一种弹道成形水平攻坚制导律研究*

李　淼，祁载康

（北京理工大学宇航学院，北京　100081）

摘　要：攻坚型图像制导导弹水平攻击坚固工事时，落角越小越有利于随进战斗部成功随进。根据简单的导弹运动模型，利用拉格朗日方法推导了一种同时带有落点和落角约束的弹道成形水平攻坚的最优制导律，给出了制导系统的弹道纵坐标、过载、弹道倾角随制导时间的变化关系，以及不同的末制导时间对制导规律的影响，为型号研制提供了理论依据。

关键词：图像制导导弹；制导律；最优化；弹道成形

中图分类号：TJ765.3　　**文献标志码**：A

A Research on Trajectory Shaping Horizontal Attack Guidance Law

LI Miao, QI Zaikang

(School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: When the image guided missile attacks on the surface of strong fortification horizontally, the smaller the impact angle is, the easier for the follow-on warhead to successfully follow. According to a simplified motion model of missile, the Lagrangian was adopted for deducing an optimal trajectory shaping horizontal attack guidance law with falling point and impact angle constraint. The vertical trajectory coordinate, inclination and overload controlled by guidance system and functions of guidance time, as well as the influence of remainder guidance time were studied. The research provides the theory reference for product development.

Keywords: image guided missile; guidance law; optimization; trajectory shaping

0　引言

随着越来越坚固的防御工事成为具有重要战略价值的目标，如何打击坚固工事就成为重要的课题。携带攻坚战斗部的攻坚型图像制导导弹正是可完成此种攻击任务的精确制导武器，导弹水平从正面攻击固定设施时垂直进入会有效的增加随进子弹的穿透随进率，也就是落角越小越有利于随进战斗部随进。因此对落点参数如落速、落角、攻角等提出了严格的限制条件。在飞行过程中导弹本身的过载能力较低，希望弹道在满足命中率的前提下所需的能量最小，这要求最优化的制导规律。

1　水平攻坚制导律数学模型

求解给定落点和落角约束下的控制能量最优制导律[1-2]，数学上归结为通过变分法来求解带有约束条件的泛函极值问题。

1.1　制导问题的数学模型

设系统的状态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] \quad t \in [t_0, t_f] \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}(t) \in \boldsymbol{R}^n$；$\boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{R}^r$；$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]$ 是 n 维连续可微的矢量函数。

初始时刻系统状态为 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$，终端时刻系统状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$ 满足：

$$\boldsymbol{N}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] = 0 \tag{2}$$

$\boldsymbol{N}$ 为 q 维向量函数，且 $q \leqslant n$。

定义性能泛函为：

$$J = \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] \mathrm{d}t \tag{3}$$

其中，φ、L 都是连续可微的标量函数，注意到 φ 是系统运动终止时间 t_f 的函数。第一项是终端项，表示对系统终端状态的要求，而第二个积分项表示对系统的整个控制过程的要求。

最优制导律就是寻求最优控制 $\boldsymbol{u}^*(t)$，将系统从初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 变化到目标集 $\boldsymbol{N}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] = 0$，并使性能泛函 J 取得最小值。可以用拉格朗日乘子法求解该问题，引入两个拉格朗日乘子，构造新性能泛函，把有约束条件泛函极值问题变为无约束条件泛函极值问题。

*　**收稿日期**：2010-09-25

作者简介：李淼（1979-），女，重庆人，工程师，博士，研究方向：飞行器设计。

构造新的性能泛函：

$$\boldsymbol{J}' = \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{N}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)[\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] - \boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)]\} dt \tag{4}$$

其中：$\boldsymbol{\mu}^T$ 对应于终端时刻边界约束的拉格朗日乘子；$\boldsymbol{\lambda}^T$ 对应于运动方程约束的拉格朗日乘子。

定义哈密顿函数为：

$$\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t] \tag{5}$$

代入式(4)得：

$$J' = \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{N}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] - \boldsymbol{\lambda}^T(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)]\} dt \tag{6}$$

对积分部分第二项进行分部积分并简化可得：

$$J' = \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{N}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{x} \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \{\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\boldsymbol{x}(t)]\} dt \tag{7}$$

其变分为：

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{J}' = {} & \delta t_f \{\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}(t_f), \boldsymbol{u}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f] + \frac{\partial \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial t_f} + \frac{\partial \boldsymbol{N}^T[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial t_f}\boldsymbol{\mu}\} + \\ & \delta \boldsymbol{x}^T(t_f)\{\frac{\partial \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)} + \frac{\partial \boldsymbol{N}^T[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}(t_f)\} + \\ & \int_{t_0}^{t_f} [(\delta \boldsymbol{x})^T(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}) + (\delta \boldsymbol{u})^T \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{u}}] dt \end{aligned} \tag{8}$$

$\boldsymbol{J}'$ 取得极值的必要条件是对于任意的 δt_f、$\delta \boldsymbol{u}$、$\delta \boldsymbol{x}$，都有 $\delta \boldsymbol{J}' = 0$ 成立，同时泛函 $\boldsymbol{J}'$ 对拉格朗日乘子的变分也必须为0。结合所有条件得到如下方程：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{u}} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

边界条件为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \dfrac{\partial \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)} + \dfrac{\partial \boldsymbol{N}^T[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial \boldsymbol{x}(t_f)}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 \\ \boldsymbol{N}[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] = 0 \end{cases} \tag{10}$$

在终端时刻有：

$$\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}(t_f), \boldsymbol{u}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f] + \frac{\partial \varphi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial t_f} + \frac{\partial \boldsymbol{N}^T[\boldsymbol{x}(t_f), t_f]}{\partial t_f}\boldsymbol{\mu} = 0 \tag{11}$$

其中系统状态 $\boldsymbol{x}$(n 维)对应导弹的有控飞行弹道，$\boldsymbol{u}$(r 维)对应导弹控制指令。

1.2 简化的导弹运动方程(线性模型)

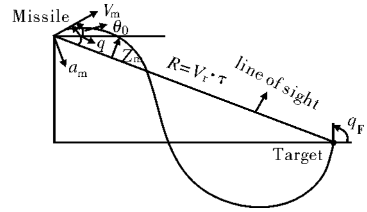


图1 弹目运动几何关系图

假设导弹和目标始终位于同一铅垂面内，并假设目标静止。图1给出了导弹与目标之间的运动几何关系。图中 V_m 是导弹速度；V_r 表示导弹与目标沿弹目线方向的相对速度；Z_m 为导弹在弹目视线垂直方向上的距离；q 为导弹速度与弹目视线间的夹角；$\dot{q}$ 为弹目视线角速度；R 表示导弹目标间的相对距离；a_m 为导弹法向过载(控制量)，q_F 为期望落角[1]。

T 为总的末导时间，t 为飞行时间变量，t_{go} 为剩余飞行时间且满足 $t_{go} = T - t$，$R = V_r \times T$；Z_m 是导弹为了实现期望落角进行的机动，受法向过载 a_m 控制。

简化后的导弹运动动力学方程为：

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{y} = v\theta \\ \dot{\theta} = \dfrac{F}{mv} \end{cases} \tag{12}$$

式中 F 为改变速度矢量方向的法向控制力，设控制资源不受限制。

1.3 最优制导律的推导及解析解

要求导弹按照给定的落点与落角命中目标，则约束条件为：

$$\begin{cases} x(T) = x_F \\ y(T) = y_F \\ \theta(T) = \theta_F \end{cases} \tag{13}$$

(x_F, y_F) 为目标位置，θ_F 为期望的弹道倾角。

根据图1，构造如下性能泛函：

$$J(x(t_0), y(t_0), \theta(t_0), t_0) = C_x \frac{(x(t) - x_F)^2}{2} + C_y \frac{(y(t) - y_F)^2}{2} + C_\theta \frac{(\theta(t) - \theta_F)^2}{2} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} F^2(t) dt$$

设控制 F 不受限制来寻求最优控制，使得 J 取极值。其中令：

$$\varphi(x(T), y(T), \theta(T)) = C_x \frac{(x(T) - x_F)^2}{2} + C_y \frac{(y(T) - y_F)^2}{2} + C_\theta \frac{(\theta(T) - \theta_F)^2}{2}$$

根据极小值原理，引入待定的三维拉格朗日乘子矢量$[\lambda_x, \lambda_y, \lambda_\theta]$；根据方程(11)极小的边界条件为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=C_x(x(T)-x_{\mathrm F})=\lambda_x(T)\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=C_y(y(T)-y_{\mathrm F})=\lambda_y(T)\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}=C_\theta(\theta(T)-\theta_{\mathrm F})=\lambda_\theta(T)\end{cases}\tag{14}$$

构造如下 Hamilton 函数：

$$\boldsymbol{H}[x,y,\theta,\lambda,t]=\frac{1}{2}F^2+\dot{x}\lambda_x+\dot{y}\lambda_y+\dot{\theta}\lambda_\theta\tag{15}$$

最优控制应使 $\boldsymbol{H}$ 取得极值，以下控制方程成立：

$$\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial F}=F+\frac{\lambda_\theta}{mv}=0$$

动态系统的协态方程为：

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_x=-\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial x}=0\\ \dot{\lambda}_y=-\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial y}=0\\ \dot{\lambda}_\theta==-\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial\theta}=-v\lambda_y\end{cases}\tag{16}$$

将最优控制变量 $F=-\dfrac{\lambda_\theta}{mv}$ 代入状态方程得：

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{y}=v\theta\\ \dot{\theta}=\dfrac{F}{mv}=-\dfrac{1}{(mv)^2}\lambda_y(T)\end{cases}\tag{17}$$

进一步简化可得：

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{y}=v\theta\\ \dot{\theta}=-\dfrac{1}{(mv)^2}[\lambda_\theta(T)+v(T-t)\lambda_y(T)]\end{cases}\tag{18}$$

将式(18) 在$[0,t]$上积分得：

$$\begin{cases}x(t)=x(0)+vt\\ y(t)=y(0)+v[\theta(0)t-\dfrac{t^2}{2(mv)^2}[\lambda_\theta(T)+\\ \qquad vT\lambda_y(T)]+\dfrac{t^3}{6(mv)^2}v\lambda_y(T)]\\ \theta(t)=\theta(0)-\dfrac{t}{(mv)^2}[\lambda_\theta(T)+vT\lambda_y(T)]+\\ \qquad \dfrac{t^2}{2(mv)^2}v\lambda_y(T)\end{cases}$$

令 $t=T$ 并代入边界条件得：

$$\begin{cases}\lambda_x(T)=C_x(x(0)-x_{\mathrm F}+vT)\\ \lambda_y(T)=C_yy(0)+C_yvT\theta(0)-\dfrac{C_yvT^2}{2(mv)^2}\lambda_\theta(T)-\\ \qquad \dfrac{C_yv^2T^3}{3(mv)^2}\lambda_y(T)-C_yy_{\mathrm F}\\ \lambda_\theta(T)=C_\theta\theta(0)-\dfrac{C_\theta T}{(mv)^2}\lambda_\theta(T)-\dfrac{C_\theta vT^2}{2(mv)^2}\lambda_y(T)-C_\theta\theta_{\mathrm F}\end{cases}\tag{19}$$

由式(19) 后两式可以消去 $\lambda_y(T)$ 得到：

$$\left(\frac{1}{C_\theta}+\frac{T}{(mv)^2}\right)\left(\frac{1}{C_y}+\frac{v^2T^3}{3(mv)^2}\right)\lambda_\theta(T)=$$
$$-\frac{vT^2}{2(mv)^2}y(0)+\left(\frac{1}{C_y}-\frac{v^2T^3}{6(mv)^2}\right)\theta(0)+$$
$$\frac{v^2T^4}{4(mv)^4}\lambda_\theta(T)+\frac{vT^2}{2(mv)^2}y_{\mathrm F}-\left(\frac{1}{C_y}+\frac{v^2T^3}{3(mv)^2}\right)\theta_{\mathrm F}$$

待定系数 C_y 和 C_θ 取值越大，则弹道终点的参数就越接近终端约束条件。取 $C_y\to\infty$，$C_\theta\to\infty$，此时要求严格满足终端约束条件，上式简化为：

$$\frac{v^2T^4}{12(mv)^4}\lambda_\theta(T)=-\frac{vT^2}{2(mv)^2}y(0)-\frac{v^2T^3}{6(mv)^2}\theta(0)+$$
$$\frac{vT^2}{2(mv)^2}y_{\mathrm F}-\frac{v^2T^3}{3(mv)^2}\theta_{\mathrm F}$$

进一步得到：

$$\lambda_\theta(T)=-\frac{6(mv)^2}{vT^2}y(0)-\frac{2(mv)^2}{T}\theta(0)+$$
$$\frac{6(mv)^2}{vT^2}y_{\mathrm F}-\frac{4(mv)^2}{T}\theta_{\mathrm F}\tag{20}$$

从而得到了由初值和终值表示的控制量的解析式。

如果对状态方程导出方程(18) 积分时，积分范围选为$[t,T]$，积分时间变为 $T-t$，就会得到以当前状态表示的控制方程，此时状态量为 $y(t)$、$\theta(t)$，上式变为：

$$\lambda_\theta(T)=-\frac{6(mv)^2}{v(T-t)^2}y(t)-\frac{2(mv)^2}{T-t}\theta(t)+$$
$$\frac{6(mv)^2}{v(T-t)^2}y_{\mathrm F}-\frac{4(mv)^2}{T-t}\theta_{\mathrm F}\tag{21}$$

同样的可以得到：

$$\lambda_y(T)=\frac{12(mv)^2}{v^2(T-t)^3}y(t)+\frac{6(mv)^2}{v(T-t)^2}\theta(t)-$$
$$\frac{12(mv)^2}{v^2(T-t)^3}y_{\mathrm F}+\frac{6(mv)^2}{v(T-t)^2}\theta_{\mathrm F}\tag{22}$$

代入式(6) 得：

$$\lambda_\theta(t)=\lambda_\theta(T)+v(T-t)\lambda_y(T)=\frac{6(mv)^2}{v(T-t)^2}y(t)+$$
$$\frac{4(mv)^2}{T-t}\theta(t)-\frac{6(mv)^2}{v(T-t)^2}y_{\mathrm F}+\frac{2(mv)^2}{T-t}\theta_{\mathrm F}$$

从而，带有落角约束的制导控制力表达式为：

$$F(t)=-\frac{\lambda_\theta(t)}{mv}=-\frac{6m}{(T-t)^2}y(t)-\frac{4mv}{T-t}\theta(t)+$$
$$\frac{6m}{(T-t)^2}y_{\mathrm F}-\frac{2mv}{T-t}\theta_{\mathrm F}\tag{23}$$

式(23) 就是以 $y(t)$、$\theta(t)$ 为状态，用剩余飞行时间 $T-t$ 和终端限制条件表示的最优制导律。通常，在制导控制系统设计中习惯用过载表达式来表示制导律。

$$a_{\mathrm c}(t)=-\frac{6}{(T-t)^2}y(t)-\frac{4v}{T-t}\theta(t)+$$
$$\frac{6}{(T-t)^2}y_{\mathrm F}-\frac{2v}{T-t}\theta_{\mathrm F}\tag{24}$$

2 仿真实例

对上述的线性时变系统，总是假定控制变量 $u(t_1)$，$t \in [t_0, t_1]$ 的取值范围是不受任何限制，使得能对任意控制做变分 $\delta\boldsymbol{u}$ 而得到最优控制 $\boldsymbol{u}^{*(t)}$ 满足控制方程 $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{u}} = 0$。然而实际操作中导弹控制变量总是受到一定限制，尤其导弹不能承受一定量的过载。

用最优制导律对导弹进行仿真，考察带有落角约束下导弹的制导过载情况。取导引开始时刻为零时刻($t_0 = 0$)，导弹的初始状态为 $y(0) = 0$，$\theta(0) = 12°$，导弹所用飞行时间 $T = 12\mathrm{s}$，导弹与目标之间的相对速度 $V_r = 220\mathrm{m/s}$。要求弹道终点处导弹的法向位移 y_F 为零，导弹水平攻击目标，故落角取为 $\theta_F = 0°$。图 2 ～ 图 4 给出了制导系统的弹道纵坐标、过载、弹道倾角与制导时间的函数关系。

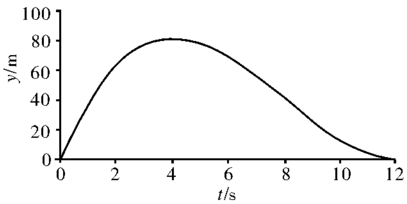


图 2 最优制导律弹道与制导时间的关系

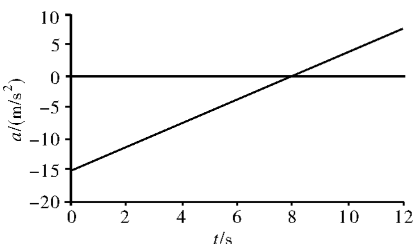


图 3 最优制导律过载与制导时间的关系

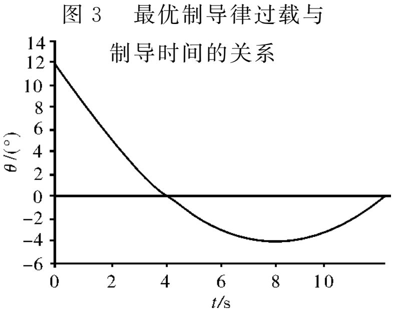


图 4 最优制导律速度倾角与制导时间的关系

考察末制导时间 T 对制导规律的影响，相应于不同的攻击距离。在满足水平攻击的条件下，分别选取制导时间 $T = 3, 5, 8, 12\mathrm{s}$，初始角度为 $\theta(0) = 12°$。图 5 给出了不同制导时间下导弹的弹道曲线。

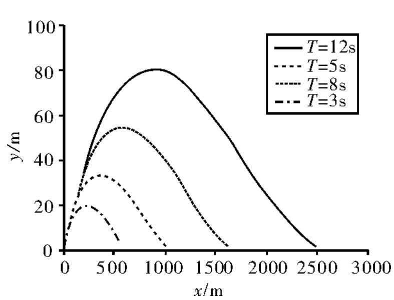
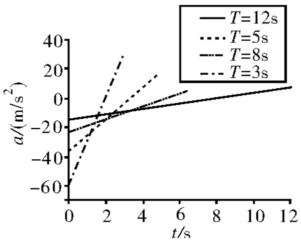


图 5 不同末制导时间下最优制导律弹道

图 6 和图 7 给出了不同末制导时间 T 下最优制导律的过载和速度倾角与制导时间的关系。可以看到，无动力学系统总能按照期望落角命中目标，但是末制导时间越长，导弹机动幅度越大，此时需用的过载就越小。



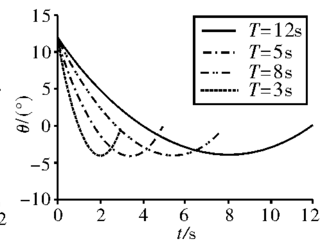


图 6 不同末制导时间下过载与制导时间关系

图 7 不同末制导时间下速度倾角与制导时间的关系

3 制导律应用设计

当导弹精确命中目标并满足落点约束条件时，用最优化理论可以得出最优控制的表达式 。但是状态 $y(t)$、$v(t)$ 在导弹飞行过程中，不容易实时测量，且精确计算剩余飞行时间和弹道倾角工程实现上很困难。所以希望用在工程实践中较易测量的量来表示，通常用可测的目标视线角和目标视线角速度表示。

考虑导弹落点的纵坐标为 0。由导弹和目标的几何关系可知：$\tan q(t) = \frac{y(t)}{(T-t)v}$，在弹目视线角比较小时有 $q(t) \approx \tan q(t)$，进一步 $\dot{q}(t) \approx \frac{\dot{y}(t)}{(T-t)v} + \frac{y(t)}{(T-t)^2 v}$，从而得到：

$$\begin{cases} y(t) = q(t)v(T-t) \\ \dot{y}(t) = \dot{q}(t)v(T-t) - \dfrac{y(t)}{T-t} \end{cases} \tag{25}$$

由状态方程得到：$\theta(t) = \frac{\dot{y}(t)}{v}$，将以上三式代入表达式得：

$$F(t) = -4mv\dot{q}(t) - \frac{2mv}{(T-t)}q(t) + \frac{6m}{(T-t)^2}y_F - \frac{2mv}{T-t}\theta_F \tag{26}$$

则驾驶仪过载指令为：

$$a_c(t) = \frac{F(t)}{m} = -4v\dot{q}(t) - \frac{2v(q(t)-\theta_F)}{(T-t)} \tag{27}$$

利用上述公式可以得到用目标视线角 q 和目标视线角速度 $\dot{q}$ 代替弹道倾角信息表示的最优制导律。

4 结论

为了能够水平击中目标，导弹需要大幅度机动，速度倾角先下压后抬头，最终可以在可用过载范围内

(下转第 44 页)