文章编号:1001-506X(2011)01-0157-05

连续 Markov 跳变奇异系统的稳定性分析与镇定

高 明[1],盛 立[2]

(1. 山东科技大学信息与电气工程学院,山东 青岛 266510;
2. 中国石油大学(华东)信息与控制工程学院,山东 东营 257061)

摘 要:研究了一类连续 Markov 跳变奇异系统的稳定性与镇定控制,得到了保证连续 Markov 跳变奇异系统正则、无脉冲、随机稳定的充分性条件,并设计了相应的镇定控制器。与已有文献中的结论相比,文中研究系统的模式跳变转移概率可以是部分未知的,所得条件以严格线性矩阵不等式的形式给出,具有更小的保守性。仿真实例验证了文中结论的正确性。

关键词:奇异系统;连续 Markov 跳变系统;镇定控制;部分未知转移概率

中图分类号:TP 273 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.issn.1001-506X.2011.01.32

Stability analysis and stabilization of continuous-time Markov jump singular systems

GAO Ming[1], SHENG Li[2]

(*1. College of Information and Electrical Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China;*
2. College of Information and Control Engineering, China University of Petroleum (East China), Dongying 257061, China)

Abstract: The stability and stabilization problem for a class of continuous-time Markov jump singular systems is investigated. A sufficient condition is proposed for the Markov jump singular system to be regular, impulse-free and stochastically stable, and the design of the stabilizing controller is presented. Comparing with the previous literature, the system under consideration is more general since their transition probabilities of mode jumps can be partly unknown, and the results are presented in terms of a strict linear matrix inequality. A numerical example shows the effectiveness of the obtained result.

Keywords: singular system; continuous-time Markov jump system; stabilization; partly unknown transition probability

0 引 言

奇异系统是比状态空间系统更为一般的动力系统,存在于航天工程系统、神经网络、化学反应系统和经济系统等许多实际系统模型中[1]。由于奇异系统在众多领域应用广泛,其相关的控制理论研究引起了众多学者的关注,取得了不少重要成果[2-5]。在工业和科学领域中,许多系统在运行过程中常会由于系统内部各个子系统间连接方式改变等原因而发生结构上的变化。20 世纪 60 年代,文献[6]首次提出了 Markov 跳变系统的概念,建立了线性 Markov 跳变系统模型[6]。近年来,Markov 跳变系统(Markov jump systems, MJSs)的稳定性分析与镇定受到了国内外学者的普遍关注[7-9]。

在已有对 MJSs 的研究中,文献[10]对 Markov 跳变奇异系统的控制问题进行研究,但所得结论大多未以严格的线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)表示,因此难以求解。文献[11-12]针对连续和离散 Markov 跳变奇异系统的稳定性分析与镇定控制问题展开研究,所得稳定性判据均以严格 LMI 形式表示。此外,在现有的相关研究中,大多假设 Markov 跳变奇异系统的转移概率完全已知。但实际 MJSs 中转移概率的全部信息可能难以获取,因此研究转移概率部分未知的 MJSs 十分必要。文献[13]研究了具有部分未知转移概率的连续和离散 Markov 跳变系统的稳定性与镇定控制。

本文对转移概率部分未知的连续 Markov 跳变奇异系

收稿日期:2009-12-18; **修回日期**:2010-08-24。
基金项目:教育部科学技术研究重点项目基金(210268);山东省自然科学基金(ZR2010FQ013)资助课题
作者简介:高明(1981-),女,讲师,博士,主要研究方向为混杂系统、随机系统的控制。E-mail:yuming_gao@163.com

统的稳定性与镇定控制问题进行研究。建立了保证此类系统正则、无脉冲、随机稳定的充分性判据,所得判据以严格线性矩阵不等式的形式表示,同时给出了状态反馈控制器的设计方法。

1 问题描述

连续 Markov 跳变奇异系统可描述为

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(\eta_t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(\eta_t)\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为系统状态;$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 为控制输入;$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{A}(\eta_t)$和 $\boldsymbol{B}(\eta_t)$为适当维数的已知常数矩阵,且 rank $(\boldsymbol{E})=r\leqslant n$。$\{\eta_t,t\geqslant 0\}$为取值于有限状态空间 $\boldsymbol{T}=\{1,2,\cdots,N\}$的连续 Markov 过程,其转移概率为

$$P_r\{\eta_{t+\delta}=j\mid\eta_t=i\}=\begin{cases}\pi_{ij}\delta+o(\delta),\ i\neq j\\1+\pi_{ii}\delta+o(\delta),\ i=j\end{cases}$$

式中,$\delta>0$,$\lim\limits_{\delta\to 0}o(\delta)/\delta=0$;$\pi_{ij}\geqslant 0$,$i,j\in\boldsymbol{T}$ 表示从时刻 t 状态 i 转移到时刻 $t+\delta$ 状态 $j\,(j\neq i)$的转移率,且满足 $\pi_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\pi_{ij}$。定义转移概率矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 为

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}\pi_{11}&\pi_{12}&\cdots&\pi_{1N}\\\pi_{21}&\pi_{22}&\cdots&\pi_{2N}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\pi_{N1}&\pi_{N2}&\cdots&\pi_{NN}\end{bmatrix}$$

为了证明方便,当 $\eta_t=i\in\boldsymbol{T}$,$\boldsymbol{A}_i$ 与$\boldsymbol{B}_i$ 分别表示第 i 个模式下的矩阵$\boldsymbol{A}(\eta_t)$与 $\boldsymbol{B}(\eta_t)$。

设连续 Markov 跳变过程的转移概率部分未知,即矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 中的某些元素是时不变但未知的。例如,某 Markov 跳变系统可能具有如下形式的转移概率矩阵

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}\pi_{11}&\pi_{12}&?&?\\?&\pi_{22}&?&?\\?&\pi_{32}&?&\pi_{34}\\?&?&\pi_{43}&\pi_{44}\end{bmatrix}$$

式中,"?"表示不可获得的元素。对于 $\forall\, i\in\boldsymbol{T}$,令 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_K^i+\boldsymbol{T}_{UK}^i$,其中

$$\boldsymbol{T}_K^i\triangleq\{j:\pi_{ij}\ \text{已知}\},\ \boldsymbol{T}_{UK}^i\triangleq\{j:\pi_{ij}\ \text{未知}\} \tag{2}$$

如果$\boldsymbol{T}_K^i\neq\varnothing$,则

$$\boldsymbol{T}_K^i=\{K_1^i,\cdots,K_m^i\},\ 1\leqslant m\leqslant N \tag{3}$$

式中,$K_m^i\in\mathbf{N}^+$ 代表转移概率矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 第 i 行中序号为 K_m^i 的第 m 个已知元素。此外,定义 $\pi_K^i=\sum\limits_{j\in\boldsymbol{T}_K^i}\pi_{ij}$。

定义 1[11-12]

(1) 对于 $u(t)=0$,如果 $\forall\, i\in\boldsymbol{T}$, det $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_i)\neq 0$,则称连续 Markov 跳变奇异系统(1)是正则的。

(2) 对于 $u(t)=0$,如果 $\forall\, i\in\boldsymbol{T}$, deg (det $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_i))=$ rank $(\boldsymbol{E})$,则称连续 Markov 跳变奇异系统(1)是无脉冲的。

(3) 对于 $u(t)=0$,如果对任意初始状态$(\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,\eta_0\in\boldsymbol{T})$,存在标量 $M(\boldsymbol{x}_0,\eta_0)>0$ 使下式成立

$$E\left\{\int_0^\infty\|\boldsymbol{x}(t)\|^2\mathrm{d}t\mid\boldsymbol{x}_0,\eta_0\right\}\leqslant M(\boldsymbol{x}_0,\eta_0)$$

式中,E 表示数学期望,则称连续 Markov 跳变奇异系统(1)是随机稳定的。

(4) 如果连续 Markov 跳变奇异系统(1)为正则、无脉冲和随机稳定的,则称其是随机容许的。

对系统(1),考虑如下模式依赖的线性状态反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}(\eta_t)\boldsymbol{x}(t) \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{K}_i(\eta_t=i\in\boldsymbol{T})$是要确定的控制增益矩阵,其闭环系统为

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}(t) \tag{5}$$

设 $\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{(n-r)\times n}$ 和 $\boldsymbol{S}\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 分别为满足 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=0$ 和 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}=0$ 的行满秩和列满秩矩阵。

引理 1[11] 若 $u(t)=0$,系统(1)是随机容许的,当且仅当存在 $\boldsymbol{P}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}>0$,$i\in\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{\Phi}_i\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,使 $\forall\, i\in\boldsymbol{T}$,下面的线性矩阵不等式成立

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\times\\&\boldsymbol{A}_i+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}<0\end{aligned} \tag{6}$$

引理 2[14] 设矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是对称的,且满足 $\boldsymbol{E}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_R>0$,矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 是非奇异的,则矩阵 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 是非奇异的,且其逆可表示为

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{-1}=\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{\Phi}}\boldsymbol{S} \tag{7}$$

式中,矩阵 $\boldsymbol{E}_L$ 和 $\boldsymbol{E}_R$ 是列满秩的,且满足 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_L\boldsymbol{E}_R^{\mathrm{T}}$;矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}}$ 是对称的;矩阵 $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ 是非奇异的,且满足

$$\boldsymbol{E}_L^{\mathrm{T}}\bar{P}\boldsymbol{E}_L=(\boldsymbol{E}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_R)^{-1} \tag{8}$$

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}=(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{9}$$

2 主要结果

定理 1 假设转移概率(2)部分未知,如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}>0$,非奇异矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_i\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,$i\in\boldsymbol{T}$,使得对于$\forall\, i\in\boldsymbol{T}$有如下线性矩阵不等式成立

$$\begin{aligned}&(1+\pi_K^i)[\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\\&\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i]+\sum_{j\in\boldsymbol{T}_K^i}\pi_{ij}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}<0\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i+\\&\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}<0,\ \forall\, j\in\boldsymbol{T}_{UK}^i,\ j\neq i\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i+\\&\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}>0,\ \forall\, j\in\boldsymbol{T}_{UK}^i,\ j=i\end{aligned} \tag{12}$$

则当 $u(t)=0$ 时,系统(1)是随机容许的。

证明 根据引理 1,如果式(6)成立,则系统(1)是随机容许的。由于 $\sum\limits_{j\in\boldsymbol{T}}\pi_{ij}=0$,式(6) 的左边可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_i=&\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i+\\&\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}+\sum_{j\in\boldsymbol{T}}\pi_{ij}[\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})+\\&(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i]\end{aligned}$$

由式(2)可知有下式成立

$$\boldsymbol{\Psi}_i=\Big(1+\sum_{j\in \boldsymbol{T}_K^i}\pi_{ij}\Big)[\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_i]+\sum_{j\in \boldsymbol{T}_K^i}\pi_{ij}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}+\sum_{j\in \boldsymbol{T}_{UK}^i}\pi_{ij}[\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_i]+\sum_{j\in \boldsymbol{T}_{UK}^i}\pi_{ij}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}=(1+\pi_K^i)[\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_i]+\sum_{j\in \boldsymbol{T}_K^i}\pi_{ij}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}+\sum_{j\in \boldsymbol{T}_{UK}}\pi_{ij}[\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}] \tag{13}$$

若 $\forall j\in \boldsymbol{T}_{UK}^i$ 且 $i\in \boldsymbol{T}_K^i$,则由式(10)、式(11)和 $\pi_{ij}>0(\forall i,j\in \boldsymbol{T},j\neq i)$ 可知式(13)中 $\boldsymbol{\Psi}_i<0$。另一方面,若 $\forall j\in \boldsymbol{T}_{UK}^i$ 且 $i\notin \boldsymbol{T}_K^i$,则式(13)可写为

$$\boldsymbol{\Psi}_i=(1+\pi_K^i)[\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_i]+\sum_{j\in \boldsymbol{T}_K^i}\pi_{ij}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}+\pi_{ii}[\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}]+\sum_{j\in \boldsymbol{T}_{UK}^i,j\neq i}\pi_{ij}[\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_iE+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}] \tag{14}$$

根据式(10)～式(12)和 $\pi_{ii}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\pi_{ij}<0$,可得式(14)中 $\boldsymbol{\Psi}_i<0$。因此,在跳变过程的转移概率(2)部分未知的情况下,如果条件式(10)～式(12)成立,则当 $u(t)=0$ 时,系统(1)是随机容许的。　　证毕

注 1　定理 1 给出了保证一类 Markov 跳变奇异系统随机容许的充分性条件。与文献[10]中相关的非严格 LMI 条件不同,定理 1 中的条件式(10)～式(12)均以严格 LMI 形式给出,容易被已有的仿真软件验证。

下面将设计模式依赖的状态反馈控制器(4),使闭环系统(5)在转移概率部分未知的情况下达到随机容许。

定理 2　设转移概率(2)部分未知,闭环系统(5)是随机容许的,如果对于给定的任意常数 $\varepsilon_i,i\in \boldsymbol{T}$,存在正定矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}>0$,非奇异矩阵 $\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,矩阵 $\boldsymbol{L}_i\in\mathbf{R}^{m\times n}$,$\boldsymbol{H}_i\in\mathbf{R}^{m\times(n-r)}$,$i\in \boldsymbol{T}$,使如下线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix}[(1+\pi_K^i)\boldsymbol{\Sigma}_i+\pi_{ii}(\varepsilon_i\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}+\varepsilon_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{Y}_i-\varepsilon_i^2\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}^{\mathrm T})] & \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{M}_K^i)^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{M}_K^i\boldsymbol{Y}_i & -\boldsymbol{N}_K^i(\bar{\boldsymbol{P}})\end{bmatrix}<0,\ \forall i\in \boldsymbol{T}_K^i \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}(1+\pi_K^i)\boldsymbol{\Sigma}_i\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm T} & \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm T}(\boldsymbol{M}_K^i)^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{M}_K^i\boldsymbol{Y}_i & -\boldsymbol{N}_K^i(\bar{\boldsymbol{P}})\end{bmatrix}<0,\ \forall i\notin \boldsymbol{T}_K^i \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_i & \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{E}_R^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{E}_R\boldsymbol{Y}_i & -\boldsymbol{E}_R^{\mathrm T}\bar{\boldsymbol{P}}_j\boldsymbol{E}_R\end{bmatrix}<0,\ \forall j\in \boldsymbol{T}_{UK}^i,j\neq i \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_i+\varepsilon_i\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}+\varepsilon_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{Y}_i-\varepsilon_i^2\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{P}}_j\boldsymbol{E}^{\mathrm T}>0,\ \forall j\in \boldsymbol{T}_{UK}^i,j=i \tag{18}$$

式中

$$\boldsymbol{\Sigma}_i=\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm T}+\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{Y}_i+(\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{E}^{\mathrm T}+\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{R})^{\mathrm T}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm T}+\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{E}^{\mathrm T}+\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{R})$$

$$\boldsymbol{Y}_i=\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}^{\mathrm T}+\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i\boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{M}_K^i=[\sqrt{\pi_{iK_1^i}}\boldsymbol{E}_R,\cdots,\sqrt{\pi_{iK_m^i}}\boldsymbol{E}_R]^{\mathrm T}$$

$$\boldsymbol{N}_K^i(\bar{\boldsymbol{P}})=\operatorname{diag}\{(\boldsymbol{E}_R^{\mathrm T}\bar{\boldsymbol{P}}_{K_1^i}\boldsymbol{E}_R),\cdots,(\boldsymbol{E}_R^{\mathrm T}\bar{\boldsymbol{P}}_{K_m^i}\boldsymbol{E}_R)\}$$

若线性矩阵不等式(15)～式(18)有解,则状态反馈控制增益矩阵为

$$\boldsymbol{K}_i=(\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{E}^{\mathrm T}+\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{R})(\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}^{\mathrm T}+\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i\boldsymbol{R})^{-1} \tag{19}$$

证明　由定理 1 可知闭环系统(5)是随机容许的,如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}>0$,$\boldsymbol{\Phi}_i\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,$i\in \boldsymbol{T}$,使 $\forall i\in \boldsymbol{T}$ 有如下矩阵为

$$(1+\pi_K^i)[(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\cdot(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)]+\sum_{j\in \boldsymbol{T}_K^i}\pi_{ij}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}<0 \tag{20}$$

$$(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\cdot(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)+\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}<0,\ \forall j\in \boldsymbol{T}_{UK}^i,j\neq i \tag{21}$$

$$(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\cdot(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)+\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}>0,\ \forall j\in \boldsymbol{T}_{UK}^i,j=i \tag{22}$$

若 $\forall i\in \boldsymbol{T}_K^i$,则式(20)可写为

$$(1+\pi_K^i)[(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)]+\pi_{ii}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\sum_{j\in \boldsymbol{T}_K^i,j\neq i}\pi_{ij}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_jE<0 \tag{23}$$

令

$$N_K^i(\boldsymbol{P})=\operatorname{diag}\{(\boldsymbol{E}_L^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{K_1^i}\boldsymbol{E}_L)^{-1},\cdots,(\boldsymbol{E}_L^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_{K_m^i}\boldsymbol{E}_L)^{-1}\}$$

根据 Schur 补引理,式(23)等价于

$$\begin{bmatrix}[(1+\pi_K^i)[(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm T}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{\mathrm T}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)]+\pi_{ii}\boldsymbol{E}^{\mathrm T}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}] & (\boldsymbol{M}_K^i)^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{M}_K^i & -\boldsymbol{N}_K^i(\boldsymbol{P})\end{bmatrix}<0 \tag{24}$$

令 $\boldsymbol{X}_i=(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}+\boldsymbol{R}^{\mathrm T}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}^{\mathrm T})^{-1}$,在式(24)两边分别乘以 $\operatorname{diag}\{\boldsymbol{X}_i^{\mathrm T},\boldsymbol{I}\}$ 和 $\operatorname{diag}\{\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{I}\}$,得

$$\begin{bmatrix} [(1+\pi_K^i)[\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{X}_i]+\pi_{ii}\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}_i] & \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_K^i)^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{M}_K^i\boldsymbol{X}_i & -\boldsymbol{N}_K^i(\boldsymbol{P}) \end{bmatrix}<0 \tag{25}$$

对于任意常数 ε_i，$i\in\boldsymbol{T}$，有下面不等式成立

$$0\leqslant[\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_R-\varepsilon_i\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{E}_R^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}_R)](\boldsymbol{E}_R^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}_R)^{-1}\cdot$$
$$[\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_R-\varepsilon_i\boldsymbol{E}_L(\boldsymbol{E}_R^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}_R)]^{\mathrm{T}}=$$
$$\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_R(\boldsymbol{E}_R^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}_R)^{-1}\boldsymbol{E}_R^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_i-\varepsilon_i\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-\varepsilon_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{Y}_i+\varepsilon_i^2\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=$$
$$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}_i-\varepsilon_i\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-\varepsilon_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{Y}_i+\varepsilon_i^2\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \tag{26}$$

注意到 $\pi_{ii}\leqslant 0$，因此有下式成立

$$\pi_{ii}\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}_i\leqslant\pi_{ii}(\varepsilon_i\boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{Y}_i-\varepsilon_i^2\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}) \tag{27}$$

考虑到 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_L\boldsymbol{E}_R^{\mathrm{T}}$，引理 2 和式(27)，且令 $\boldsymbol{L}_i=\boldsymbol{K}_i\bar{\boldsymbol{P}}_i$，$\boldsymbol{H}_i=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Phi}_i$，易知若式(15)成立，则式(25)成立，因此式(20)成立。

若 $\forall\, i\notin\boldsymbol{T}_K^i$，采用与上面相同的方法可得，若式(16)成立则式(20)成立。

若 $\forall\, j\in\boldsymbol{T}_{UK}^i$，$j\neq i$，利用 Schur 补引理对式(21)进行转化，并在两边分别乘以 diag $\{\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}},\boldsymbol{I}\}$ 和 diag $\{\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{I}\}$，得

$$\begin{bmatrix} [\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{X}_i] & \boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_R^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{E}_R\boldsymbol{X}_i & -(\boldsymbol{E}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}_L)^{-1} \end{bmatrix}<0$$
$$\forall\, j\in\boldsymbol{T}_{UK}^i,\ j\neq i \tag{28}$$

根据引理 2，容易看出式(17)与式(28)等价。因此若式(17)成立，则式(21)成立。

若 $\forall\, j\in\boldsymbol{T}_{UK}^i$，$j=i$，在式(22)两边分别乘以 $\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{X}_i$，得

$$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}_i\geqslant 0 \tag{29}$$

由式(26)可知，若式(18)成立，则式(29)成立，进而式(22)成立。

因此，若式(15)～式(18)成立，则式(20)～式(22)成立。根据定理 1，可知闭环系统(5)是随机容许的。　证毕

注 2　定理 2 给出了保证闭环系统(5)随机容许的充分性判据，并设计了相应的状态反馈控制器。利用文中的方法，可以进一步对转移概率部分未知的 Markov 跳变奇异系统的输出反馈控制、H_∞ 控制和滤波问题进行研究。

3　数值例子

考虑具有如下参数的四模态连续 Markov 跳变奇异系统 1：

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0.8&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1.5&-1.3&1.6\\-1.5&0.8&-0.3\\0.3&0.6&-0.5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0.3&0.7&1.1\\0.1&0.8&0.7\\0.4&0.7&0.2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0.2&0.4&0.6\\0.5&0.2&-1.5\\0.4&0.2&-0.8\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}-0.5&0.2&0.3\\-0.1&0.5&0.7\\0.7&0.1&-0.2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0.8&0\\0&0.6\\0.5&-0.1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0&0.6\\0.2&0.5\\0&0.3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1.4&0.4\\-0.2&0.3\\0.2&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}0.8&0.4\\-0.7&0.6\\0&0.1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}=[0\quad 0\quad 0.8]$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0\\0\\0.6\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_R=\begin{bmatrix}2&0\\0&0.2\\0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_L=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\\0&0\end{bmatrix}$$

系统 1 的转移概率矩阵如表 1 所示，其中括号内的数值表示在控制器设计过程中未知的转移概率。

表 1　部分未知的转移概率矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$

模态	1	2	3	4
1	−0.8	0.1	0.2	0.5
2	(0.4)	−0.7	(0.1)	0.2
3	0.2	(0.2)	(−0.5)	0.1
4	0.1	0.6	(0.1)	(−0.8)

假定 $\varepsilon_1=1.3$，$\varepsilon_2=1.2$，$\varepsilon_3=1.6$，$\varepsilon_4=1.5$，通过 Matlab 软件中的 LMI 工具箱求解定理 2 中的线性矩阵不等式(15)～式(18)，可得如下可行解

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{bmatrix}-1.7546&1.0925&-0.3563\\-0.9696&0.0684&-0.4460\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_2=\begin{bmatrix}-1.5436&3.2214&0.0226\\1.0821&0.5134&-2.1243\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_3=\begin{bmatrix}0.0605&3.3673&-0.5464\\-4.6321&2.2564&0.2387\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_4=\begin{bmatrix}1.2572&2.3597&-2.4049\\-1.8657&-0.0139&-3.2354\end{bmatrix}$$

在表 1 所示的转移概率矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 下，图 1 示出了连续 Markov 跳变系统 1 的模式变化折线。假设系统 1 的初始条件为 $\boldsymbol{x}(0)=[0.7\quad -0.2\quad -0.9]^{\mathrm{T}}$，$\eta(0)=1$，图 2 示出了系统 1 的状态响应曲线。由图 2 可以看出，在转移概率矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 部分未知的情形下，文中设计的控制器可以使相应的闭环系统达到随机容许。

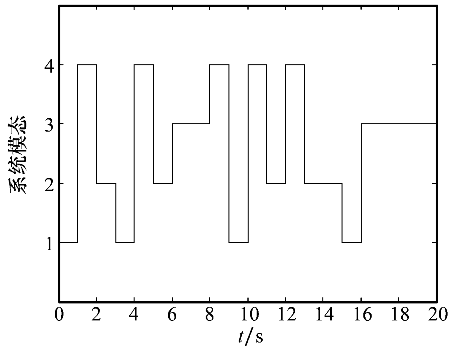

图 1　Markov 跳变奇异系统 1 的模式变化折线

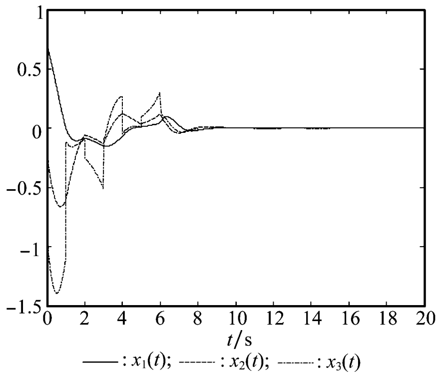

图 2　Markov 跳变奇异系统 1 的状态响应曲线

注 3　由于表 1 所示的转移概率矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 是部分未知的,因此文献[11]中的结论不能解决该 Markov 跳变奇异系统的镇定控制问题。但文中的定理 2 可以在转移概率部分未知的前提下,设计出相应的镇定控制器使闭环系统达到随机容许。因此,文中的结论具有更小的保守性。

4　结　论

本文研究了一类连续 Markov 跳变奇异系统的稳定性与镇定控制问题。与已有文献中的结论相比,文中所得结论适用于转移概率部分未知的 Markov 跳变奇异系统,具有更好的泛化性。并且,文中得到的保证闭环系统随机容许的充分性判据以严格线性矩阵不等式的形式给出,易于验证。最后,通过数值仿真验证了所得结论的正确性和有效性。

参考文献:

[1] Dai L. *Singular control systems: lecture notes in control and information sciences* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[2] Fridman E, Shaked U. A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2002,47(2):253－270.

[3] Xu S, Lam J. Robust stability and stabilization of discrete singular system: an equivalent characterization[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2004,49(4):568－574.

[4] Xu S, Lam J, Zou Y. H_∞ filtering for singular systems[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2003,48(12):2217－2222.

[5] Lam J, Shu Z, Xu S, et al. Robust H_∞ control of descriptor discrete-time Markovian jump systems[J]. *International Journal of Control*, 2007,80(3):374－385.

[6] Krasovskii N N, Lidskii E A. Analytical design of controllers in systems with random attributes—I[J]. *Automation and Remote Control*, 1961,22(1):1021－1025.

[7] Yue D, Han Q. Delay-dependent exponential stability of stochastic systems with time-varying delay, nonlinearity, and Markovian switching[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2005,50(2):217－222.

[8] Souza C. Robust stability and stabilization of uncertain discrete-time Markovian jump linear systems[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2006,51(5):836－841.

[9] Boukas E K, Liu Z K, Liu G X. Delay-dependent robust stability and H_∞ control of jump linear systems with time-delay[J]. *International Journal of Control*, 2001,74(4):329－340.

[10] Boukas E K. *Control of singular systems with random abrupt changes*[M]. Berlin: Springer, 2008.

[11] Xia Y, Boukas E K, Shi P, et al. Stability and stabilization of continuous-time singular hybrid systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(6):1504－1509.

[12] Xia Y, Zhang J, Boukas E K. Control for discrete singular hybrid systems[J]. *Automatica*, 2008,44(10):2635－2641.

[13] Zhang L, Boukas E K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. *Automatica*, 2009,45(2):463－468.

[14] Uezato E, Ikeda M. Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and H_∞ control of descriptor systems[C] // *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, 1999: 4092－4097.