

非带限冲激信号的一种低通采样和重建方法

杨峰, 胡剑浩, 李少谦

(电子科技大学通信抗干扰技术国家重点实验室, 四川 成都 610054)

摘要: 提出了非带限冲激信号的一种低通采样和重建方法, 将冲激信号通过低通滤波器后, 按照信号新息率进行采样, 然后对采样得到的离散时间信号进行傅里叶变换, 采用最小二乘零化滤波算法可以准确地重建原始冲激信号。在冲激信号个数较大及受到噪声影响时, 最小二乘零化滤波算法性能恶化, 通过适当提高采样率, 使用奇异值分解重建算法, 可以获得理想的重建结果。分析和仿真结果证明, 所提出的非带限冲激信号低通采样和重建方法, 能够以较低的速率进行采样和恢复原始冲激信号, 并具有良好的抗噪声性能。

关键词: 非带限冲激信号; 采样和重建; 新息率; 零化滤波; 奇异值分解

中图分类号: TN 911.7

文献标志码: A

Lowpass sampling and reconstruction method for non-bandlimited impulse signals

YANG Feng, HU Jian-hao, Li Shao-qian

(National Key Lab of Communications, Univ. of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: A lowpass sampling and reconstruction method for aperiodic non-bandlimited impulse signals is proposed. The impulse signals are passed through a lowpass filter and sampled at the rate of innovation. The sampled discrete time signals are transformed to frequency domain, from which the spectrum coefficients of original impulses are obtained. Then the amplitudes and time shifts of the impulses are found by a least square annihilating filter (LSAF) method. In the presence of noise, the LSAF method will suffer from performance loss. The only way to improve the reconstruction results is to increase the sampling rate and use the singular value decomposition (SVD) reconstruction method. Simulation results show that the proposed sampling and reconstruction methods achieve very good reconstruction results in the presence of noise at the low sampling rate.

Keywords: non-bandlimited impulse signal; sampling and reconstruction; rate of innovation; annihilating filter; singular value decomposition

0 引言

在雷达, 宽带无线通信, 声纳及地震波检测等应用中, 常常将信号 $x(t)$ 表达为 K 个冲激信号之和

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k \delta(t - t_k) \quad (1)$$

式中, $\delta(t)$ 为冲激波形; a_k, t_k 分别为冲激信号的幅度和时移。现有的冲激信号检测方法包括能量检测和冲激波形相关检测等, 但是这些方法检测误差大, 抗噪声性能较差。将信号数字化采样之后再行信号检测, 具有算法设计简单灵活, 检测误差小和抗噪声性能优良的优点, 但是根据香农采样定理, 对信号进行数字化采样, 需要设计采样速率至少

为 2 倍信号带宽的采样器, 由于冲激信号的带宽是无限的, 所要求的采样器速率也是无限的, 因而对其进行数字化采样是物理上不可实现的。文献[1-3]提出了非带限周期信号的一种采样方法, 定义了信号新息率的概念, 对非带限信号按照信号新息率进行采样和重建, 该算法在没有噪声的情况下可以准确地重建原始非带限信号, 但其在噪声影响下会出现病态方程组, 无法计算得到非带限信号的幅度和时延信息, 算法抗噪声性能较差。文献[4-6]提出了噪声环境下非带限周期信号的一种采样和重建算法, 通过提高系统采样率, 以及采用子空间重建算法, 提高了重建算法的抗噪声性能, 但是其提出的采样和重建算法仅限用于非带限周期信号, 对于非周期信号, 需要设计复杂的高斯滤波器

收稿日期: 2008-10-20; 修回日期: 2008-12-01。

基金项目: 国家自然科学基金(60572090, 60496313)资助课题

作者简介: 杨峰(1978-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为超宽带无线通信及谱估计技术。E-mail: fengyang@uestc.edu.cn

或者满足 Strang-Fix 条件的滤波器,相对于具有简单成熟设计理论和实践的模拟低通滤波器而言,文献[4-6]中所提出的采样和子空间重建算法非常复杂。

本文提出了非周期冲激信号的一种低通采样和重建方法,将冲激信号通过低通滤波器后,按照信号新息率进行采样,采样得到的离散时间信号经过傅里叶变换到频域后,使用最小二乘零化滤波算法可以准确地恢复出冲激信号的幅度和时延。当冲激个数增大及受噪声影响时,最小二乘零化滤波算法性能恶化,通过适当地提高采样率,并采用基于奇异值分解的重建算法,在冲激个数较大的情况下也可以准确地重建原始冲激信号。分析和仿真结果证明,本文提出的非周期冲激信号低通采样和重建算法,所要求的采样率与信号新息率相当,远远低于香农采样定理所要求的采样速率,且重建算法具有良好的抗噪声性能。

1 信号新息率

假设信号表达式为

$$x(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{r=0}^R c_{nr} \varphi_r \left(\frac{\tau - \tau_n}{T} \right) \quad (2)$$

式中, $\{\varphi_r(\tau)\}$ 为已知确定性信号, $r=0, 1, \dots, R$, 那么信号 $x(\tau)$ 的自由参数只包括系数 c_{nr} 和时移 τ_n , 引入函数 $C_x(\tau_a, \tau_b)$ 用于统计 $[\tau_a, \tau_b]$ 中信号自由参数的个数, 则信号新息率定义为

$$\rho_T(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} C_x \left(\tau - \frac{T}{2}, \tau + \frac{T}{2} \right) \quad (3)$$

有限新息率信号是指信号 $x(t)$ 的表达式满足式(2), 并且通过式(3)计算得到的信号新息率为一个有限值。

从冲激信号的表达式(1)可以看出, 冲激信号满足有限新息率信号的定义, 其中冲激波形 $\delta(t)$ 对应于式(2)中的确定性信号 $\varphi_r(\tau)$, 冲激幅度 a_k 对应于系数 c_{nr} , 时移 t_k 对应于 τ_n 。假设在观察时间 T 内, 信号 $x(t)$ 中共有 K 个冲激, 则该冲激信号 $x(t)$ 中包含 $2K$ 个自由参数, 即 $\{a_k\}$ 和 $\{t_k\}$, $k=1, 2, \dots, K$, 信号 $x(t)$ 的新息率为

$$\rho = \frac{2K}{T} \quad (4)$$

本文将探讨如何按照信号新息率进行采样并准确地恢复原始冲激信号的方法。

2 采样系统结构

传统的采样系统结构如图1所示, 假设 $x_a(t)$ 为带限信号, 在 $|\omega| > \omega_M$ 时, $X_a(j\omega) = 0$, 当采样频率 $\omega_s > 2\omega_M$ 时, $x_a(t)$ 唯一地由其样本 $x_a(nT_s)$ 所决定, 其中 T_s 为采样时间间隔, 采样频率 $\omega_s = 2\pi/T_s$, $x_r(t)$ 为恢复出的信号, $H(j\omega)$ 为截止频率 ω_c 满足 $\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$ 的低通滤波器。

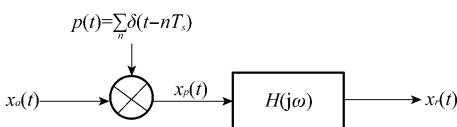


图1 传统采样系统结构

然而, 当 $x_a(t)$ 为非带限信号时, 传统方法所要求的采样频率 ω_s 为无限大, 图1所给出的采样结构与重建算法将不能正确地恢复出原始信号 $x_a(t)$, 即重建后的信号 $x_r(t)$ 与原始信号 $x_a(t)$ 不再一致。为了正确采样和恢复非带限信号, 必须找出一种新型的采样结构和重建算法, 本文所提出的采样与重建系统结构如图2所示。首先冲激信号 $x(t)$ 通过一个低通滤波器 $\varphi(t)$ 后, 按照信号新息率 ρ 进行采样, 得到离散时间信号 $y[n]$ ($n=1, \dots, N$), 计算 $y[n]$ 的离散傅里叶变换 $Y[m]$, 然后采用本文所提出最小二乘零化滤波和奇异值分解重建算法, 可以从 $Y[m]$ 中准确地恢复出冲激信号 $x(t)$ 的幅度和时移, 完成对冲激信号的重建。

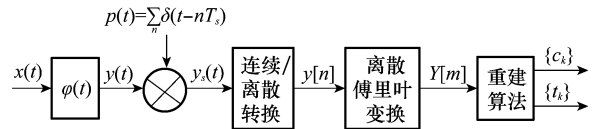


图2 冲激信号采样与重建系统结构

图2中低通滤波器 $\varphi(t)$ 的冲激响应为

$$\varphi(t) = h(-t) \quad (5)$$

式中, $h(t)$ 是带宽 B 大于等于冲激信号新息率 ρ 的低通滤波器 ($B \geq \rho$), 其冲激响应为 $h(t) = B \text{sinc}(Bt)$; $\varphi(t)$ 为 $h(t)$ 的时间反转函数^[1]。冲激信号 $x(t)$ 通过采样低通滤波器 $\varphi(t)$ 后, 按照新息率 ρ 进行采样, 采样时间间隔为 T_s , 得到的离散时间信号为 $y[n]$, $n=1, \dots, N$

$$y[n] = \{x(t), h(t - nT_s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(t - nT_s) dt \quad (6)$$

将式(6)中的 $x(t)$ 写成逆傅里叶变换形式

$$y[n] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \cdot h(t - nT_s) dt \quad (7)$$

交换积分顺序后得到

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi B}^{\pi B} X(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega \quad (8)$$

式中, $H(\omega)$ 为低通滤波器 $h(t)$ 的傅里叶变换; B 为低通滤波器带宽。

离散时间信号 $y[n]$ 的离散傅里叶变换为

$$Y[m] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi B}^{\pi B} X(\omega) e^{j\omega nT_s} d\omega \right) e^{-j2\pi mn/N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi B}^{\pi B} X(\omega) \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega nT_s} e^{-j2\pi mn/N} \right) d\omega \quad (9)$$

将式(9)中 $[-\pi B, \pi B]$ 积分写为分段求和形式

$$Y[m] \simeq \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-[N/2]}^{[N/2]} X(hW_F) \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega h nT_s} e^{-j2\pi mn/N} \right) \cdot \frac{2\pi f_s}{N} = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-[N/2]}^{[N/2]} X(hW_F) \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(h-m)n/N} \right)}_{= \begin{cases} N, & h=m \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}} \cdot \frac{2\pi f_s}{N} = f_s X(mW_F) \quad (10)$$

式中, $m = -\lfloor N/2 \rfloor, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$, 且 $\lfloor N/2 \rfloor \geq K$, W_F 为离散傅里叶变换对应的频率间隔; $W_F = 2\pi f_s/N$; $\lfloor x \rfloor$ 符号计算小于等于 x 的最大整数。通过公式(10)可以看出, 对低通滤波后的冲激信号按照新息率采样, 再进行离散傅里叶变换后, 可以得到冲激信号在频率 mW_F 上的频谱分量 $X(mW_F)$

$$X(mW_F) = T_s Y[m] \quad (11)$$

又根据冲激信号的表达式(1), 得到 $x(t)$ 的傅里叶变换为

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^K a_k e^{-j\omega t_k} \quad (12)$$

考察 $X(\omega)$ 在频率 mW_F 上的频谱分量 $X(mW_F)$

$$X\left(m \frac{2\pi f_s}{N}\right) = \sum_{k=1}^K a_k e^{-jm2\pi f_s t_k/N} = \sum_{k=1}^K a_k u_k^m \quad (13)$$

式中, $u_k = e^{-j2\pi f_s t_k/N}$ 。由式(13)可以看出, 冲激信号的频谱分量 $X(mW_F)$ 可以写成 K 个变量 u_k 的指数和 ($k=1, 2, \dots, K$), 采用谱估计理论中的零化滤波算法^[7], 可以由式(11)中得到的频谱分量 $X(mW_F)$ 求出 u_k , 然后通过 u_k 与 t_k 的关系式计算出冲激信号的时移 t_k 。为了书写方便, 定义

$$X_d[m] = X(mW_F) \quad (14)$$

3 重建算法

3.1 最小二乘零化滤波重建算法

设有 K 阶 FIR 滤波器 $H(z)$

$$H(z) = \sum_{m=0}^K H[m] z^{-m} \quad (15)$$

$H(z)$ 由 K 个一阶滤波器迭代而成, 可以将 $H(z)$ 分解为

$$H(z) = \prod_{k=1}^K (1 - u_k z^{-1}) \quad (16)$$

式中, u_k 为滤波器 $H(z)$ 的零点。假设 $H(z)$ 满足

$$(H * X_d)[m] = \sum_{l=0}^K H[l] X_d[m-l] = 0 \quad (17)$$

$H(z)$ 为信号 $X_d[m]$ 的零化滤波器。不失一般性, 设 $H[0]=1$, 由式(11)和式(14)得到的冲激信号频谱分量 $X_d[m]$, 将式(17)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} X_d[0] & X_d[-1] & \dots & X_d[-K+1] \\ X_d[1] & X_d[0] & \dots & X_d[-K+2] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_d[K-1] & X_d[K-2] & \dots & X_d[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H[1] \\ H[2] \\ \vdots \\ H[K] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} X_d[1] \\ X_d[2] \\ \vdots \\ X_d[K] \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{h} = -\bar{\mathbf{B}} \quad (18)$$

求解线性方程组(18)的最小二乘解即可得到零化滤波器系数 $H[m]$, 将 $H[m]$ 代入式(15), 把 $H(z)$ 分解为式(16)的形式后可以求解滤波器零点 u_k , 最后从 u_k 和 t_k 的关系式可以计算出冲激信号的时移 t_k 。

在得到冲激信号时移 t_k 后, 只要找到冲激信号的幅度 a_k , 就可以完全恢复原始冲激信号。根据冲激信号的离散傅里叶变换式(13), 已知 K 个滤波器零点 u_k ($k=1, 2, \dots,$

K), 可以构造 K 个线性方程组(19), 求解式(19)所示的范得蒙德方程组, 就能够得到冲激信号的幅度 a_k 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_K \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^{K-1} & u_2^{K-1} & \dots & u_K^{K-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_d[0] \\ X_d[1] \\ \vdots \\ X_d[K-1] \end{bmatrix} \quad (19)$$

通过式(18)和式(19)看出, 重建 K 个冲激信号, 需要用到 $(X_d[-K+1], \dots, X_d[K])$ 共 $2K$ 个冲激信号的离散傅里叶变换, 因而只需要在低通滤波后, 按照信号新息率采样 $2K$ 个离散时间信号 $y[1], \dots, y[2K]$, 然后由式(11), 式(18)和式(19)就可以恢复冲激信号的幅度 a_k 和时移 t_k 。因而, 本文所提出的采样方法与最小二乘零化滤波重建算法所要求的采样率仅为信号新息率, 即采样率 $f_s = \rho = 2K/T$ 。

3.2 奇异值分解重建算法

在冲激信号个数 K 较小时, 由最小二乘零化滤波算法可以准确地恢复冲激信号, 但是当 K 逐渐增大及信号受到噪声影响时, 式(18)中 \mathbf{A} 矩阵可能不满秩而使成其为病态方程组, 此时, 最小二乘零化滤波算法不能准确计算出冲激信号 $x(t)$ 的幅度和时移。因此必需提高系统采样率 f_s , 增加采样点数 N , 将方程组(18)中 \mathbf{A} 矩阵扩展为 $M \times K$ 维, 其中 M 为矩阵 \mathbf{A} 的行数, $M > K$ 。然后对 \mathbf{A} 进行奇异值分解, 来求解零化滤波器的系数 $H[m]$ 。

假设提高采样率后, 得到新的离散时间信号为 $y[n]$ ($n=1, \dots, M+K$), 计算 $y[n]$ 的离散傅里叶变换 $Y[m]$ ($m=-K+1, \dots, M$), 其中 $M+K \geq N$, 将方程组(18)改写为

$$\begin{bmatrix} X_d[0] & X_d[-1] & \dots & X_d[-K+1] \\ X_d[1] & X_d[0] & \dots & X_d[-K+2] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_d[M-1] & X_d[M-2] & \dots & X_d[M-K] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H[1] \\ H[2] \\ \vdots \\ H[K] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} X_d[1] \\ X_d[2] \\ \vdots \\ X_d[M] \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{h} = -\bar{\mathbf{B}} \quad (20)$$

将矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 进行奇异值分解

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \quad (21)$$

把式(21)代入式(20)后得到

$$\mathbf{h} = -\mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^* \bar{\mathbf{B}} \quad (22)$$

由式(20)可以看出, 奇异值分解重建算法需要的频谱分量 $X_d[m]$ 个数为 $M+K$, 因而只要采样速率 $f_s \geq (M+K)/T$, 就可以通过式(20)、式(22)准确地计算出冲激信号的幅度 a_k 和时移 t_k 。例如, 当式(20)中矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 行数为 $2K$ 时, 只需要采样 $3K$ 个离散信号 $y[n]$ ($n=1, \dots, 3K$), 就可以准确地恢复原始冲激信号, 相比较最小二乘零化滤波算法, 奇异值分解重建算法具有更好的抗噪声性能和数值稳定性^[8]。

4 仿真结果

为了验证本文所提出非周期冲激信号的采样与重建算法,按照图2所示系统结构进行了仿真。设在采样时间段 $[0,1]$ 内,随机产生 K 个时移服从均匀分布的冲激信号,并且该信号受到加性高斯噪声影响,在信噪比30 dB时,对8个冲激信号进行采样和重建,恢复出的冲激信号如图3所示。图3中标识“·”的曲线绘出了8个原始冲激信号的波形,标识“o”的信号为采用最小二乘零化滤波算法重建出的冲激信号,标识“□”的信号为采用奇异值分解算法恢复出的冲激信号。从图3可以看出,在第1~第3和第8个冲激信号处,由于冲激信号之间时间间隔较大,最小二乘零化滤波和奇异值分解重建算法都可以准确地计算出原始冲激信号的幅度和时移,表现为3个信号基本重合,但是在第4~第6和第7个冲激信号的位置,由于冲激信号间隔较小,最小二乘零化滤波算法出现了明显的恢复误差,而采用奇异值分解重建算法则可以准确地恢复出原始冲激信号。

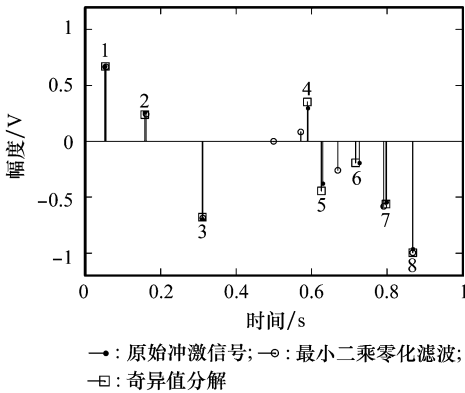
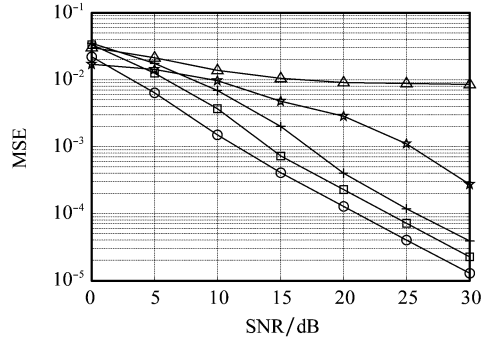


图3 产生8个冲激信号时的重建结果

图3中最小二乘零化滤波重建算法实际使用的采样率等于冲激信号新息率,即 $f_s = \rho = 16$ Hz,采样得到16点的离散时间信号 $y[n](n=1, \dots, 16)$,而奇异值分解重建算法实际使用的采样率为2倍冲激信号新息率, $f_s = 2 \times \rho = 32$ Hz,得到32点的离散时间信号 $y[n](n=1, \dots, 32)$,明显可以看出,两种重建算法所要求的采样率都远远低于奈奎斯特采样率。

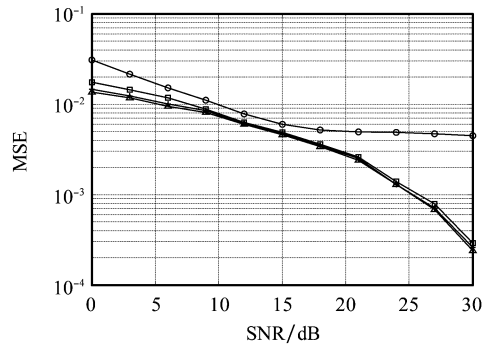
图4绘出了不同冲激个数时最小二乘零化滤波和奇异值分解重建算法的均方误差性能,图中 K 为冲激信号个数,“LSAF”,“SVD”分别代表最小二乘零化滤波和奇异值分解重建算法。可以看出,当冲激信号个数较小时,LSAF算法具有较好的性能,但是随着冲激信号个数的增加,LSAF算法的均方误差明显增加。当冲激信号个数增加到8以后,LSAF算法的重建误差较大,如图4中标识“ Δ ”的曲线所示,随着信噪比增加,其误差性能改善很小。而以2倍信号新息率进行采样的SVD重建算法在冲激个数 K 增加到8时,其重建误差如图4中标识“ \star ”的曲线所示,仍然具有较好的性能,在信噪比30 dB时,其均方误差为 3×10^{-4} 。



○: $K=1$ 时最小二乘零化滤波; □: $K=2$ 时最小二乘零化滤波;
 △: $K=4$ 时最小二乘零化滤波; ▽: $K=8$ 时最小二乘零化滤波;
 ★: $K=8$ 时奇异值分解重建

图4 时移估计均方误差性能

图5绘出了不同采样率下SVD重建算法的均方误差曲线。可以看出,当采样率等于冲激信号新息率,即不进行过采样时,SVD算法的重建误差与LSAF算法相当,如图5中标识“o”的曲线所示。当采样率等于2倍信号新息率,即进行1倍过采样时,SVD算法的重建误差显著降低,在信噪比30 dB时,均方误差为 3×10^{-4} ,重建算法能够准确的恢复原始冲激信号。从图5中还可以看出,继续提高采样率,SVD重建算法的均方误差性能改善就很小了,表现为采用2倍、4倍和8倍新息率进行采样时,SVD重建算法的均方误差曲线基本重合,但是随着采样率提高,奇异值分解算法的复杂度也显著增加,因而在性能改善不大的情况下,使用2倍信号新息率进行采样和重建,能够以较小的复杂度获得满意的重建结果。



○: 1倍新息率采样; □: 2倍新息率采样;
 △: 4倍新息率采样; ▽: 8倍新息率采样

图5 不同采样率时SVD重建算法的性能

5 结论

本文提出了非周期冲激信号的一种低通采样和重建算法,对冲激信号只需要按照其信号新息率进行采样,然后使用最小二乘零化滤波和奇异值分解重建算法,就可以准确地恢复出原始冲激信号。仿真结果证明,在冲激信号个数较小时,最小二乘零化滤波重建算法可以获得良好的重建结果,但当冲激信号个数逐渐增大及受到噪声影响时,最小二乘零化滤波算法性能恶化;而采用奇异值分解重建算法,在冲激信号个数较大时,也可以获得良好的重建结果。