

光纤陀螺随机漂移非参数 ARMA 模型的建立与分析*

叶 军, 陈 坚, 石国祥

(第二炮兵工程学院, 西安 710025)

摘 要:针对光纤陀螺随机漂移的非线性,提出了运用一类非参数 ARMA 模型(FARMA 模型)对光纤陀螺漂移数据进行建模。依据某型光纤陀螺的实测数据,通过比较选择了 FARMA(2,1,1)模型作为该型光纤陀螺随机漂移数据的模型。在此基础上对模型进行了适用性检验,同时对该模型的拟合结果进行分析,结果表明 FARMA(2,1,1)模型能够更好的描述光纤陀螺随机漂移。

关键词:光纤陀螺;随机漂移;FARMA 模型;适用性;拟合结果

中图分类号:V241.5 **文献标志码:**A

The Establishment and Analysis of Nonparametric ARMA Modeling of Fiber-optic Gyro's Random Drift

YE Jun, CHEN Jian, SHI Guoxiang

(The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China)

Abstract: According to nonlinearity of fiber-optic gyro random drift, a nonparametric ARMA model (FARMA model) was used in modeling of fiber-optic gyro drift data. Based on data by a type of fiber-optic gyro, after comparison, the FARMA(2,1,1) model of the fiber-optic gyro drift data was chosen. On the basis of applicability test of the model and analysis on the model's fitting result, the result indicated that the FARMA(2,1,1) model can better describe the fiber optic gyro random drift.

Keywords: fiber-optic gyro; random drift; FARMA model; applicability; fitting result

0 引言

光纤陀螺随机漂移是影响光纤陀螺精度的重要因素,而人们对于光纤陀螺随机漂移也在不断的进行深入的分析,尽管目前 ARMA 模型已形成相对完善的理论,而且在光纤陀螺随机漂移的分析中也得到了广泛的应用,但是其应用的前提是假设光纤陀螺随机漂移是线性的,而在工程实际中由于陀螺漂移是弱非线性和弱时变的^[1],所以无法满足这一前提条件,因此需要在 ARMA 模型的基础上研究适宜光纤陀螺随机漂移的建模方法。

针对上述存在的问题,为了得到更加准确的光纤陀螺随机漂移模型,文中引入了一种非参数 ARMA 模型——FARMA 模型(函数系数自回归滑动平均模型),并提出运用 FARMA 模型来对光纤陀螺随机漂移数据进行建模,依据某型光纤陀螺的实测数据,建立合适的模型,并对模型进行适用性检验和拟合结果分析,最终得到了比较理想的结论。

1 非参数 ARMA(FARMA) 模型

1.1 FARMA(p,q,d) 模型的引入

文献[2]在研究指数函数系数自回归(EXPAR)模型、函数系数自回归(FAR)模型等的基础上提出了一类新的非参数时间序列模型:

$$x_t = \sum_{m=1}^p f_m(x_{t-d})x_{t-m} + \epsilon_t + \sum_{m=1}^q b_m \epsilon_{t-m} \quad (1)$$

其中 $\{\epsilon_t\}$ 是均值为 0、方差有限的独立同分布序列,正整数 d 称为延迟参数, $f_1(\cdot), \dots, f_p(\cdot)$ 是任意的一元函数,则模型(1)为 FARMA 模型,它是 ARMA 模型的直接推广。文献[2]已经证明:对于 FARMA 模型如式(1),假定 $|f_j(\cdot)| \leq c_j, j = 1, 2, \dots, p, \epsilon_t$ 绝对连续且其密度函数在实轴上处处为正,如果特征函数 $\lambda^p - c_1 \lambda^{p-1} - \dots - c_p = 0$ 所有的根都在单位圆内,则 FARMA 模型是平稳的。另外, FARMA 模型的可逆性条件与 MA 模型的可逆性条件是一样的,即 $\lambda^q + b_1 \lambda^{q-1} + \dots + b_q = 0$ 的根都在单位圆内。

* 收稿日期:2011-01-10

作者简介:叶军(1985-),男,浙江兰溪人,硕士研究生,研究方向:控制、仿真与决策。

1.2 FARMA(p, q, d) 模型参数和非参数的估计

应用 FARMA 模型的关键在于其参数和非参数(系数函数)的估计,需要估计的不仅有参数 $\theta = (b_1, \dots, b_q)^T$ 和 σ^2 , 还有系数函数 $\{f_m(\cdot)\}_{m=1}^p$ 。设 $\{x_t, 1 \leq t \leq N\}$ 为一组观测值,对上述参数和系数函数估计的基本思想是条件估计方法,即先固定 $\{f_m(\cdot)\}_{m=1}^p$, 全局估计 $\theta = (b_1, \dots, b_q)^T$; 再固定 $\theta = (b_1, \dots, b_q)^T$, 局域估计 $\{f_m(\cdot)\}_{m=1}^p$ 。估计的基本方法是最小化残差平方和,即:

$$\sum_{t=p'+1}^N \hat{\varepsilon}_t^2 = \sum_{t=p'+1}^N \left[x_t - \sum_{m=1}^p f_m(x_{t-d})x_{t-m} - \sum_{m=1}^q b_m \hat{\varepsilon}_{t-m} \right]^2 \quad (2)$$

其中 $p' = \max(p, q, d)$, 等式右边的 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ 由 $\hat{\varepsilon}_t = x_t -$

$\sum_{m=1}^p f_m(x_{t-d})x_{t-m} - \sum_{m=1}^q b_m \hat{\varepsilon}_{t-m}$ 递推得到,初值设为 $x_t = \hat{\varepsilon}_t = 0, t \leq 0$ 。若 $\{f_m(\cdot)\}_{m=1}^p$ 已知,则式(2)变为:

$\sum_{t=p'+1}^N [y_t^{(0)} - \sum_{m=1}^q b_m \hat{\varepsilon}_{t-m}]^2$, 其中 $y_t^{(0)} = x_t - \sum_{m=1}^p f_m(x_{t-d}) \cdot x_{t-m}$ 。由最小二乘法原理可得全局估计结果:

$$\hat{\theta} = (\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{Y}_0$$

其中: $\mathbf{X}(x_i) = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{p'} & \hat{\varepsilon}_{p'-1} & \dots & \hat{\varepsilon}_{p'+1-q} & (x_{p'+1-d} - x_i)x_{p'} & (x_{p'+1-d} - x_i)x_{p'-1} & \dots & (x_{p'+1-d} - x_i)x_{p'+1-p} \\ \hat{\varepsilon}_{p'+1} & \hat{\varepsilon}_{p'} & \dots & \hat{\varepsilon}_{p'+2-q} & (x_{p'+2-d} - x_i)x_{p'+1} & (x_{p'+2-d} - x_i)x_{p'} & \dots & (x_{p'+2-d} - x_i)x_{p'+2-p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\varepsilon}_{N-1} & \hat{\varepsilon}_{N-2} & \dots & \hat{\varepsilon}_{N-q} & (x_{N-d} - x_i)x_{N-1} & (x_{N-d} - x_i)x_{N-2} & \dots & (x_{N-d} - x_i)x_{N-p} \end{pmatrix}$,

$\mathbf{Y} = (y_{p'+1}, y_{p'+2}, \dots, y_N)^T, \omega(x_i) = \text{diag}(Kh(x_{p'+1-d} - x_i), Kh(x_{p'+2-d} - x_i), \dots, Kh(x_{N-d} - x_i))$ 。

1.3 参数与非参数估计的递推算法及其流程

基于递推算法的基本思想,当获取新的数据 x_{N+1} 后,为了在运用递推最小二乘法时方便表述定义以下矩阵,令: $\mathbf{P}_N = (\mathbf{E}(N)^T \mathbf{E}(N))^{-1}, \mathbf{K}_{N+1} = \mathbf{P}_N \cdot \mathbf{E}(N+1) \cdot (1 + \mathbf{E}^T(N+1) \cdot \mathbf{P}_N \cdot \mathbf{E}(N+1))^{-1}, \mathbf{P}'_N = [\mathbf{X}^T(x_i; \mathbf{W}(x_i) \mathbf{X}(x_i))]^{-1}, \mathbf{K}'_{N+1} = \mathbf{P}'_{N+1} \cdot \mathbf{X}(N+1) \cdot \mathbf{K}_h(x_{N+1-d-x_i})$,可推导得 $\theta, \Phi(x_i)$ 的递推最小二乘估计表达式分别为:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + \mathbf{K}_{N+1} \cdot (y_{N+1}^{(0)} - \mathbf{E}^T(N+1) \cdot \hat{\theta}_N) \\ \mathbf{P}_{N+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{N+1} \cdot \mathbf{E}^T(N+1)) \cdot \mathbf{P}_N \end{cases}$$

其中: $y_{N+1}^{(0)} = x_{N+1} - \sum_{m=1}^p f_m(x_{N+1-d})x_{N+1-m}, \mathbf{E}(N+1) = (\varepsilon_N, \varepsilon_{N-1}, \dots, \varepsilon_{N+1-q})^T$ 。

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_{N+1}(x_i) = \hat{\Phi}_N(x_i) + \mathbf{K}'_{N+1} \cdot (y_{N+1} - \mathbf{X}^T(N+1) \cdot \hat{\Phi}_N(x_i)) \\ \mathbf{P}'_{N+1} = \mathbf{P}'_N - \mathbf{P}'_N \cdot \mathbf{X}(N+1) \cdot \mathbf{X}^T(N+1) \cdot \mathbf{P}'_N / [\mathbf{K}_h^{-1}(x_{N+1-d} - x_i) + \mathbf{X}^T(N+1) \cdot \mathbf{P}'_N \cdot \mathbf{X}(N+1)] \end{cases}$$

其中:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{p'} & \hat{\varepsilon}_{p'-1} & \dots & \hat{\varepsilon}_{p'+1-q} \\ \hat{\varepsilon}_{p'+1} & \hat{\varepsilon}_{p'} & \dots & \hat{\varepsilon}_{p'+2-q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\varepsilon}_{N-1} & \hat{\varepsilon}_{N-2} & \dots & \hat{\varepsilon}_{N-q} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_0 = (y_{p'+1}^{(0)}, y_{p'+2}^{(0)}, \dots, y_N^{(0)})^T$$

局域估计的方法与全局估计方法类似,不同的是需对 $\{f_m(\cdot)\}_{m=1}^p$ 在 x_t 附近作泰勒展开,得到零次项和一次项系数为 $\{c_m, d_m\}_{m=1}^p$,即:

$$f_m(x) \approx f_m(x_i) + f'_m(x_i)(x - x_i) \equiv c_m + d_m(x - x_i) \quad (3)$$

为估计 $f_1(x_i), f_2(x_i), \dots, f_p(x_i)$, 对式(2)进行极小化,得:

$$\sum_{t=p'+1}^N [y_t - \sum_{m=1}^p (c_m + d_m(x_{t-d} - x_i))x_{t-m}]^2 K_h(x_{t-d} - x_i) \quad (4)$$

其中: $y_t = x_t - \sum_{m=1}^q b_m \hat{\varepsilon}_{t-m}, K_h(\cdot) = K(\cdot/h)/h$ 为给定的核函数, $h > 0$ 为给定的窗宽。设 $\Phi = (c_1, c_2, \dots, c_p, d_1, d_2, \dots, d_p)^T$, 则由加权最小二乘理论得:

$$\hat{\Phi}(x_i) = [\mathbf{X}^T(x_i) \omega \mathbf{X}(x_i)]^{-1} \mathbf{X}^T(x_i) \omega(x_i) \mathbf{Y} \quad (5)$$

其中: $y_{N+1} = x_{N+1} - \sum_{m=1}^q b_m \hat{\varepsilon}_{N+1-m}, \mathbf{X}(N+1) = (x_N, \dots, x_{N+1-p}, (x_{N+1-d} - x_0)x_N, \dots, (x_{N+1-d} - x_i)x_{N+1-p})^T$ 。

在估计过程中,由于 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ 是未知的,因此一旦得到 θ 或 $\{f_m(\cdot)\}_{m=1}^p$ 新的估计值,均需要重新由式(2)递推计算,其估计流程图如图 1 所示。最后用 $\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=p'+1}^N \hat{\varepsilon}_t^2 / (N - P')$ 作为 σ^2 的估计。

2 光纤陀螺随机漂移数据 FARMA 模型的建立与分析

通过测试光纤陀螺的静态输出,可以注意到序列均值很快能达到稳定,方差的稳定需要一定的时间,当数据长度超过 200s 时,均值和方差就基本达到稳定状态。因此,取 400s 数据进行光纤陀螺随机漂移信号的 FARMA(p, q, d) (非参数 ARMA) 建模和分析,并取其后的 50s 用于模型的准确性检验,原始测试数据如图 2 所示。

随机数据的分析与处理是时间序列建模的第一步,首先对测试数据进行预处理,然后在此基础上对

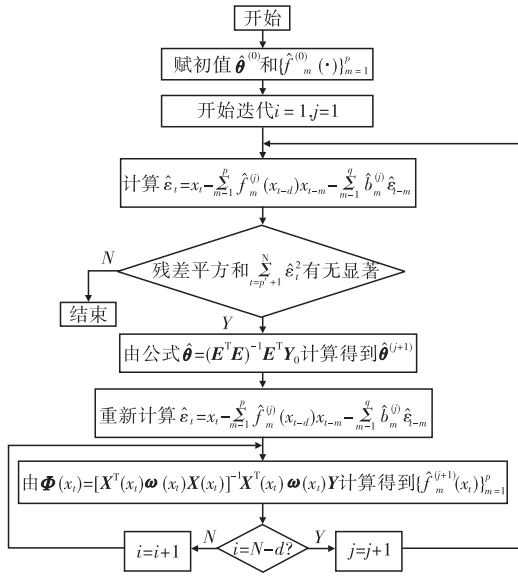


图 1 估计流程图

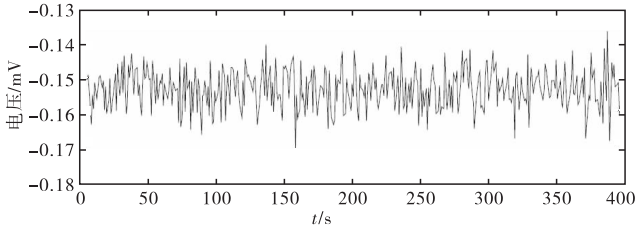


图 2 光纤陀螺的原始数据

光纤陀螺的随机漂移数据建立 FARMA(p, q, d) 模型; 最后再对所建立的模型进行适用性检验, 最终选择准确的模型。

2.1 随机漂移数据的预处理

在对光纤陀螺随机漂移误差建模之前, 首先利用莱以特准则 (Pайтa) 对原始数据中的异常值进行剔除, 然后再采用逆序法进行平稳性检验, 必要时采用差分法对数据中的趋势项进行剔除, 在此过程中也剔除了均值。从而得到剔除异常值、均值和趋势项之后的光纤陀螺测试数据如图 3 所示。

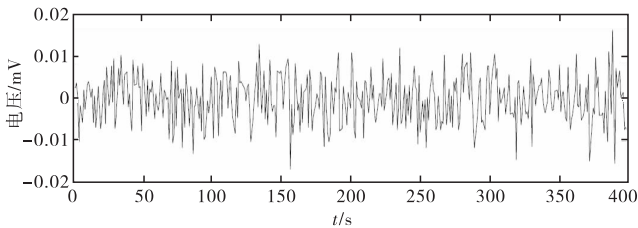


图 3 剔除异常值、去除均值后的光纤陀螺数据

2.2 FARMA(p, q, d) 模型的建立

根据文献[5-6]可知, 光纤陀螺的漂移一般采用 AR(1)、AR(2) 或 ARMA(2, 1) 来描述, 因此文中对一组剔除异常值、去除均值后的光纤陀螺 400s 实测数据 (如图 3 所示) 分别建立 FARMA(1, 1, 1), FARMA(1, 1, 2), FARMA(2, 1, 1), FARMA(2, 1, 2), FARMA(3, 1, 1), FARMA(3, 1, 2), FARMA(3,

2, 1) 和 FARMA(3, 2, 2) 等, 其结果如表 1 所示。在估计过程中, 核函数使用 Biweight 核 $K(x) = \frac{15}{16}(1-x^2)^2 I(|x| \le 1)$, 最优窗宽在 $h_j = 1.1^{-j} \times (\text{样本极差}/2)$, $j=0, 1, 2, \dots, 20$, 采用 GCV 准则选择最优窗宽。

表 1 FARMA(p, q, d) 拟合结果

FARMA(p, q, d)	残差平方和	FARMA(p, q, d)	残差平方和
(1, 1, 1)	0.2245	(3, 1, 1)	0.1795
(1, 1, 2)	0.2247	(3, 1, 2)	0.1804
(2, 1, 1)	0.1774	(3, 2, 1)	0.1835
(2, 1, 2)	0.1837	(3, 2, 2)	0.1835

以残差平方和的 F 准则检验 FARMA(2, 1, 1) 和 FARMA(3, 1, 1), 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 条件下, FARMA(2, 1, 1) 模型是适用的, 不需要增加阶数。此外

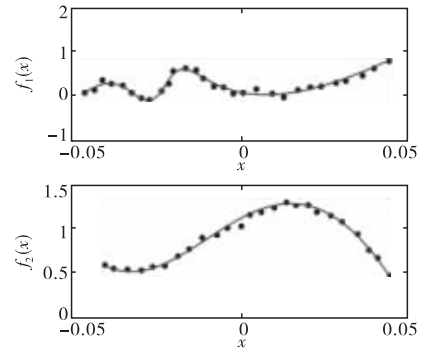


图 4 系数函数 $f_1(\cdot)$ 、 $f_2(\cdot)$ 的估计值

依据 ARMA 模型建模理论对该光纤陀螺随机漂移数据进行建模, 得到 ARMA(2, 1) 模型的残差平方和为 0.1808, 由此可见 FARMA(2, 1, 1) 模型的拟合效果更为显著。于是可得光纤陀螺随机漂移模型为: $x_i = f_1(x_{i-1})x_{i-1} + f_2(x_{i-1})x_{i-2} + \epsilon_i + b_1\epsilon_{i-1}$, 其中参数 $b_1 = -0.76352$, 系数函数 $f_1(\cdot)$ 、 $f_2(\cdot)$ 的估计值可以采用多项式拟合法进行拟合, 其拟合结果如图 4 所示, 其中估计值如图 4 中圆点所示。

2.3 FARMA(p, q, d) 模型的适用性检验

上文中已经建立光纤陀螺随机漂移的 FARMA(2, 1, 1) 模型, 但是模型是否准确还需要检验。下面运用白噪声检验准则进行模型适用性检验, 对于 FARMA(2, 1, 1) 模型, 拟合误差应该是白噪声序列, 判断拟合误差是否为独立序列的样本值, 如果是则接受该模型。先利用样本数据中的后 50 个数据来检验模型是否准确。图 5 为 50 个实测数据和 FARMA(2, 1, 1) 模型预测数据的比较, 图 6 为二者之间的误差, 图 7 为预测误差的自相关函数。

从图 7 中可以看出自相关函数非常小, 说明误差之间基本不相关, 也就是说独立的, 属于白噪声类型。因此说明 FARMA(2, 1, 1) 模型是准确和适用的。

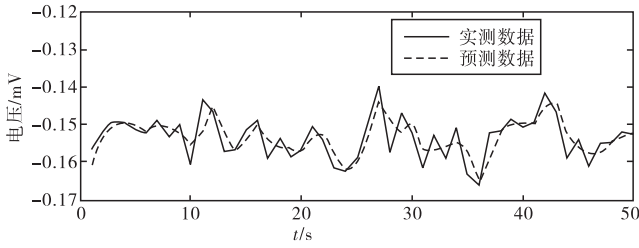


图 5 光纤陀螺实测数据与 FARMA(2,1,1) 模型预测数据的比较

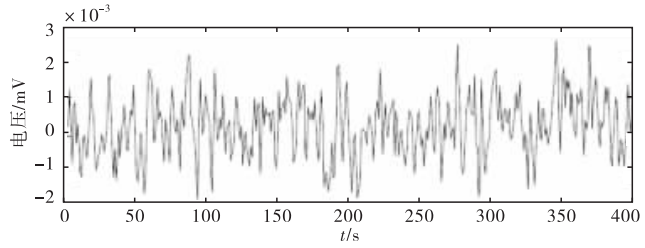


图 9 FARMA(2,1,1)模型拟合数据与实测数据之间的误差

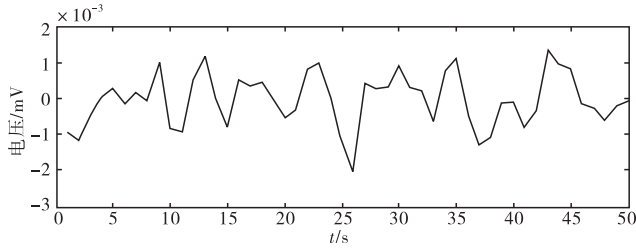


图 6 FARMA(2,1,1)模型的预测误差

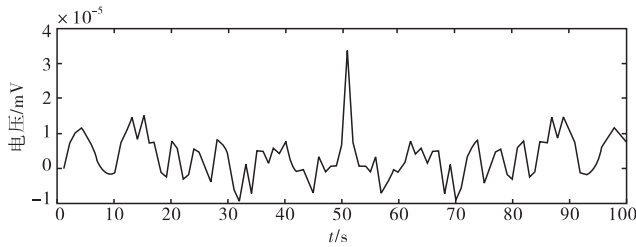


图 7 FARMA(2,1,1)模型的预测误差的自相关函数

3 光纤陀螺随机漂移建模结果分析

根据上文中的 FARMA 建模结果,下面用 FARMA(2,1,1)模型来拟合原始数据,可得拟合数据如图 8 所示,而与原始数据之间的拟合误差如图 9 所示。从数据的拟合结果和拟合误差可以看出,应用 FARMA(2,1,1)模型取得了很好的效果。

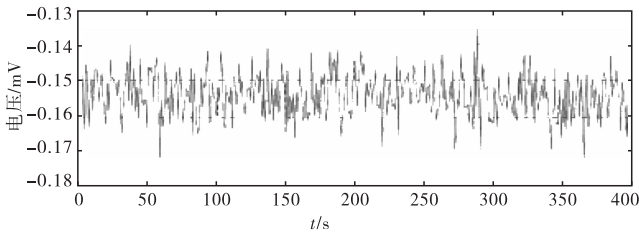


图 8 FARMA(2,1,1)模型的拟合数据

4 结论

针对光纤陀螺随机漂移呈现的非线性,文中提出了运用一类非参数 ARMA 模型(FARMA,即函数系数自回归滑动平均模型)对某型光纤陀螺的随机漂移进行建模,选取 400s 实测光纤陀螺数据用于建立 FARMA 模型,通过分析比较选择 FARMA(2,1,1)模型来描述该型光纤陀螺随机漂移,并对该模型进行适用性检验和模型拟合结果分析,结果表明 FARMA 模型能较好的反映光纤陀螺随机漂移的非线性,且 FARMA(2,1,1)模型描述随机漂移具有很高的准确性。

参考文献:

- [1] Lefevre H C. 光纤陀螺仪[M]. 张桂才,王巍,译. 北京:国防工业出版社,2002.
- [2] 王少锋,王海斌,蔡俊娟. 一类非参数的 ARMA 模型[J]. 厦门大学学报:自然科学版,2006,45(5):628-633.
- [3] 康健,芮国胜. 粒子滤波算法的关键技术应用[J]. 火力与指挥控制,2007,32(4):53-55.
- [4] 王海,陈家斌,黄威. 光纤陀螺随机漂移测试及分析[J]. 光学技术,2004,30(5):623-624.
- [5] 李晓峰,徐军,张胜修. 光纤陀螺随机误差建模与滤波方法研究[J]. 光学技术,2008,34(增):179-180.
- [6] 王新龙,陈涛,杜宇. 基于 ARMA 模型的光纤陀螺漂移数据建模方法研究[J]. 弹箭与制导学报,2006,26(1):5-7.