

基于 LMI 的雷达稳定伺服系统 动态输出反馈 H_∞ 控制*

杨大鹏, 刘向东

(北京理工大学自动化学院, 北京 100081)

摘要:为提高雷达稳定伺服系统的动态性能和抗干扰能力,基于线性矩阵不等式(LMI)设计了速度环动态输出反馈 H_∞ 控制器。对于不同幅值和频率的信号开展了阶跃响应和抗扰性能的 Matlab 仿真实验。结果表明,与传统 PID 控制器相比,采用这种输出反馈 H_∞ 控制器的伺服系统速度环阶跃响应动态性能优越;对不同频率的载体扰动信号情况下,隔离度均显著提高。提出的输出反馈 H_∞ 控制器阶次低,不存在输出饱和问题,便于物理实现。

关键词:线性矩阵不等式;雷达;伺服系统; H_∞ 控制器

中图分类号:TN953 **文献标志码:**A

Dynamic Output Feedback H_∞ Control of Radar Stabilization Servo System Based on LMI

YANG Dapeng, LIU Xiangdong

(School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract:To improve dynamic and disturbance rejecting ability of radar stable servo system, output feedback H_∞ controller of speed loop was presented based on LMI. For signals with different amplitude and frequency, simulations of the closed loop in Matlab were done, which contained both step response and disturbance tests. Simulation results indicate that the servo system with LMI controller performs better in dynamic response with shorter response time. The new designed system has better rejection rate than the system with traditional PID controller for variable frequency disturbance signals. Also, the LMI controller advanced here not only has no shortcoming like saturation of controlled output but also has some advantages such as low order and easy to realize.

Keywords:LMI; radar; servo system; H_∞ controller

0 引言

雷达是自寻的战术导弹的关键组成部分,它对目标进行探测,并制导导弹飞向目标,对导弹的作战性能有重大影响^[1]。雷达伺服稳定平台会受弹体运动的影响,从而偏离指向目标,其稳定伺服系统中一般采用速率陀螺来消除载体扰动的影响。

高性能的雷达伺服系统对外界干扰具有很好的隔离能力。文献[2]建立了伺服稳定平台系统模型,分析得出平台对扰动隔离能力在低频和高频下影响的主要因素。文献[3]提出了一种基于 Smith 预估器的延迟影响补偿控制方案。文献[4]提出了基于 Riccati 不等式的 H_∞ 控制器,具有良好的扰动抑制效果。文献[5]提出一种基于幅相裕度参数整定的二自由度内模 PID 鲁棒控制方法,增强了系统的鲁棒性。

为提高雷达稳定伺服系统的抗扰能力,文中从系统的隔离度模型入手,提出一种基于线性矩阵不等式(LMI)的雷达稳定伺服系统速度环输出反馈 H_∞ 控制器的设计方法。仿真结果表明,与传统的 PID 控制器相比,新型的雷达稳定伺服系统速度环阶跃响应性能和载体扰动抑制能力显著提高。

1 雷达稳定伺服系统的数学模型

雷达稳定伺服系统的结构图如图 1 所示^[6]。

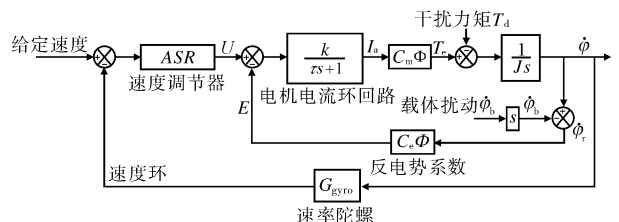


图 1 雷达稳定伺服系统的结构图

* 收稿日期:2010-10-20

作者简介:杨大鹏(1988-),黑龙江人,博士研究生,研究方向:高精度伺服控制。

图中： U 为控制输入； E 为反电动势； I_a 为电枢电流； k 为电流环等效放大倍数； τ 为电流环等效时间常数； $C_m\Phi$ 为转矩系数； $C_e\Phi$ 为电机反电势系数； T_e 为电机电磁转矩； T_d 为干扰力矩； J 为负载转动惯量； φ_b 为载体扰动位置输入； $\dot{\varphi}_b$ 为载体扰动速度输入； $\dot{\varphi}$ 为天线惯性速度； $\dot{\varphi}_r$ 为天线相对载体的运动， G_{gyro} 是速率陀螺等效传递函数。

电机电流环等效数学模型如式(1)所示：

$$\tau \dot{I}_a + I_a = k(U - E) \quad (1)$$

电机的转矩方程如式(2)所示：

$$T_e = C_m\Phi I_a \quad (2)$$

负载方程如式(3)所示：

$$J\ddot{\varphi} = T_e + T_d \quad (3)$$

式中 $\ddot{\varphi}$ 为惯性速度 $\dot{\varphi}$ 的导数。

在跟踪状态下的雷达稳定系统，可假设参考速度输入为 0，则速度环的控制对象是一个典型二阶系统。将图 1 中速度环的控制对象化简为如下双输入单输出系统，如图 2 所示。

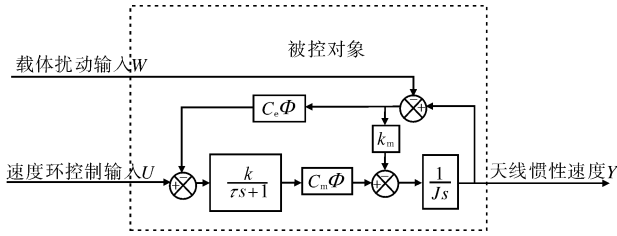


图 2 被控对象-双输入单输出系统

图中： k_m 是干扰力矩比例系数；为简化推导，定义载体扰动速度输入 $\dot{\varphi}_b$ 为 W ；天线惯性速度 $\dot{\varphi}$ 为 Y ；其他符号定义与前文相同。

雷达稳定伺服系统的等效二阶系统是线性时不变系统，在此取状态变量 X_1 为电枢电流 I_a ， X_2 为电机转速 Y ，易得其状态空间描述如式(4)所示：

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + B_1W + B_2U \\ Y &= CX \end{aligned} \quad (4)$$

式中： $X \in R^2$ 是状态变量； $W \in R^1$ 是雷达平台的载体扰动输入； $U \in R^1$ 是控制输入，这里是速度调节器的输出； $Y \in R^1$ 是测量输出，这里是天线的惯性速度。矩阵变量 A 、 B_1 、 B_2 、 C 具体如下：

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & -\frac{kC_e\Phi}{\tau} \\ C_m\Phi & -\frac{k_m}{J} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \frac{kC_e\Phi}{\tau} \\ -\frac{k_m}{J} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \frac{k}{\tau} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1]$$

2 基于 LMI 的输出反馈 H_∞ 控制器设计

本部分的目的是设计一个具有如式(5)所示的状

态空间实现的动态输出反馈 H_∞ 控制器 $U = K(s)Y$ ，使得雷达伺服闭环系统满足如下性质：

① 雷达稳定伺服系统是稳定的，即闭环系统状态矩阵所有特征值均在左半开复平面。

② 从载体扰动输入 W 到雷达稳定平台惯性速度 Y 的闭环传递函数 $T_{WZ}(s)$ 的 H_∞ 范数小于 γ ，即 $\|T_{WZ}(s)\|_\infty < \gamma$ ，给定值 γ 据实际控制性能要求选定。

$$\dot{X} = A_K X + B_K Y, U = C_K X + D_K Y \quad (5)$$

其中： $X \in R^2$ 是控制器的状态变量， A_K 、 B_K 、 C_K 、 D_K 是输出反馈 H_∞ 控制器的参数矩阵。将 H_∞ 控制器式(5)应用到系统(4)中，即可得到雷达稳定回路的闭环系统，同时可得式(6)所示的系统状态空间实现。

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\hat{X}} \end{bmatrix} = A_{cl} \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} + B_{cl}W, Y = C_{cl} \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} + D_{cl}W \quad (6)$$

式中： $X \in R^2$ 是原系统中的状态变量； $\hat{X} \in R^2$ 是控制器的状态变量，记 $\xi = [X \quad \hat{X}]^T$ 为新的状态变量； A_{cl} 、 B_{cl} 、 C_{cl} 、 D_{cl} 分别为闭环系统的参数矩阵；其余符号与文中之前相同。经简单推导，可得：

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2D_KC & B_2C_K \\ B_KC & A_K \end{bmatrix}, B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{cl} = [C \quad 0], D_{cl} = [0]$$

定理 1：将动态输出反馈 H_∞ 控制器应用于雷达陀螺稳定回路，得到的闭环系统是渐近稳定的，且从载体扰动输入 W 到雷达稳定平台惯性速度 Y 的闭环传递函数 $T_{WZ}(s)$ 的 H_∞ 范数小于 γ 的充分条件是存在一个对称正定矩阵 X_{cl} ，使得式(7)成立。

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & 0 \\ C_{cl} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

证明：对矩阵不等式(7)的左边分别左乘和右乘 $\text{diag}\{\gamma^{1/2}I, \gamma^{1/2}I, \gamma^{-1/2}I\}$ ，记 $X_K = \gamma X_{cl}$ ，得原命题成立当且存在一个对称矩阵 $X_K > 0$ ，使得式(8)成立。

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_K + X_K A_{cl} & X_K B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_K & -\gamma^2 I & 0 \\ C_{cl} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

由式(7)可推出 $A_{cl}^T X_K + X_K A_{cl} < 0$ 。由于矩阵 $X_K > 0$ ，因此闭环系统(6)是渐进稳定的，且 $V(\xi) = \xi^T(t)X_K\xi(t)$ 是系统(6)的一个 Lyapunov 函数。由于矩阵不等式(8)是严格成立的，应用矩阵的 Schur 补性质^[7]，则总可以选择一个适当的常数 $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$ ，使得式(9)成立。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cl}^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cl} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl}^T \mathbf{X}_K + \mathbf{X}_K \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{X}_K \mathbf{B}_{cl} \\ \mathbf{B}_{cl}^T \mathbf{X}_K & -\gamma^2(1-\epsilon)\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

对任意时间 $T_t > 0$, 在零初始条件下, 考虑:

$$\begin{aligned} J_{T_t} &= \int_0^{T_t} \|\mathbf{Y}(t)\|^2 dt - (1-\epsilon)\gamma^2 \int_0^{T_t} \|\mathbf{W}(t)\|^2 dt = \\ & \int_0^{T_t} [\mathbf{Y}^T(t)\mathbf{Y}(t) - \gamma^2(1-\epsilon)\mathbf{W}^T(t)\mathbf{W}(t) + \\ & \frac{d}{dt}\mathbf{V}(\boldsymbol{\xi})] dt - \mathbf{V}(\boldsymbol{\xi}(T_t)) = \\ & \int_0^{T_t} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \mathbf{W}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cl}^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cl} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \mathbf{W}(t) \end{bmatrix} dt - \mathbf{V}(\boldsymbol{\xi}(T_t)) + \\ & \int_0^{T_t} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \mathbf{W}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl}^T \mathbf{X}_K + \mathbf{X}_K \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{X}_K \mathbf{B}_{cl} \\ \mathbf{B}_{cl}^T \mathbf{X}_K & -\gamma^2(1-\epsilon)\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ \mathbf{W}(t) \end{bmatrix} dt \end{aligned} \quad (10)$$

将式(9)应用于式(10), 并由零初始条件, 可得式(11):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{X}_K \boldsymbol{\xi}(t) + \int_0^{T_t} \mathbf{Y}^T(t) \mathbf{Y}(t) dt < \\ \gamma^2(1-\epsilon) \int_0^{T_t} \mathbf{W}^T(t) \mathbf{W}(t) dt \end{aligned} \quad (11)$$

由载体扰动输入信号 $\mathbf{W} \in L_2[0, \infty)$ 以及前文所证的闭环系统的渐进稳定性, 在式(11)两端令积分上限 $T_t \rightarrow \infty$, 可得式(12):

$$\|\mathbf{Y}\|_2^2 \leq (1-\epsilon)\gamma^2 \|\mathbf{W}\|_2^2 < \gamma^2 \|\mathbf{W}\|_2^2 \quad (12)$$

由此即可得到 $\Gamma_{EE} < \gamma$, 即闭环传递函数 $T_{wz}(s)$ 的 H_∞ 范数小于 γ 。证毕

矩阵 \mathbf{X}_{cl} 和动态输出反馈 H_∞ 控制器参数矩阵 $\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{C}_K, \mathbf{D}_K$ 可用变量替换法来求解, 步骤如下:

- ① 将矩阵 \mathbf{X}_{cl} 和它的逆阵分块, 并通过变量替换将 $\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K, \mathbf{C}_K, \mathbf{D}_K$ 替换成 $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}$ 。
- ② 利用式(6), 求解关于变量 $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}, \mathbf{X}_K$ 的线性矩阵不等式组。通过矩阵的满秩分解得到矩阵 \mathbf{M} 和 \mathbf{N} , 从而可以得到 \mathbf{X}_{cl} 。
- ③ 控制器参数阵可通过变量替换法回代得到。

3 仿真实验

为测试所提动态输出反馈 H_∞ 控制方法的控制性能, 开展了仿真实验研究。雷达稳定伺服系统各环节传递函数的实际参数如表 1 所示。

系统各环节	传递函数
电流环等效放大倍数 k	0.14
电流环等效时间常数 τ	0.00032
转矩系数 $C_m \Phi$	0.5
负载转动惯量 J	0.09
反电势系数 $C_e \Phi$	0.052
干扰力矩比例系数 k_m	0.01

为了得到动态

输出反馈次优 H_∞ 控制器, 用 Matlab 中 LMI 工具箱求出控制器的参数矩阵和次优的 H_∞ 性能指标。设计过程中 $\gamma = 0.015$, 计算出的次优 H_∞ 控制器的性能指标是 $\|T_{wz}(s)\|_\infty = 7.73 \times 10^{-4}$ 。输出反馈 H_∞ 控制器的参数矩阵如下:

$$\mathbf{A}_K = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.6543 & 1.6503 \\ -2.4312 & -2.3632 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} -388.4056 \\ -415.3775 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_K = [11.0047 \quad 0.9716], \quad \mathbf{D}_K = [0]$$

仿真中采用 PID 控制器 $G_{PID}(s) = (80s+5)/s$, 控制器参数进行了调试优选, 使系统没有超调, 且响应时间短。将动态输出反馈 H_∞ 控制器和 PID 控制器分别应用于 Matlab/Simulink 仿真模型中, 从阶跃响应、载体扰动抑制和伺服带宽三方面进行对比。

3.1 阶跃响应性能

设在零时刻给定速度分别为 $5^\circ/s$ 和 $10^\circ/s$, 通过 Simulink 仿真测试基于 LMI 的输出反馈 H_∞ 控制器和传统 PID 控制器的控制效果。结果如图 3 所示。

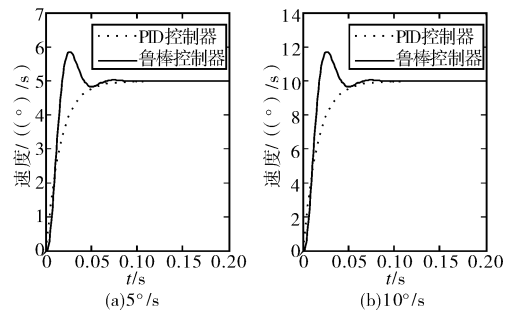


图 3 阶跃响应效果图

从调节时间和稳态误差上来看, H_∞ 控制器和 PID 控制器基本相同; 但考虑上升时间, 采用动态输出反馈 H_∞ 控制器后, 雷达稳定伺服系统速度环较 PID 控制器缩短了将近 50%, 这大大提高了雷达跟踪目标时的机动能力。

3.2 载体扰动抑制能力

对于雷达稳定控制系统, 隔离度反映了系统对载体扰动的隔离能力。隔离度定义如下^[3]:

$$\text{隔离度} = \frac{\text{惯性速度输出最大值}}{\text{载体扰动运动速度最大值}} \times 100\%$$

隔离度越小, 表示系统对载体扰动隔离能力越好。为测试系统对不同频率载体扰动的隔离能力, 使给定信号频率从 0.1~12Hz 变化, 可得到不同正弦扰动情况下的隔离度实验结果, 如表 2 所示。

表 2 不同载体扰动输入信号下的隔离度对比

扰动频率/Hz	幅值/(°)	PID 控制器	H_∞ 控制器
0.1	10	2.39×10^{-3}	1.21×10^{-3}
0.5	10	2.39×10^{-3}	1.21×10^{-3}
1	10	2.39×10^{-3}	1.21×10^{-3}
3	1.1	2.29×10^{-3}	1.24×10^{-3}
5	0.4	2.13×10^{-3}	1.27×10^{-3}
8	0.16	1.88×10^{-3}	1.34×10^{-3}
12	0.07	1.55×10^{-3}	1.48×10^{-3}

在抗载体扰动性能测试中,对于频率为从 0.1~12Hz 频率不等的载体扰动正弦信号时,分别采用动态输出反馈 H_∞ 控制器与 PID 控制器的闭环系统相比,有动态输出反馈 H_∞ 控制器的闭环系统惯性速度输出幅值更小的正弦信号。从表中可以看出,随着载体扰动信号频率的增大,PID 控制器和 LMI 控制器的系统隔离度均有所降低,但对于频率 0.1~5Hz 的载体扰动,采用文中提出的鲁棒 H_∞ 控制器后,系统隔离度均提高 50%左右;而对于频率大于 6Hz 的载体扰动,隔离度提高了 10%~30%。可见,基于 LMI 提出的输出反馈 H_∞ 控制器较 PID 使得载体有了更好的载体抗扰能力,使系统的隔离度有了显著的提高。

传统的鲁棒 H_∞ 控制器一般具有输出控制量大,物理可实现性较差等缺点。而文中提出的基于 LMI 的输出反馈 H_∞ 控制器则克服了上述缺点。在雷达稳定伺服系统的仿真实验中可得出以上结论,见图 4。

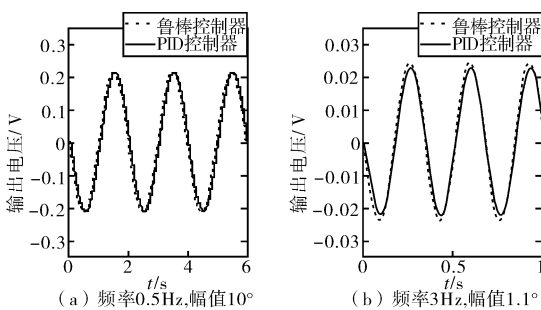


图 4 控制器输出对比图

图 4 是伺服系统在不同载体扰动输入情况下的仿真图,其中图 4(a)和图 4(b)分别为频率 0.5Hz 幅值 10°和频率 3Hz 幅值 1.1°的载体扰动实验结果。从图中可以看出此 H_∞ 控制器的控制输出量确实与 PID 控制器基本相同,从而使得该控制器可以更加方便的在实际控制系统中实现。

3.3 伺服带宽测试

将文中设计的动态反馈 H_∞ 控制器应用于雷达稳定伺服系统,其闭环传递函数 Bode 图如图 5 所示。

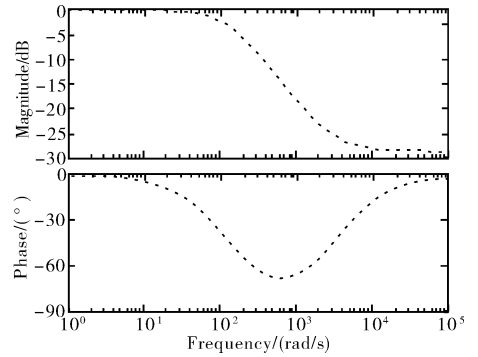


图 5 动态反馈控制器闭环系统 Bode 图

从图中可以看出闭环系统的伺服带宽达 18.9Hz,同样可以测试应用 PID 控制器的闭环系统伺服带宽为 9.7Hz,见图 6。动态反馈 H_∞ 控制器与 PID 控制器相比,可显著提高伺服系统的伺服带宽,从而可以改善动态响应能力。

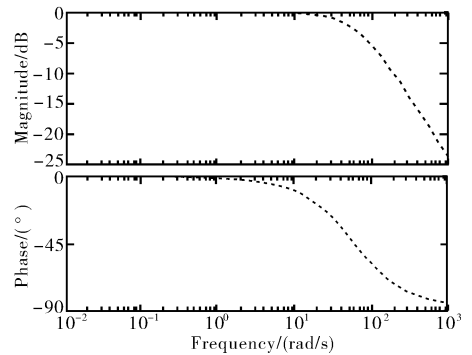


图 6 PID 控制器闭环系统 Bode 图

4 结论

文中从 H_∞ 范数的角度分析了雷达稳定伺服系统的载体扰动对天线惯性速度输出的影响,基于线性矩阵不等式 LMI 设计了动态输出反馈 H_∞ 控制器,该控制器为二阶控制器,形式简单,参数设计合理,物理实现较为容易。仿真结果表明,与传统 PID 控制器作比较,基于 LMI 设计的动态输出反馈 H_∞ 控制器对雷达伺服系统的整体控制性能有较大改善。载体扰动抑制方面隔离度有了显著的提高,并且 H_∞ 控制器控制量未饱和,这对雷达伺服实际系统的控制器设计有很大参考意义。文中提出的基于 LMI 的动态输出反馈 H_∞ 控制器没有考虑系统延时的影响,后续有关隔离度问题的研究将着重考虑如何考虑系统延时时对隔离度指标的影响以及如何在全数字化控制系统中实现输出反馈 H_∞ 控制器。