

α 稳定分布噪声下基于梯度范数的 VSS-NLMP 算法

郝燕玲, 单志明, 沈 锋

(哈尔滨工程大学自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 针对 α 稳定分布噪声环境下的自适应滤波问题, 提出一种新的基于梯度范数的变步长归一化最小平均 p 范数(variable step-size normalized least mean p -norm, VSS-NLMP)算法。该算法首先对梯度矢量进行加权平滑, 以减小梯度噪声的影响, 然后利用梯度矢量能够跟踪自适应过程的均方偏差这一特点, 利用梯度矢量的欧氏范数控制步长的变化。给出了新算法的迭代过程, 然后对其收敛性进行分析, 仿真结果表明本算法较现有变步长 NLMP 算法有更好的性能。

关键词: 信号处理; α 稳定分布; 分数低阶统计量; 自适应滤波; 变步长归一化最小平均 p 范数算法

中图分类号: TN 911.7

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2012.04.03

Gradient-norm based VSS-NLMP algorithm in α -stable environments

HAO Yan-ling, SHAN Zhi-ming, SHEN Feng

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: According to the problem of adaptive filtering in α stable environments, a gradient-norm based variable step-size normalized least mean p -norm (VSS-NLMP) algorithm is proposed. The squared norm of the smoothed gradient vector, which can track the variation of the mean square deviation at iteration, is used to update the step-size parameter in the algorithm. The weighted average of the gradient vector reduces the noise effectively and results in a more stable and less noisy adaptation of the step-size parameter. The update and convergence of the proposed algorithm are formulated. The simulation results indicate that the proposed algorithm has a better performance compared with the existing VSS-NLMP algorithms.

Keywords: signal processing; α -stable distribution; fractional lower order statistics (FLOS); adaptive filtering; variable step-size normalized least mean p -norm (NLMP) algorithm

0 引言

高斯分布白噪声是最常用的接收机背景噪声模型, 这是因为理想的高斯模型可以简化信号处理算法和接收机结构设计, 并且这种假设的合理性由中心极限定理得到证明^[1]。然而, 近年来研究发现现实中的许多信号或噪声(如雷达信号、水声信号、生物医学信号以及多种人为噪声等)都有一定的甚至显著的尖峰脉冲特性^[2-4], 这类信号显然不服从高斯分布; 此外这种尖峰脉冲特性还导致其概率密度函数的严重拖尾现象, 在这种情况下以高斯白噪声为模型的信号处理算法往往性能退化或失效。研究表明 α 稳定分布作为目前唯一的一类满足广义中心极限定理的分布为上

述具有尖峰脉冲特性的非高斯信号或噪声提供了非常好的模型^[5]。

α 稳定分布的概率密度函数没有解析表达式, 因此用其特征函数表示更加方便^[6]

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp(jat - |\gamma t|^\alpha [1 - j\beta \text{sign}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})]), & \alpha \neq 1 \\ \exp(jat - |\gamma t| [1 + j\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \log |t|]), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\alpha \in (0, 2]$ 为特征指数, 其值越小该分布的拖尾就越厚, 偏离中心位置的变量出现概率也越大, 因此可用参数 α 控制不同分布的拖尾厚度实现灵活建模; $\beta \in [-1, +1]$ 为

收稿日期: 2011-06-10; 修回日期: 2011-11-13。

基金项目: 国家自然科学基金(61102107, 61001154, 60704018); 中国博士后科学基金(20100480979)资助课题

作者简介: 郝燕玲(1944-), 女, 教授, 主要研究方向为卫星导航与定位技术、惯性导航与组合导航系统、信号检测等。

E-mail: shanzhiming0122@163.com

偏斜参数,当 $\beta=0$ 时称为对称 α 稳定 (symmetric α stable, $S_{\alpha S}$) 分布; $\gamma>0$ 为分散系数,表明随机变量的分散度; $a \in (-\infty, +\infty)$ 是位置参数,在 $\beta=0$ 时表示分布的中值 ($0 < \alpha \leq 1$) 或均值 ($1 < \alpha \leq 2$); $\text{sign}(\cdot)$ 是符号函数。特别地,高斯分布 ($\alpha=2, \beta=0$)、柯西分布 ($\alpha=1, \beta=0$) 和 Levy 分布 ($\alpha=1/2, \beta=\pm 1$) 为 α 稳定分布的 3 种特殊形式,存在统一封闭的表达式。为了与 $\alpha=2$ 的高斯分布有所区别,文中定义分数低阶 α 稳定分布满足 $0 < \alpha < 2$, 并且用 $\mathbf{x} \sim S_{\alpha}(\gamma, \beta, a)$ 表示变量 \mathbf{x} 服从 α 稳定分布。

α 稳定分布与高斯分布的重要区别在于前者不具有 α 阶及以上各阶统计量,因此基于最小均方误差 (minimum mean square error, MMSE) 准则的传统自适应滤波器在 α 稳定分布噪声下无法正常工作。为解决此问题,文献[1]提出用最小分散系数 (minimum dispersion, MD) 准则代替 MMSE 准则,并根据分数低阶矩 (fractional lower order moments, FLOM) 理论提出了最小平均 p 范数及其符号化算法。文献[7]提出了归一化最小平均 p 范数 (normalized least mean p -norm, NLMP) 算法,进一步改善了算法稳定性和收敛速度,文献[6,8]则利用更多输入和误差信息,分别提出了递归最小平均 p 范数 (recursive least mean p -norm, RLMP) 算法和数据块 NLMP 滤波算法。虽然这些处理都不同程度地改善了算法的收敛速度和稳定性,但它们都有一个共同的特点,即自适应滤波使用固定步长。

由迭代步长与失调量的关系知:在满足收敛条件的情况下,步长因子越大,算法收敛速度越快,但是稳态失调量也会增加;减小步长可以减小稳态失调,提高算法的收敛精度,但同时也降低了算法的收敛速度^[9-10]。因此,标准 NLMP 算法必须在收敛速度和稳态失调之间进行折中,这导致自适应滤波器的性能不能充分发挥^[11]。为此,本文依据变步长 (variable step-size, VSS) 最小均方 (least mean square, LMS) 类算法的基本思想,利用梯度范数与均方偏差 (mean square deviation, MSD) 之间的联系,提出利用梯度范数实现步长控制的 VSS-NLMP 算法,并对其收敛性进行了分析,最后通过仿真对新算法的性能进行了验证。

1 LMP 方法

设 $\hat{\mathbf{w}}(n) = [\hat{w}_0(n), \hat{w}_1(n), \dots, \hat{w}_{M-1}(n)]^T$ 为 M 阶有限脉冲响应 (finite impulse response, FIR) 自适应滤波器在 n 时刻的权系数矢量, $\mathbf{x}(n) = [x_0(n), x_1(n), \dots, x_{M-1}(n)]^T$ 为 n 时刻系统的输入信号矢量,系统输出 $y(n) = \mathbf{x}(n)^T \hat{\mathbf{w}}(n)$, 期望响应 $\mathbf{d}(n) = \mathbf{x}(n)^T \mathbf{w}_{\text{opt}}(n) + v(n)$, 其中 $v(n)$ 为噪声且服从 α 稳定分布,系统误差矢量 $\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{x}(n)^T \hat{\mathbf{w}}(n)$, 权值估计误差 $\tilde{\mathbf{w}}(n) = \mathbf{w}_{\text{opt}}(n) - \hat{\mathbf{w}}(n)$ 。

根据 FLOS 统计量原理^[1], 自适应系统的代价函数为

$$J = E\{|\mathbf{e}(n)|^p\} \quad (2)$$

在两侧对权系数求偏导,以误差函数的瞬时值代替其统计

值可得

$$\nabla J(\hat{\mathbf{w}}) = \frac{\partial J(\hat{\mathbf{w}})}{\partial \hat{\mathbf{w}}(n)} = p \mathbf{e}(n)^{<p-1>} [-\mathbf{x}(n)] \quad (3)$$

于是得到标准 LMP 算法权系数自适应公式

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu \mathbf{x}(n) \mathbf{e}(n)^{<p-1>} \quad (4)$$

式中, $1 \leq p < \alpha$, $\mathbf{e}(n)^{<p-1>} = |\mathbf{e}(n)|^{p-1} \text{sign}(\mathbf{e}(n))$ 。若用输入信号矢量 $\mathbf{x}(n)$ 的 p 范数对梯度进行归一化处理,便得到标准 NLMP 算法权系数调整公式^[7]

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu \frac{\mathbf{x}(n) \mathbf{e}(n)^{<p-1>}}{\|\mathbf{x}(n)\|_p^p + \epsilon} \quad (5)$$

2 梯度范数 VSS-NLMP 算法

变步长自适应滤波有效地解决了固定步长 NLMP 算法收敛速度和稳态误差之间的矛盾:它要求在初始收敛阶段或系统参数发生变化时,选择较大的步长以便有较快的收敛速度和对时变系统的跟踪速度;当系统收敛后,采用较小的步长以减小稳态失调误差。因此关键问题是如何设计步长控制方程以使 NLMP 算法的效率达到最优,主要思路分为两类:① 利用误差信号迭代步长^[12-13];② 利用梯度矢量迭代步长^[14-16]。

自适应过程与最优解之间偏差的大小是设计 VSS-LMS 类算法的主要依据,而 MSD 又是衡量自适应过程迭代情况的一个理想指标^[10]。文献[16]指出,在相同的稳态误差下,理论最优的变步长是基于在每一步迭代中使得 MSD 的下降达到最大,也即向着最优权系数靠近,从而获得最快的收敛速度。由于梯度矢量可以很好地跟踪 MSD 的变化,因此可以用平滑梯度矢量的欧氏范数来控制步长迭代。鉴于此,针对 α 稳定分布下的自适应滤波问题,提出基于梯度范数的 VSS-NLMP 算法,算法描述如下

$$\bar{\mathbf{g}}(n) = \lambda \bar{\mathbf{g}}(n-1) + (1-\lambda) [\mathbf{e}(n)^{<p-1>} \mathbf{x}(n)] \quad (6)$$

$$\mu(n) = P_s \|\bar{\mathbf{g}}(n)\|^2 \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu(n) \frac{\mathbf{x}(n) \mathbf{e}(n)^{<p-1>}}{\|\mathbf{x}(n)\|_p^p + \epsilon} \quad (8)$$

式中, $0 < \lambda < 1$ 为梯度平滑因子; P_s 为常数。可见该算法为减小噪声影响,首先利用一阶低通滤波器对梯度矢量进行加权平滑,然后用此梯度矢量的欧氏范数迭代步长,再用此时变步长进行权值迭代更新。特别地,当 $p=2$ 时该算法就退化为文献[10]基于梯度范数的 VSS-NLMS 算法 (Grad 算法),本文算法可以看作是 Grad 算法在非高斯 α 稳定分布下的推广,因此具有更广泛的适用性。

3 算法收敛性分析

为便于分析,假设输入 $\mathbf{x}(n)$ 为独立同分布的随机高斯信号,噪声 $v(n)$ 服从 α 稳定分布且与 $x(m)$ 相互独立。令 $\mathbf{g}(n) = \mathbf{e}(n)^{<p-1>} \mathbf{x}(n)$ 表示瞬时梯度,并假定 $\bar{\mathbf{g}}(0) = \mathbf{0}$ 。对式(6)进行简单变换,可表示成如下递归形式

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}(n) &= (1-\lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} [\mathbf{e}(i)^{<p-1>} \mathbf{x}(i)] = \\ &= (1-\lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \mathbf{g}(i) \end{aligned} \quad (9)$$

对式(9)两侧取欧氏范数平方再求取期望

$$\begin{aligned} E\{\|\bar{\mathbf{g}}(n)\|^2\} &= (1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda^{n-i} \lambda^{n-j} \cdot \\ &= E\{\mathbf{e}(i)^{<p-1>} \mathbf{e}(j)^{<p-1>} \mathbf{x}(i)^T \mathbf{x}(j)\} \end{aligned} \quad (10)$$

令

$$C(i, j) = \lambda^{n-i} \lambda^{n-j} E\{\mathbf{e}(i)^{<p-1>} \mathbf{e}(j)^{<p-1>} \mathbf{x}(i)^T \mathbf{x}(j)\} \quad (11)$$

由于 i 和 j 均为有限值, 则当 n 趋于无穷时由于 $0 < \lambda < 1$, 所以式(11)中 λ^{n-i} 将趋于零, 于是 $C(i, j)$ 也为零, 这样 $C(i, j)$ 项便可以忽略。所以接下来的分析只针对稳态情况, 讨论 $i=j$ 和 $i \neq j$ 两种情况:

当 $i=j$ 时,

$$\begin{aligned} C(i, j) &= \lambda^{2(n-i)} E\{\mathbf{e}(i)^{<p-1>} \mathbf{x}(i)^T \mathbf{e}(i)^{<p-1>} \mathbf{x}(i)\} = \\ &= \lambda^{2(n-i)} E\{\|\mathbf{g}(i)\|^2\} \end{aligned} \quad (12)$$

当 $i \neq j$ 时, 根据前面的假设, 由于输入信号 $\mathbf{x}(n)$ 是零均值独立同分布的, 则有

$$C(i, j) = 0 \quad (13)$$

将式(12)和式(13)带入式(10)可得

$$E\{\|\bar{\mathbf{g}}(n)\|^2\} = (1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^n \lambda^{2(n-i)} E\{\|\mathbf{g}(i)\|^2\} \quad (14)$$

这说明当前时刻平滑梯度矢量的欧氏范数平方的期望等于以前各时刻瞬时梯度矢量的欧氏范数平方的加权求和。

将式(14)带入式(7), 再对方程两侧取均值得

$$\begin{aligned} E\{\mu(n)\} &= P_s E\{\|\bar{\mathbf{g}}(n)\|^2\} = \\ &= P_s (1-\lambda)^2 \sum_{i=1}^n \lambda^{2(n-i)} E\{\|\mathbf{g}(i)\|^2\} \end{aligned} \quad (15)$$

根据式(8)可得

$$\begin{aligned} E\{\|\delta \hat{\mathbf{w}}(n+1)\|^2\} &= E\{\|\hat{\mathbf{w}}(n+1) - \hat{\mathbf{w}}(n)\|^2\} = \\ &= E\{\|\mu(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{e}(n)^{<p-1>}\|^2\} = \\ &= E\{P_s \|\bar{\mathbf{g}}(n)\|^2 \mathbf{x}(n) \mathbf{e}(n)^{<p-1>}\|^2\} \end{aligned} \quad (16)$$

根据矩阵不等式 $\|\mathbf{Ax}\|^2 \leq \|\mathbf{A}\|^2 \cdot \|\mathbf{x}\|^2$, 得到

$$\begin{aligned} E\{P_s \|\bar{\mathbf{g}}(n)\|^2 \mathbf{x}(n) \mathbf{e}(n)^{<p-1>}\|^2\} &\leq \\ E\{P_s \|\bar{\mathbf{g}}(n)\|^2 \|\mathbf{x}(n)\|^2 \|\mathbf{e}(n)^{<p-1>}\|^2\} &\leq \\ P_s^2 b^2 E\{\|\mathbf{x}(n)\|^2 \|\mathbf{e}(n)^{<p-1>}\|^2\} &= \\ P_s^2 b^2 E\{\|\mathbf{x}(n)\|^2 \|\mathbf{e}(n)\|^{2(p-1)}\} & \end{aligned} \quad (17)$$

式中, $b = \max\{(1-\lambda)^2 \sum_{i=N}^n \lambda^{2(n-i)} E\{\|\mathbf{g}(i)\|^2\}\}$, $i \geq N$ 时系统达到稳态。由于 $1 \leq p < \alpha < 2$, 则有 $0 \leq 2(p-1) < 2(\alpha-1) < \alpha$, 所以有 $E\{\|\mathbf{e}(n)\|^{2(p-1)}\} < \infty$, 当输入信号 $\mathbf{x}(n)$ 为有限功率时

$$E\{\|\mathbf{x}(n)\|^2 \|\mathbf{e}(n)\|^{2(p-1)}\} < \infty \quad (18)$$

于是 $E\{\|\delta \hat{\mathbf{w}}(n+1)\|^2\} < \infty$ 。根据文献[3]中的分析和结论可知, 本文提出的基于梯度范数的 VSS-NLMP 算法在 α

稳定分布下也一定能够收敛。

4 仿真结果及分析

以 FIR 系统辨识模型为例, 在高噪声和低噪声两种环境下对本文提出的新算法进行数值仿真和结果分析。最优滤波器权系数 $\mathbf{w}_{opt} = [1.0 \ 0.8 \ 0.6 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 1.0]^T$ (即未知系统), 期望信号 $\mathbf{d}(n)$ 是输入信号 $\mathbf{x}(n)$ 通过滤波器后的输出, 输入信号 $\mathbf{x}(n)$ 是零均值, 单位方差的随机高斯信号; 不失一般性, 令噪声 $\mathbf{v}(n)$ 为零均值分散系数 $\gamma=1$ 的 $S_{\alpha}S$ 分布, 即 $\mathbf{v}(n) \sim S_{\alpha}(1, 0, 0)$ 分布, 并通过乘以比例系数分别设置 30 dB 和 0 dB 两种噪声环境, α 稳定噪声的特征指数分别取 $\alpha=1.2$ 和 $\alpha=1.8$ 。最后将本文算法与现有基于梯度的变步长自适应滤波算法 (Mathews 算法^[14]、WeePeng 算法^[15]、Shin 算法^[16]) 以及固定步长 (fixed step-size, FSS) NLMP 算法进行比较, 仿真结果均为通过 50 次蒙特卡罗仿真得到。

实验 1 输入信号 $\mathbf{x}(n)$ 是零均值, 单位方差的随机高斯信号, 噪声序列 $\mathbf{v}(n)$ 分别为特征指数 $\alpha=1.2$ 和 $\alpha=1.8$ 的标准 $S_{\alpha}S$ 分布, 设定混合信噪比 $MSNR=30$ dB (低噪声), 为研究各算法对时变系统的跟踪能力, 假定迭代过程中未知系统权系数发生一次突变 $\mathbf{w}(n) = -\mathbf{w}(n)$ 。WeePeng 算法、Mathews 算法和 FSS-NLMP 算法的初始步长取 0.02, 本文算法和 Shin 算法的初始步长为 0, 梯度矢量平滑因子 $\lambda=0.99$, $\alpha=1.2$ 时, $P_s=0.08$, $\alpha=1.8$ 时, $P_s=0.25$ 。图 1 给出了自适应滤波器权系数误差 $10 \lg\left(\frac{E\{\|\mathbf{w}_{opt} - \hat{\mathbf{w}}(n)\|^2\}}{\|\mathbf{w}_{opt}\|^2}\right)$ 和步长迭代的变化曲线。

由图 1(a)、(b) 可见, 在 α 稳定分布低噪声环境下, 无论对于强脉冲噪声 ($\alpha=1.2$) 还是弱脉冲噪声 ($\alpha=1.8$), 本文新算法都具有最快的收敛速度和最小的稳态误差, 当系统权系数发生突变时, 仍然能够快速反应并及时跟踪系统状态的变化, 基于最优化思想的 Shin 算法效果次之, 与其他算法相比, 这两种算法具有明显的优势, WeePeng 算法略优于 Mathews 算法, 这是因为 WeePeng 算法在 Mathews 算法的基础上对梯度矢量进行了平滑处理, 而固定步长 FSS-NLMP 算法必须在收敛速度和稳态误差之间折中。上述权值误差的变化亦可从图 1(c)、(d) 步长迭代过程得到证明, 在初始收敛阶段或系统参数发生变化时, 权系数估值与真实值存在较大偏差, 因此步长因子随梯度范数快速增大, 从而使新算法能够快速收敛, 当系统收敛后步长因子逐渐减小, 以达到减小稳态误差的目的。

实验 2 设定混合信噪比 $MSNR=0$ dB (高噪声), 梯度矢量平滑因子 $\lambda=0.995$, $\alpha=1.2$ 时, $P_s=0.10$, $\alpha=1.8$ 时, $P_s=0.25$, 其他条件与实验 1 相同, 仿真结果如图 2 所示。

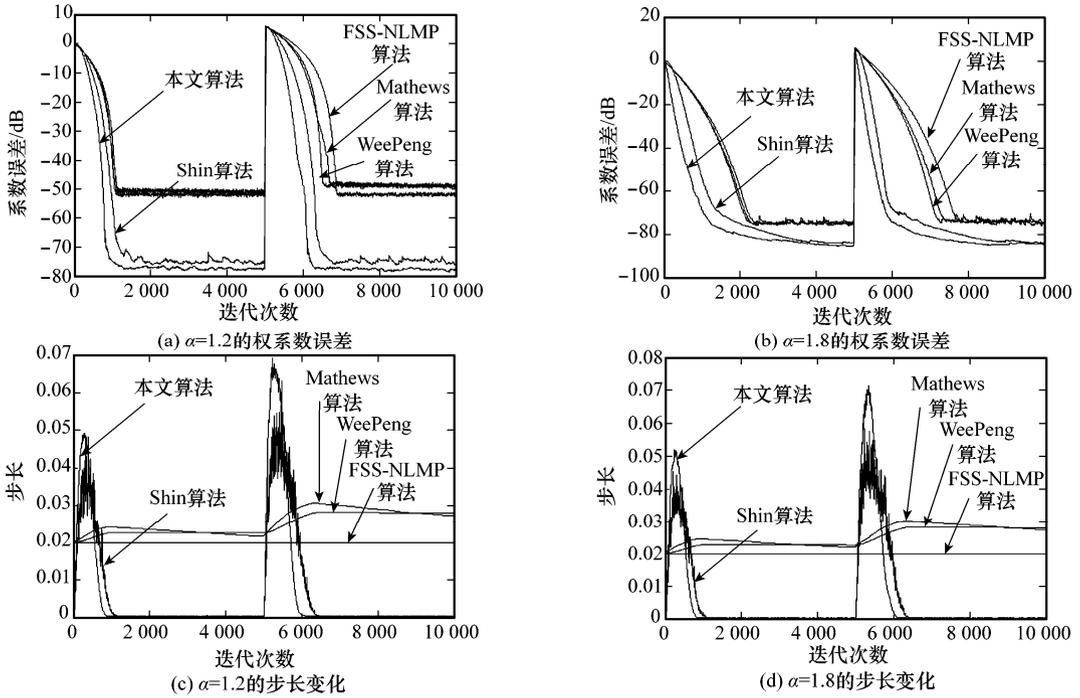


图 1 低噪声下算法收敛性能及步长变化比较

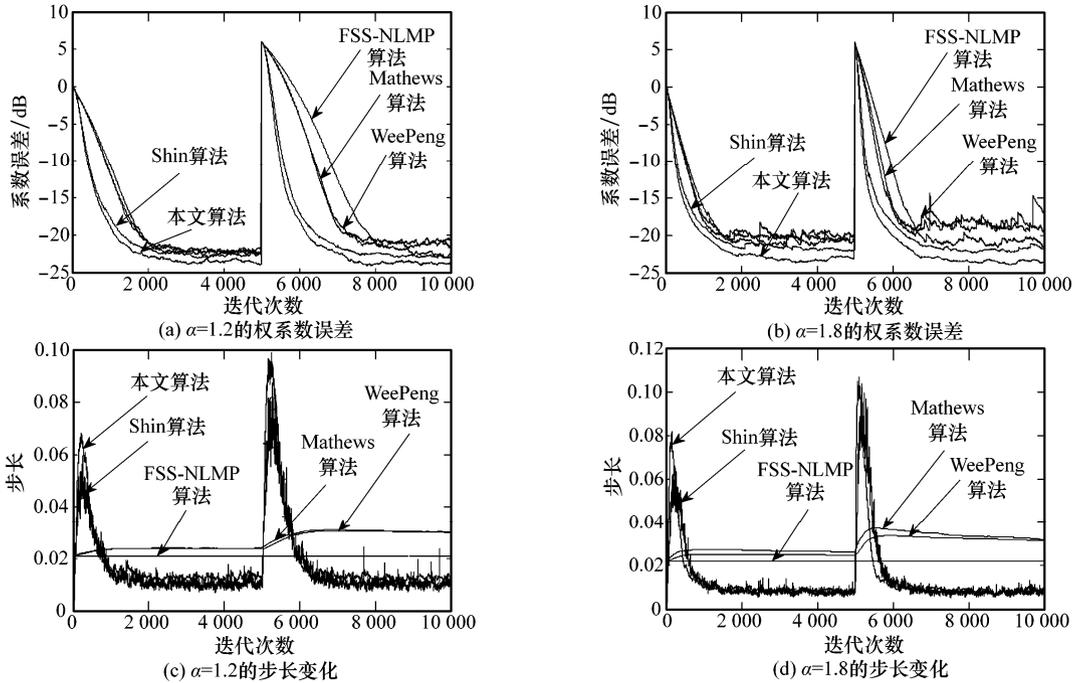


图 2 高噪声下算法收敛性能及步长变化比较

由图 2 可见,在 α 稳定分布高噪声环境下,无论对于强脉冲噪声($\alpha=1.2$)还是弱脉冲噪声($\alpha=1.8$),本文新算法都有最快的收敛速度和最小的稳态误差,能够快速反应并及时跟踪系统状态的变化,与实验 1 结果相似,因此本文新

算法对高噪声和低噪声环境都适用。

5 结 论

α 稳定分布为真实世界中具有尖峰脉冲特性和重尾的

非高斯现象提供了一种灵活的处理工具。本文针对 α 稳定分布环境下的自适应滤波问题,根据梯度矢量能够跟踪 MSD 变化的特点,提出一种新的基于梯度范数的变步长 NLMP 算法,给出了新算法的步长迭代公式并分析了其收敛性能。实验结果验证了该算法的稳定性和高效性,相对于现有变步长算法具有明显的优势。

参考文献:

- [1] Shao M, Nikias C L. Signal processing with fractional lower order moments; stable processes and their applications[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1993, 81(7): 986 - 1010.
- [2] Gencaga D, Ertuzun A, Kuruoglu E E. Modeling of non-stationary autoregressive alpha-stable processes by particle filters[J]. *Digital Signal Processing*, 2008, 18(3): 465 - 478.
- [3] 朱晓波,王首勇,李旭涛,等. 非高斯杂波中的 MIMO 雷达信号分离[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(6): 1210 - 1214. (Zhu X B, Wang S Y, Li X T, et al. MIMO radar signal separation in non-Gaussian clutter[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(6): 1210 - 1214.)
- [4] 唐洪,邱天爽. Alpha 稳定分布噪声下广义恒模算法收敛性能的研究[J]. 电子学报, 2009, 37(1): 118 - 121. (Tang H, Qiu T S. Convergence properties of the GCMA in alpha-stable noise environment [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(1): 118 - 121.)
- [5] 郝燕玲,单志明,沈锋. 基于 DRAM 算法的 α 稳定分布参数估计[J]. 华中科技大学学报, 2011, 39(10): 73 - 78. (Hao Y L, Shan Z M, Shen F. Parameter estimation of α -stable distributions using DRAM algorithm[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 2011, 39(10): 73 - 78.)
- [6] Zhao Z J, Dong K H, Xu C Y. Data block adaptive filtering algorithms for α -stable random processes[J]. *Digital Signal Processing*, 2007, 17(4): 836 - 847.
- [7] Arikan O, Belge M, Cetin A E, et al. Adaptive filtering approaches for non-Gaussian stable processes [C]// *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1995: 1400 - 1403.
- [8] Belge M, Miller E L. A sliding window RLS-like adaptive algorithm for filtering alpha-stable noise[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2000, 7(4): 86 - 89.
- [9] Hwang J K, Li Y P. Variable step-size LMS algorithm with a gradient-based weighted average[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, 16(12): 1043 - 1046.
- [10] Zhang Y G, Li N, Chambers J A, et al. New gradient-based variable step-size LMS algorithms[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2008, 529480: 1 - 9.
- [11] Mayyas K, Momani F. An LMS adaptive algorithm with a new step-size control equation[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2011, 348(4): 589 - 605.
- [12] Kwong R H, Johnston E W. A variable step size LMS algorithm[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, 40(7): 1633 - 1642.
- [13] Aboulnasr T, Mayyas K. A robust variable step-size LMS-type algorithm: analysis and simulations[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1997, 45(3): 631 - 639.
- [14] Mathews V J, Xie Z H. A stochastic gradient adaptive filter with gradient adaptive step-size[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(6): 2075 - 2087.
- [15] Ang W P, Farhang-Boroujeny B. A new class of gradient adaptive step-size LMS algorithms[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2001, 49(4): 805 - 810.
- [16] Shin H C, Sayed A H, Song W J. Variable step-size NLMS and affine projection algorithms[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(2): 132 - 135.