boldsymbol{S}>0$，$\boldsymbol{R}>0$。由不等式(11)可知下式成立

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Omega}_i+\boldsymbol{Q} & * \\ (\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}<0,\ \forall i\in M \tag{12}$$

利用 Schur 补性质，式(12)与下式等价

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Omega}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Omega}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A}_{di}+\\\Delta\boldsymbol{A}_{di})^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}<0,\ \forall i\in M\end{gathered}\tag{13}$$

由定义 6 知，闭环系统(9)是二次稳定的。

取 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-d}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(\tau)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\tau)\mathrm d\tau \tag{14}$$

则 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 沿系统(9)的解的导数为

$$\begin{aligned}\dot V(\boldsymbol{x}(t))&=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm T}[(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}(t)+\\&(\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})\boldsymbol{x}(t-d)]+[(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}(t)+\\&(\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})\boldsymbol{x}(t-d)]^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d)\cdot\\&\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-d)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d)]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Omega}_i+\boldsymbol{Q} & * \\ (\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}\cdot\\&\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(x)\\ \boldsymbol{x}(t-d)\end{bmatrix}<[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-d)]\begin{bmatrix}-\boldsymbol{S}-\boldsymbol{K}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\\&\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-d)\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)(-\boldsymbol{S}-\boldsymbol{K}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

上式从 0 到 T 积分得

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(T)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(T)-\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)+\int_{T-d}^{T}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(\tau)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\tau)\mathrm d\tau-\\\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(\tau)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\phi}(\tau)\mathrm d\tau\leqslant-\int_0^T\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}(t)\mathrm dt\end{gathered}$$

由于已证得闭环系统(9)是二次稳定的，因此对上式令 $T\to+\infty$，得

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm dt\leqslant\\\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\phi}(0)+\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(\tau)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\phi}(\tau)\mathrm d\tau\end{gathered}\tag{15}$$

证毕

引理 3[23]　给定适当维数的矩阵 $\boldsymbol{Y}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{N}$，其中 $\boldsymbol{Y}$ 是对称的，则 $\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm T}\boldsymbol{H}^{\mathrm T}<0$ 对所有满足 $\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Gamma}\leqslant\boldsymbol{I}$ 的任意矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 成立，当且仅当存在一个常数 $\eta>0$，使得 $\boldsymbol{Y}+\eta\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm T}+\eta^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm T}\boldsymbol{N}<0$。

定理 2　不确定时滞切换广义系统(6)存在二次保成本控制器，如果存在一组标量 $\varepsilon_i>0(i\in M)$，可逆矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{T}$，以及一组矩阵 $\boldsymbol{W}_i(i\in M)$，满足下面的矩阵不等式组

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm T}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}\geqslant 0 \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{matrix}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{W}_i+\\(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{W}_i)^{\mathrm T}\end{matrix} & * & * & * & * & * & *\\ \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm T} & -\boldsymbol{T} & & & & * & \\ \boldsymbol{W}_i & & -\boldsymbol{R}^{-1} & & & & \\ \boldsymbol{X} & & & -\boldsymbol{T} & & & \\ \boldsymbol{X} & & & & -\boldsymbol{S}^{-1} & & \\ \boldsymbol{G}_{1i}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{G}_{2i}\boldsymbol{W}_i & \boldsymbol{G}_{di}\boldsymbol{T} & & & & -\varepsilon_i^{-1}\boldsymbol{I} & \\ \boldsymbol{D}_i^{\mathrm T} & & & & & & -\varepsilon_i\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0,\quad\forall i\in M \tag{17}$$

则 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 即为系统(6)的二次保成本控制器，且相应的闭环成本函数值的一个上界为 $J^*=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{X}^{-1}\cdot\boldsymbol{\phi}(0)+\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm T}(\tau)\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\phi}(\tau)\mathrm d\tau$。

证明　矩阵不等式(11)可写成

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_i+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_i & * \\ \boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}+\\\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm T}\Delta\boldsymbol{B}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\Delta\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{P}^{\mathrm T}\Delta\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i & * \\ \Delta\boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm T}\boldsymbol{P} & 0\end{bmatrix}<0\end{gathered}\tag{18}$$

其中

$$\boldsymbol{\Psi}_i=(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)$$

由 Schur 补性质,式(18)等价为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_i & * & * & * & * \\ \boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{K}_i & 0 & -\boldsymbol{R}^{-1} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & -\boldsymbol{Q}^{-1} & 0 \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{S}^{-1}\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{G}_{1i}+\boldsymbol{G}_{2i}\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{G}_{di}^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_i^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_i(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{1i}+\boldsymbol{G}_{2i}\boldsymbol{K}_i & \boldsymbol{G}_{di} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0 \tag{19}$$

根据引理 3,对所有满足 $\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$ 的未知矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}(t)$,式(19)成立当且仅当存在一组常数,$\varepsilon_i>0(i\in M)$,使得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_i & * & * & * & * \\ \boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{K}_i & 0 & -\boldsymbol{R}^{-1} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & -\boldsymbol{Q}^{-1} & 0 \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{S}^{-1}\end{bmatrix}+$$

$$\varepsilon_i\begin{bmatrix}(\boldsymbol{G}_{1i}+\boldsymbol{G}_{2i}\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{G}_{di}^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{1i}+\boldsymbol{G}_{2i}\boldsymbol{K}_i & \boldsymbol{G}_{di} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+$$

$$\varepsilon_i^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}<0 \tag{20}$$

进一步应用 Schur 补性质,式(20)等价为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_i & * & * & * & * & * & * \\ \boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{Q} & & & & * & \\ \boldsymbol{K}_i & & -\boldsymbol{R}^{-1} & & & & \\ \boldsymbol{I} & & & -\boldsymbol{Q}^{-1} & & & \\ \boldsymbol{I} & & & & -\boldsymbol{S}^{-1} & & \\ \boldsymbol{G}_{1i}+\boldsymbol{G}_{2i}\boldsymbol{K}_i & \boldsymbol{G}_{di} & & & & -\varepsilon_i^{-1}\boldsymbol{I} & \\ \boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & & & & & & -\varepsilon_i\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{21}$$

对式(21)分别左乘 diag $\{\boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}},\boldsymbol{Q}^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$,右乘 diag $\{\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{Q}^{-1},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$,并记 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}^{-1}$,$\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{P}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}^{-1}$,便得式(17)。其次,式(16)与式(3)显然是等价的。由定理 1,知 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 是系统的一个二次保成本控制器,相应的闭环成本函数值的一个上界为

$$J^*=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{\phi}(0)+\int_{-d}^{0}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\phi}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

证毕

3　数值算例

考虑如下不确定时滞切换广义系统,它由两个子系统组成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}_i+\Delta\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}_{di}+\Delta\boldsymbol{A}_{di})\boldsymbol{x}(t-d)+\\(\boldsymbol{B}_i+\Delta\boldsymbol{B}_i)\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-d,0],\ i=1,2\end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{d1}=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\0.1 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}0.3 & 0.2\\0.2 & 0.5\end{bmatrix},\ \Gamma_1(t)=\sin t$$

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1\\0.2 & 0.5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0.2\\0.2 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_{d1}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\0 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{d2}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\0 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0.6\\0.5 & 0.2\end{bmatrix},\ \Gamma_2(t)=\cos t,\ \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.1\\0.5 & 0.3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\0.1 & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_{d2}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\0 & 0.1\end{bmatrix}$$

初始值为 $\boldsymbol{\phi}(t)=[\mathrm{e}^t\quad -\mathrm{e}^t]^{\mathrm{T}}$, $t\in[-1,0]$, $d=1$。此系统的成本函数为式(8),其中 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$。

利用 MATLAB 软件的 LMI 工具箱,求解矩阵不等式(17),其中取 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$,可得矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,以及反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}6.1004 & 0\\-4.1043 & 10.1725\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0.2065 & 0.0089\\0.0089 & 0.2154\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{bmatrix}-4.1816 & -0.4594\\2.5226 & -6.9939\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_2=\begin{bmatrix}2.7153 & -7.4968\\-4.0807 & -0.5004\end{bmatrix}$$

根据定理 2 知,在任意的切换策略下,系统(22)是二次稳定的,相应的成本函数上界为 $J^*=12.3755$,系统的状态响应如图 1 和图 2 所示。

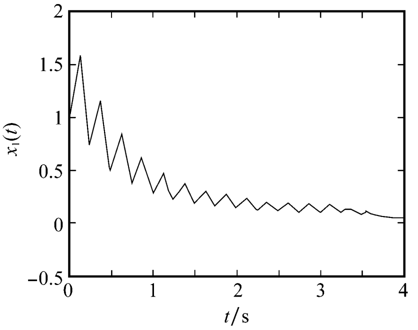

图 1　切换广义系统的状态 x_1 响应曲线

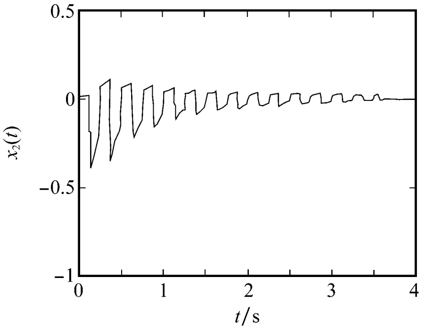

图 2　切换广义系统的状态 x_2 响应曲线

4　结束语

本文针对一类不确定时滞切换广义系统的保成本控制进行了研究,利用线性矩阵不等式,给出了在任意切换策略下,状态反馈保成本控制律存在的充分条件,保证不确定时滞切换广义系统的二次稳定性,且成本函数值不超过某个确定的上界。并进一步将控制律的设计问题转化为一个线性矩阵不等式的求解问题,这个条件可以通过 MATLAB 工具箱求解,适合在工程中使用。数值算例说明了该方法的正确性。本文所得的结果只是针对一类特殊不确定切换广义系统(各子系统的 E_i 均相同),如何对更一般的不确定切换广义系统(各子系统的 E_i 均不相同)进行研究将是今后工作的重点。

参考文献:

[1] Dai L. Singular control systems [M]. *Berlin*: *Springer-Verlag*, 1989.

[2] Ishhara J Y, Terra M H. On the Lyapunov theorem for singular systems [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2002, 47(11):1926 - 1930.

[3] 张庆灵,杨冬梅. 不确定广义系统的分析与综合[M]. 沈阳:东北大学出版社, 2003.

[4] 贾新春,郑南宁. 广义不确定系统的无脉冲鲁棒性和大范围脉冲鲁棒控制[J]. 信息与控制, 2001,30(1):7 - 10.

[5] Xu S Y, Dooren P V, Stefan R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2002, 47(7):1122 - 1126.

[6] 刘永清,谢湘生. 大型动力系统的理论与应用-卷 8:滞后广义系统的稳定镇定与控制[M]. 广州:华南理工大学出版社, 1998: 10 - 109.

[7] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(1):59 - 70.

[8] Branicky M S. Stability of switched and hybrid systems [C]// *Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control*, 1994: 3498 - 3503.

[9] Skafiads E, Evans R J, Savkin A V, et al. Stability results for switched controller systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(4): 553 - 564.

[10] Sun Z D, Ge S Z. Analysis and synthesis of switched linear control systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(2):181 - 195.

[11] 程代展,郭宇骞. 切换系统进展[J]. 控制理论与应用,2005, 22(6):954 - 960

[12] 杨磊,李俊民. 一类线性切换系统的能控性与能观测性的充要条件[J]. 系统工程与电子技术, 2003,25(5):588 - 590.(Yang Lei, Li Junmin. Suffcient and necessary conditions of controllability and observability of a class of linear switching systems [J]. *Systems Engineering and Electronics*. 2003,25(5):588 - 590.)

[13] Chang S S L, Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1972,17(4):474 - 483.

[14] Yu L, Chu J. LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems [J]. *Automatica*, 1999,35(6): 1155 - 1159.

[15] 冯俊娥,程兆林. 不确定奇异时滞系统的保性能控制[J]. 控制与决策,2002,17(增刊 1):711 - 714.

[16] 舒伟仁,张庆灵. 时滞区间广义系统的保成本控制[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(2): 300 - 303.(Shu Weiren, Zhang Qingling. Guaranteed cost control for interval singular systems with time-delay in state [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2005,27(2):300 - 303.)

[17] 张颖,段广仁. 不确定离散切换系统具有极点约束的保性能控制[J]. 控制与决策,2007,22(11):1269 - 1273.

[18] Meng B, Zhang J F. Reachability conditions for switched linear singular systems [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2006, 51(3):482 - 488.

[19] Meng B, Zhang J F. Admissible switched control of singular systems[C]// *Proc. of the 23rd Chinese Control Conference*, 2004:1615 - 1619.

[20] Xie G M, Wang L. Stability and stabilization of switched descriptor systems under arbitrary switching[C]// *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 2004: 779 - 783.

[21] 尹玉娟,刘玉忠,赵军. 一类切换线性广义系统的稳定性[J]. 控制与决策, 2006, 21(1):24 - 27.

[22] 付主木,费树岷. 一类不确定切换奇异系统的动态输出反馈鲁棒 H_∞ 控制[J]. 自动化学报,2008,34(4):482 - 487.

[23] Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems [J]. *Systems and Control Letters*, 1987, 8(4): 351 - 357.