

基于 Bayes 序贯检验的长周期系统动态试验方法

韩旭¹, 王建宇¹, 祖先锋²

(1. 南京理工大学自动化学院, 江苏南京 210094; 2. 空军第一航空学院, 河南信阳 464000)

摘要: 提出了一套基于正态分布贝叶斯序贯检验的试验设计方法, 为长周期、多指标系统的小子样动态试验次数的确定提供了理论依据。该方法以待检系统的单次抽样检验合格概率为统计观测值, 从假设多次抽样后的该观测值序列服从正态分布开始分析, 应用正态分布贝叶斯序贯检验后加权检验理论对多指标系统的序贯抽样检验过程进行设计, 给出了验前信息处理、贝叶斯序贯试验及序贯截尾方案设计、序贯截尾风险增量上界计算、以及系统各指标综合合格概率估算的具体实现方法。系统仿真实验的结果表明, 该方法是可行的。

关键词: 质量控制与可靠性管理; 动态试验方法; 序贯检验; 长周期系统

中图分类号: U 666.1

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2012.09.36

Dynamic test methodology for long-working systems based on Bayesian sequential test theory

HAN Xu¹, WANG Jian-yu¹, ZU Xian-feng²

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;

2. First Aeronautical College of AirForce, Xinyang 464000, China)

Abstract: A test design methodology based on normal distribution Bayesian sequential test theory is proposed. It provides the theoretical basis for the determination of test number of a small-sample-size dynamic test for long-working systems with different types of technical specifications. It takes the conformity probabilities of single sample test for the target system as statistical observed values, and assumes that the observed values series from different dynamic tests of target systems are conformed to normal distribution. Then the multi-specification sequential test process of target systems can be designed by using Bayesian sequential posterior odd test theory on normal distribution. And the detailed realization procedures on handling priori information, designing the Bayesian sequential testing and sequential censor solution, calculating the upper bound of increased sequential censor risks, and valuating the overall conformity probability of each technical specification are given. Finally, a simulation example by applying the approach is given, and the corresponding test results show that the approach is feasible.

Keywords: quality control and reliability management; dynamic test methodology; sequential test; long-working systems

0 引言

在航空、航天及国防领域, 有些系统的工作周期很长、生产台套很少, 而且其在静态试验环境下的工作特性与动态工作环境下的实际工作特性可能也有比较大的差别。因此, 对于这类系统实际工作性能的检收必须在接近其真实使用条件的动态环境下进行。这里, 所谓“动态”及“静态”实际上是个相对的概念。静态试验主要用于快速、初步检验系统完成既定指标要求的情况, 它将某些试验难度大、试

验成本高的“动态”检验条件用相对理想的“静态”检验条件代替, 从而达到快速检验系统基本功能的目的; 动态试验则主要用于在真实或接近系统真实使用条件下全面深入地检验系统完成既定指标要求的情况。根据试验鉴定活动的“循序渐进原则”, 在实际工程中, 系统试验鉴定活动往往是以静态试验与动态试验相结合的方式进行的, 以静态试验鉴定结果为基础, 以动态试验鉴定结果为根本评价依据。因此, 对于有些试验鉴定活动而言, 尽管其试验鉴定过程中部分试验条件也是动态的, 但如果它的试验结果不是在最

收稿日期: 2011-10-26; 修回日期: 2012-03-06。

基金项目: 教育部博士点新教师基金(200802881012)资助课题

作者简介: 韩旭(1975-), 男, 工程师, 博士研究生, 主要研究方向为信息系统工程、惯性导航系统。E-mail: china_hanxu@163.com

大程度接近真实使用条件下取得的,那它仍属于本文静态试验的范畴;相反,尽管某个试验鉴定活动的部分试验条件仍是理想的、静态的,但如果它的试验结果已是在最大程度接近真实使用条件下取得的,那它仍属于本文动态试验的范畴。例如,对于舰艇惯性导航系统而言,海上试验可被认为是一种最接近真实使用条件的试验鉴定活动,那这里海上试验就可以认为是它的一种动态试验项目;而海上试验前的室内摇摆台试验、码头系泊试验或陆地车载试验等活动则可认为是一种相对意义下的静态试验项目。

可见,动态试验对于长周期系统的试验鉴定而言是至关重要的。但这里存在两个问题:一是为了使动态试验的抽样评价能够取得具有统计意义的试验结论,动态试验的抽检次数必须尽可能充分;二是有些动态试验的成本非常高,试验评定的任务又非常急,如果仍旧沿用经典统计方法进行试验,整个试验的周期会相当长,成本会非常高,这对于使用方和生产方都是难以接受的。因此,为了更好地节省时间和节约试验成本,必须尽可能缩减不必要的动态试验过程,而在这个问题上,Bayes 统计推断、序贯分析等小子样试验理论为问题的解决提供了很好的解决思路。例如,文献[1]综合运用最大熵及 Bayes 统计推断方法,较好地解决了导弹飞行可靠性的小子样评定问题;文献[2]则通过分析弹载电子产品的寿命分布及库存可靠性模型,运用 Bayes 方法实现了稀缺弹载电子产品的小子样备货问题;文献[3]则运用全数字仿真、半实物仿真、实弹射击试验相结合的方式,逐级运用 Bayes 方法实现了导弹命中概率的小子样评定;文献[4]则通过运用序贯似然比检验的方式,实现了多目标雷达追踪的小子样重点锁定,提高了雷达追踪目标的准确度;文献[5]则运用指数分布 Bayes 序贯检验方法成功实现了卫星动量轮的仿真和试验,解决了长周期航空产品的小子样动态试验问题;文献[6]通过综合运用粒子滤波技术、序贯概率比检验、以及固定样本量似然比检验,实现了小目标的检测前跟踪,降低了小目标的检测时延,提高了小目标检测的状态预测精度;文献[7]则运用 Bayes 统计推断方法成功实现了入关核产品走私的快速、精准检测。此外,有些国际、国内标准中也将 Bayes 统计推断及序贯分析方法作为其产品小子样检验的基本依据^[8-9]。可见,Bayes 序贯检验方法已具备一定的实践基础。但截至今日,Bayes 序贯检验方法在长周期系统多指标小子样动态试验鉴定方面的应用还未见报道。因此,借鉴已有的 Bayes 序贯检验方法实践经验,本文将探讨应用正态分布 Bayes 序贯检验方法实现长周期系统多指标小子样动态试验鉴定的可行性,并尝试给出序贯截尾风险增量上界的计算公式,以及应用蒙特卡罗(Monte Carlo)法进一步给出系统各指标综合合格概率的数值求解方法。

1 小子样动态试验设计

1.1 总体思路

这里,为了方便叙述,假设:

(1) 待检系统的技术指标共有 m 个,所进行的动态试验次数总计为 n 个。

(2) 在任意 i 次动态试验中,待检系统各技术指标 j 的实测数据满足既定设计要求的合格概率 $\hat{x}_{i,j}$ 都是可以统计测算的。这里,由于合格概率 $\hat{x}_{i,j}$ 是本文研究的主要对象,因此,如无特别说明,本文所述的统计观测值均特指 $\hat{x}_{i,j}$ 。

(3) 当 $j=1,2,\dots,m$ 时,对指标 j 而言,任意两次试验中测得的统计观测值 $\hat{x}_{i,j}$ 是互不相关的,且所有动态试验下的 x_j 是服从正态分布 $N(\mu_j, \sigma_j^2)$ 的,并约定参数 μ_j 的最低系统要求为 μ_{j0} 。

(4) 对指标 j 而言,生产方风险 α_j 和使用方风险 β_j 都是事先约定好的。

(5) 最小动态试验次数 N_{\min} 、最大动态试验次数 N_{\max} 、以及序贯截尾试验起始试验次数 N_c ($N_{\min} \leq N_c < N_{\max}$) 是已知的。

由此,按照正态分布 Bayes 序贯分析假设检验方法建立假设检验如式(1)所示。

$$\begin{cases} H_0: (\mu_j \geq \mu_{j0}), \text{ 指标 } j \text{ 的统计观测值均值参数合格} \\ H_1: (\mu_j < \mu_{j0}), \text{ 指标 } j \text{ 的统计观测值均值参数不合格} \end{cases} \quad (1)$$

参照式(1)的假设检验条件,可以对动态试验中的各个指标的统计观测值 x_j 进行统计分析,然后结合前期静态试验统计得出的验前信息,利用正态分布 Bayes 假设检验统计方法,求得相应的验后加权概率比,再应用序贯验后加权检验的方法,在给定犯两类错误概率(生产方风险 α_j 和使用方风险 β_j)的条件下,对每次的序贯试验概率比做分析比对,如果符合序贯检验退出条件,就终止试验,否则继续下一次动态试验。序贯试验的截尾条件由既定的最小动态试验次数 N_{\min} 、序贯截尾试验起始试验次数 N_c 、最大动态试验次数 N_{\max} 、验前信息和序贯试验的验后统计信息共同决定。序贯试验结束后,可给出各项指标综合合格概率的统计结果,并可估算出序贯截尾试验犯两类错误的风险增量上界。

1.2 多指标序贯分析假设检验

根据序贯检验实施方法,对于单个技术指标 j 的序贯试验而言,需要选择决策阈值 A_j 和 B_j ,分别满足 $0 < A_j < 1 < B_j$,然后在每次试验 i 后,根据 $x_{i,j}$ 考查其似然比 O_{ji} 。若 $O_{ji} \leq A_j$,则表示指标 j 符合式(1)的 H_0 假设检验;若 $O_{ji} \geq B_j$,则指标 j 符合式(1)的 H_1 假设检验;否则,应继续对指标 j 进行序贯试验。根据文献[10],在不考虑验前信息的条件下,若令 α_j 和 β_j 分别表示指标 j 所对应的生产方风险和使用方风险,则可以取

$$\begin{cases} A_j = \frac{\beta_j}{1 - \alpha_j} \\ B_j = \frac{1 - \beta_j}{\alpha_j} \end{cases} \quad (2)$$

若考虑验前信息,则参考文献[11],可以取

$$\begin{cases} A_j = \frac{\beta_{j\pi_1}}{P_{j\pi H_0} - \alpha_{j\pi_0}} \\ B_j = \frac{P_{j\pi H_1} - \beta_{j\pi_1}}{\alpha_{j\pi_0}} \end{cases} \quad (3)$$

式中, $\beta_{j\pi_1}$ 为考虑了验前信息的使用方采伪风险; $\alpha_{j\pi_0}$ 为考虑了验前信息的生产方去真风险。根据文献[11],简单假设情况下可以取

$$\begin{cases} \alpha_{j\pi_0} = \int_{\theta_0} \alpha_j(\theta) dF^\pi(\theta) = \alpha_j P_{j\pi H_0} \\ \beta_{j\pi_1} = \int_{\theta_1} \beta_j(\theta) dF^\pi(\theta) = \beta_j P_{j\pi H_1} \end{cases} \quad (4)$$

式中, $P_{j\pi H_0}$ 为指标 j 接受 H_0 假设的验前概率; $P_{j\pi H_1}$ 为指标 j 接受 H_1 假设的验前概率。将式(4)代入式(3)后可得

$$\begin{cases} A_j = \frac{\beta_{j\pi_1}}{P_{j\pi H_0} - \alpha_{j\pi_0}} = \frac{P_{j\pi H_1}}{P_{j\pi H_0}} \cdot \frac{\beta_j}{1 - \alpha_j} \\ B_j = \frac{P_{j\pi H_1} - \beta_{j\pi_1}}{\alpha_{j\pi_0}} = \frac{P_{j\pi H_1}}{P_{j\pi H_0}} \cdot \frac{1 - \beta_j}{\alpha_j} \end{cases} \quad (5)$$

根据文献[12],正态分布总体联合参数 (μ, σ^2) 未知条件下参数 μ 的 Bayes 验后边缘密度函数加权概率比为

$$O_{N,j} = \frac{T_{v_{jN}} \left(\frac{\mu_0 - \mu_{jN}}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right)}{1 - T_{v_{jN}} \left(\frac{\mu_0 - \mu_{jN}}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right)} \cdot \frac{P_{j\pi H_1}}{P_{j\pi H_0}} \quad (6)$$

对比式(5)和式(6)后可发现,Bayes 序贯验后加权概率比 $O_{N,j}$ 和决策阈值 A_j, B_j 中都含有相同的比例项 $\frac{P_{j\pi H_1}}{P_{j\pi H_0}}$,由于序贯试验的判决条件就是在比较 $O_{N,j}, A_j, B_j$ 这 3 者的数值关系,因此去掉相同的比例项不会对试验判决结果产生任何影响,故为了计算方便,在序贯试验中使用式(2)来求决策阈值 A_j 和 B_j ,而对应的序贯概率比则按式(7)取值:

$$O_{N,j} = \frac{T_{v_{jN}} \left(\frac{\mu_0 - \mu_{jN}}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right)}{1 - T_{v_{jN}} \left(\frac{\mu_0 - \mu_{jN}}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right)} \quad (7)$$

对于多指标序贯试验而言,由于待考查的各个指标间必然存在某种关联,因此能够给出多元正态总体的协方差矩阵的多元正态分布的 Bayes 序贯检验方法^[13]是个不错的选择。但多元正态分布的 Bayes 序贯检验方法的理论推导及工程计算都比较复杂,而且,文献[13]的有关结论也只适用于方差 σ^2 已知条件下多元正态总体分布参数的 Bayes 序贯检验,因此参照单指标序贯试验方法,这里选择在每次试

验后,首先应用一元正态总体的 Bayes 序贯检验方法分别对各个指标(参数)进行统计推断,然后再考查序贯分析假设检验如式(8)所示。

$$\begin{cases} H_0: \forall j = 1, 2, \dots, m, \text{ 都有 } \mu_j \geq \mu_{j0}, \text{ 系统检验合格} \\ H_1: \exists j = 1, 2, \dots, m, \text{ 使得 } \mu_j < \mu_{j0}, \text{ 系统不合格} \end{cases} \quad (8)$$

具体的序贯检验试验流程如下:

步骤 1 根据验前信息计算两组序贯试验决策阈值 $\{A_j\}$ 和 $\{B_j\}$,令其分别满足 $0 < A_j < 1 < B_j$ 。

步骤 2 序贯试验中,每次试验 i 后,根据当前样本考查似然比 O_{ji} ,如果对于任意 $j = 1, 2, \dots, m$,都有 $O_{ji} \leq A_j$,则接受式(8)的 H_0 假设,认为产品动态试验合格,终止试验;如果存在 $j = 1, 2, \dots, m$,使得 $O_{ji} \geq B_j$,则接受式(8)的 H_1 假设,认为产品动态试验不合格,终止试验;否则,不作判别,继续下次试验。

步骤 3 进入序贯截尾试验后,每次试验前重新计算序贯试验决策阈值 $A_{j,i}$ 和 $B_{j,i}$,每次试验后计算似然比 O_{ji} ,然后参照步骤 2 中的方法确定序贯试验退出条件,并确保最大试验次数不超过 N_{\max} 。

1.3 加权验前信息处理

验前信息是 Bayes 统计学区别于经典统计学的主要标志,它主要来源于经验和历史数据。在无信息可用的情况下,可按照“同等无知”原则来确定相应的验前分布;而当有大量历史数据可用时,则一般采用矩估计法来确定验前分布;当现有资料不足以确定验前分布时,则可采用自助法(Bootstrap 法)或随机加权法。本文中,考虑到长周期系统工作周期长和动态试验成本高的特点,主张在进行动态试验前,首先进行 n_0 个系统工作周期的静态试验,并将这些静态试验的考核结果看作是动态试验的一种验前信息。但这里存在两个问题:一是静态试验的试验条件与动态试验是有差别的,因此严格的说,静态试验的考核结果是不应直接视作动态试验的验前信息的。但对于多数系统而言,系统静态试验与动态试验的精度水平是有可比性的(这点需要借助类似产品鉴定试验的历史数据或凭经验推算得出),只要根据既定技术指标对静态试验的考核标准做一定比例的从严加权处理,则由此得出的静态试验的考核结果就可以视作是动态试验的有效验前信息。可见,本文由静态试验取得的验前信息实际上已经是一种加权验前信息。二是对于长周期、尤其是超长周期的系统而言,其静态试验的试验次数也不宜过多,因为毕竟动态试验才是试验鉴定活动的根本依托,过多的静态试验是完全没有必要的。工程中,只要静态试验已经取得足够数量具有代表性的验前数据,就可以利用 Bootstrap 方法统计抽样求取近似的验前分布信息。设静态试验下测得的待检系统指标统计观测值 x_j 的联合参数验前密度: $\pi(\mu_j, \sigma_j^2) \sim N - I Ga(v_{j\pi}, \mu_{j\pi}, \sigma_{j\pi}^2, k_{j\pi})$

为确定性分布函数,则按照 Bootstrap 法的操作流程,可从已知样本中随机抽取 n_0 个样本做放回式随机抽样,往复做 \bar{n}_0 次后,即可分别求得 \bar{n}_0 个再生样本的参数 μ_j 的验前均值 $\bar{\mu}_j$ 和验前方差 $S_{j\pi}^2$,以及参数 σ_j^2 的验前均值 $\bar{\sigma}_j^2$ 和验前方差 $S_{j\pi}^2$ 。然后,利用矩估计法求解 (μ_j, σ_j^2) 的联合验前分布超参数。根据文献[12],参数 μ_j 的边缘验前密度服从 t 分布: $t(v_{j\pi}, \mu_{j\pi}, \sigma_{j\pi})$,故由矩估计法,可得

$$\begin{cases} \mu_{j\pi} = \bar{\mu}_j \\ \frac{v_{j\pi}\sigma_{j\pi}^2}{k_{j\pi}(v_{j\pi}-2)} = S_{j\pi}^2 \end{cases} \quad (9)$$

同样根据文献[12],参数 σ_j^2 的边缘验前密度服从逆伽马(Gamma)分布: $IGa(\frac{v_{j1}}{2}, \frac{v_{j1}\sigma_{j1}^2}{2})$,故由矩估计法可得

$$\begin{cases} \frac{v_{j\pi}\sigma_{j\pi}^2}{v_{j\pi}-2} = \bar{\sigma}_j^2 \\ \frac{2(v_{j\pi}\sigma_{j\pi}^2)^2}{(v_{j\pi}-2)^2(v_{j\pi}-4)} = S_{j\pi}^2 \end{cases} \quad (10)$$

将式(9)和式(10)联立后,即可求得验前分布 $N-IGa(v_{j\pi}, \mu_{j\pi}, \sigma_{j\pi}^2, k_{j\pi})$ 的 4 个超参数 $(v_{j\pi}, \mu_{j\pi}, \sigma_{j\pi}^2, k_{j\pi})$,进而根据文献[12]中 Bayes 正态分布的有关结论可求得指标 j 接受 H_{j0} 的验前概率 $P_{j\pi H_0}$ 和接受 H_{j1} 的验前概率 $P_{j\pi H_1}$ 。然后,参照式(2),令

$$\begin{cases} A_{j\pi 0} = \frac{\beta_j}{1-\alpha_j} \\ B_{j\pi 0} = \frac{1-\beta_j}{\alpha_j} \end{cases} \quad (11)$$

当 $O_{j0} = \frac{P_{j\pi H_1}}{P_{j\pi H_0}} > B_{j\pi 0}$ 时,认为静态试验结果过于不理想,它表明即使该系统继续按照当前静态试验条件进行序贯试验,其被最终裁定为不合格的可能性也是相当大的。而众所周知,动态试验条件下系统的表现往往会较静态试验要更差一些,因此可以认为如果系统继续按照动态试验条件进行序贯试验,其被最终裁定为不合格的可能性将更高。同时,动态试验的难度和成本往往要远高于静态试验,因此认为这样的验前信息处理结果表明该系统已毫无继续做动态试验的价值,即不具备动态试验的基本条件,建议生产方重新调整设备状态。否则,如果对于任意 j 而言,都有 $O_{j0} = \frac{P_{j\pi H_1}}{P_{j\pi H_0}} \leq B_{j\pi 0}$,则认为验前信息处理结果基本符合要求,可以开始动态试验。

1.4 Bayes 序贯试验过程与截尾方案

前文提到,长周期系统动态试验的周期很长,这相应地要求动态试验次数要相当少,因此一般的批检式正态分布参数 Bayes 序贯验后加权检验方法是不完全适用的。那么,是否也可以采用类似静态试验结果处理中的 Bootstrap

方法来扩充动态试验样本量,进而达到试验鉴定的目的呢?答案是否定的。这是因为:① Bootstrap 方法的估值误差是与其作为种子数据的观测样本的样本量有直接关系的。如果样本量过小,那么对其应用 Bootstrap 方法计算得到的参数估值的偏就可能过大,因此 Bootstrap 方法有效估值的一个前提就是种子数据的样本量不宜过小,Bootstrap 方法本身并不能作为小子样试验的依据。② 对于本文长周期系统而言,由于静态试验的具体实施要相对容易,一般来说,静态试验的次数是可以做到比动态试验更多一些的,获取能够满足 Bootstrap 方法试验样本量要求的静态试验数据对于多数系统来说并不困难。③ 前文应用 Bootstrap 方法的主要目的在于求解验前分布的参数估值,其估值误差对于 Bayes 序贯试验鉴定结论的影响是有限的、且随序贯试验次数的增加而逐渐减小的。因此,Bootstrap 方法应用于静态试验结果的验前信息处理是可行的。

对于作为试验鉴定根本依据的动态试验而言,如果仍直接采用 Bootstrap 方法进行样本容量扩充,无法对试验鉴定的风险进行量化评估不说,由于动态试验样本量的限制,其试验鉴定结果还很可能因脱离实际数据支撑而全然不可信。这说明,该方法用于解决小子样动态试验鉴定的方式本身就违背了试验鉴定的根本初衷,因此是绝不可行的。

有了充分的静态试验数据为支撑后,动态试验的次数是不是就可以任意小了?答案同样是否定的。正如前文所述,静态试验数据作为动态试验验前信息的一个前提条件就是假设静态试验与动态试验的精度水平是有可比性的,但静态试验与动态试验毕竟是有差别的,在此条件下,动态试验的次数同样也不可能太少。另外,实际工程中,有些复杂系统的动态试验是需要在不同动态试验条件下分别进行的,这也从客观上决定了此类系统的动态试验次数不可能太少。关于动态试验次数的最小数值的取值,假设相关的领域专家可根据已有经验分析确定。因此,假设长周期系统动态试验次数最大为 N_{max} ,最小为 $N_{min} > 1$ 。参照序贯分析假设检验的工作流程,将待检系统动态试验的最小试验次数(即起始样本容量)按 N_{min} 进行,后续每次动态试验后的样本容量按照增量为 1 展开。具体过程如下。

步骤 1 利用式(2)求取首批序贯试验的决策阈值 A_j, B_j 。

步骤 2 进行动态试验,设当前动态试验次数 $N \geq N_{min}$,则可求得均值 $\hat{\mu}_{N,j} = \bar{x}_j = \sum_{i=1}^N x_{i,j}$,以及样本方差 $S_{N,j}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{i,j} - \bar{x}_j)^2$ 。则根据 $\hat{\mu}_{N,j}, S_{N,j}^2$ 以及验前超参数 $(v_{j\pi}, \mu_{j\pi}, \sigma_{j\pi}^2, k_{j\pi})$ 可求得当前试验后的参数 (μ, σ^2) 的验后分布参数 $(v_{jN}, \mu_{jN}, \sigma_{jN}^2, k_{jN})$,进而由式(7)可求得序贯概率比 $O_{N,j}$ 。

步骤 3 当 $N \leq N_c$ 时,考查各指标 j 的 A_j, B_j 和

$O_{N,j}$, 并按照式(8)的假设检验条件及相应的序贯检验方法判定是否符合试验退出条件, 如果符合, 则终止试验; 否则, 令 $N=N+1$, 重复步骤 2 继续试验。

步骤 4 当 $N > N_c$ 时, 转入序贯截尾程序, 重新计算序贯截尾试验的决策阈值 $A_{N,j}$ 和 $B_{N,j}$, 方法如下:

(1) 当 $N \leq N_{max}$ 且 $A_{N-1,j} < O_{N-1,j} \leq 1$ 时, 令

$$\begin{cases} A_{N,j} = O_{N-1,j} \\ B_{N,j} = B_{N-1,j} \end{cases} \quad (12)$$

(2) 当 $N \leq N_{max}$ 且 $1 < O_{N-1,j} < B_{N-1,j}$ 时, 令

$$\begin{cases} A_{N,j} = A_{N-1,j} \\ B_{N,j} = O_{N-1,j} \end{cases} \quad (13)$$

(3) 当 $N \leq N_{max}$ 且 $O_{N-1,j} \leq A_{N-1,j}$ 时, 令

$$\begin{cases} A_{N,j} = A_{N-1,j} \\ B_{N,j} = B_{N-1,j} \end{cases} \quad (14)$$

步骤 5 参照步骤 2 的方法求得概率似然比 $O_{N,j}$, 重新考查各指标 j 的 $A_{N,j}, B_{N,j}, O_{N,j}$, 并按照式(8)的假设检验条件及相应的序贯检验方法判定是否符合试验退出条件, 如果符合, 则终止试验; 否则, 若 $N < N_{max}$, 则令 $N=N+1$, 然后, 重复步骤 4 继续试验。特别地, 当 $N=N_{max}$ 时, 则令

$$A_{N,j} = B_{N,j} = 1 \quad (15)$$

重复步骤 4 继续试验。注意到, 按照式(12)、式(13)、式(14)的截尾条件迭代后, 继续试验区是随动态试验次数的增加而逐步缩小的; 当似然比 $A_{N,j} < O_{N,j} \leq 1$ 时, 说明试验的结果更趋向于接受 H_0 。假设, 此时适当增大 A 的取值来加速后续结果更加趋向于接受 H_0 。假设是合乎情理的; 同样, 当 $1 < O_{N,j} < B_{N,j}$ 时, 说明试验的结果更趋向于接受 H_1 假设, 此时适当减小 B 的取值来加速后续结果更加趋向于接受 H_1 也是合乎情理的。特别的, 当试验持续进行到第 N_{max} 次时, 考虑到尽量减小截尾风险的问题, 利用式(12)、式(13)、式(14)的正常序贯截尾方案进行序贯试验, 若此时仍不能终止试验, 再参照式(15)的方式强行终止试验。

1.5 Bayes 序贯截尾风险增量上界的计算

在 Bayes 序贯试验中, 当不考虑序贯截尾方案时, 其犯两类错误的风险的计算可参照文献[12]取得。而当采用序贯截尾方案后, 相应的犯两类错误的风险必然要增加。这里, 为了计算本文的序贯截尾方案所引入的截尾风险增量上界 $\Delta\alpha_j$ 和 $\Delta\beta_j$, 假设试验在第 $N \in (N_c, N_{max}]$ 次试验后符合序贯截尾试验退出条件, 且此时的序贯试验决策阈值分别为 $A_{N,j}$ 和 $B_{N,j}$, 满足

$$\begin{cases} A_j \leq A_{N,j} \leq 1 \\ 1 \leq B_{N,j} \leq B_j \end{cases} \quad (16)$$

则有生产方截尾风险增量上界为

$$\Delta\alpha_j = P\{B_{N,j} < O_{N,j} < B_j \mid \mu_j, \mu_j \geq \mu_{j0}\} = \left[T_{v_{jN}} \left(t_{\frac{B_j}{B_{N,j}+1}}(v_{jN}) + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right) - \right.$$

$$\left. T_{v_{jN}} \left(t_{\frac{B_{N,j}}{B_{N,j}+1}}(v_{jN}) + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right) \right] \Big|_{\mu_j, \mu_j \geq \mu_{j0}} = \int_{\mu_{j0}}^{+\infty} \left[T_{v_{jN}} \left(t_{\frac{B_j}{B_{N,j}+1}}(v_{jN}) + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right) - T_{v_{jN}} \left(t_{\frac{B_{N,j}}{B_{N,j}+1}}(v_{jN}) + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right) \right] dF^x(\mu_j) \quad (17)$$

式中, $t_\alpha(x)$ 表示标准 t 分布下的 α 分位数; $F^x(\mu_j)$ 为 μ_j 的验前分布函数, 根据共轭分布的性质, 其服从 t 分布: $t(v_{jN}, \mu_{jN}, \sigma_{jN})$, 故将 t 分布的概率密度函数代入式(17)后可得

$$\Delta\alpha_j = \int_{\mu_{j0}}^{+\infty} \left(\left[T_{v_{jN}} \left(t_{\frac{B_j}{B_{N,j}+1}}(v_{jN}) + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right) - T_{v_{jN}} \left(t_{\frac{B_{N,j}}{B_{N,j}+1}}(v_{jN}) + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right) \right] \cdot \frac{\Gamma(\frac{v_{jN}+1}{2})}{\Gamma(\frac{v_{jN}}{2})} \frac{1}{\sqrt{v_{jN}\pi}\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \left[1 + \frac{1}{v_{jN}} \left(\frac{\mu - \mu_{jN}}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right)^2 \right]^{-\frac{v_{jN}+1}{2}} \right) d\mu_j \quad (18)$$

同理, 可求得使用方截尾风险增量上界为

$$\Delta\beta_j = P\{A_j < O_{N,j} < A_{N,j} \mid \mu_j, \mu_j \leq \mu_{j0}\} = P\{0 < O_{N,j} < A_{N,j} \mid \mu_j, \mu_j \leq \mu_{j0}\} - P\{0 < O_{N,j} < A_j \mid \mu_j, \mu_j \leq \mu_{j0}\} = \int_{-\infty}^{\mu_{j0}} \left(\left[T_{v_{jN}} \left(t_{\frac{A_{N,j}}{A_{N,j}+1}}(v_{jN}) + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right) - T_{v_{jN}} \left(t_{\frac{A_j}{A_j+1}}(v_{jN}) + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right) \right] \cdot \frac{\Gamma(\frac{v_{jN}+1}{2})}{\Gamma(\frac{v_{jN}}{2})} \frac{1}{\sqrt{v_{jN}\pi}\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \left[1 + \frac{1}{v_{jN}} \left(\frac{\mu - \mu_{jN}}{\sigma_{jN} / \sqrt{k_{jN}}} \right)^2 \right]^{-\frac{v_{jN}+1}{2}} \right) d\mu_j \quad (19)$$

注意到, 式(18)和式(19)中均含有超几何函数的积分运算, 直接对其求解是很困难的。这里, 采用数值求解方法, 利用 Matlab 等数学运算工具可以很方便地得到其相应的解。例如, 对于式(18)和式(19), 应用 Matlab 中的 quadgk() 函数可以求得其数值解, 具体操作方法读者可参阅 Matlab 的有关帮助文档, 此处不再赘述。

1.6 指标综合合格概率的估算

由前文, 假设 N 次动态试验后符合序贯试验退出条件, 则如果系统的各项指标的动态试验统计观测值 x_j 是服从正态分布 $N(\mu_j, \sigma_j^2)$ 的, 其正态分布参数 $(\mu_j | X)$ 应服从 $t(v_{jN}, \mu_{jN}, \frac{\sigma_{jN}}{\sqrt{k_{jN}}})$ 分布, $(\sigma_j^2 | X)$ 应服从 $IGa(\frac{v_{jN}}{2}, \frac{v_{jN}\sigma_{jN}^2}{2})$ 分布。可见, 应用 Bayes 序贯试验方法是无法得到统计观测值 x_j 的精确分布形式的, 从而也就很难从理论上直接推导出 $x_j \geq \mu_{j0}$

的精确概率,即指标 j 的综合合格概率。此时,应用 Monte Carlo 法可以求取统计观测值 x_j 优于既定 μ_{j0} (即 $P\{x_j \geq \mu_{j0}\}$) 的数值解,相应的 Matlab 求解流程如图 1 所示。按照图 1 的工作流程,可逐项取得系统各指标的综合合格概率均值 \bar{p}_j 、标准差 S_{pj} 及 95% 合格概率分位数 $\bar{x}_{j,95}$ 。这里需要特别说明的是,指标 j 的综合合格概率体现的是单次随机抽样条件下 $x_j \geq \mu_{j0}$ 的概率及 95% 置信水平下单次随机抽样满足 $x_j \geq \mu_{j0}$ 要求的 μ_{j0} 估计值。因此,利用它可以对下一次动态试验统计观测值 x_j 能否高于既定值 μ_{j0} 做出具有统计意义的预测,也可以估计出 95% 置信水平下的统计观测值 x_j 的实际达标水平;而本文中序贯试验犯两类错误的风险都是以考查全体动态试验抽样中的统计观测值为目标,因此已进行的动态试验次数越多,下一次试验结果对两类错误风险的数值影响就越小,这也是符合统计规律的。

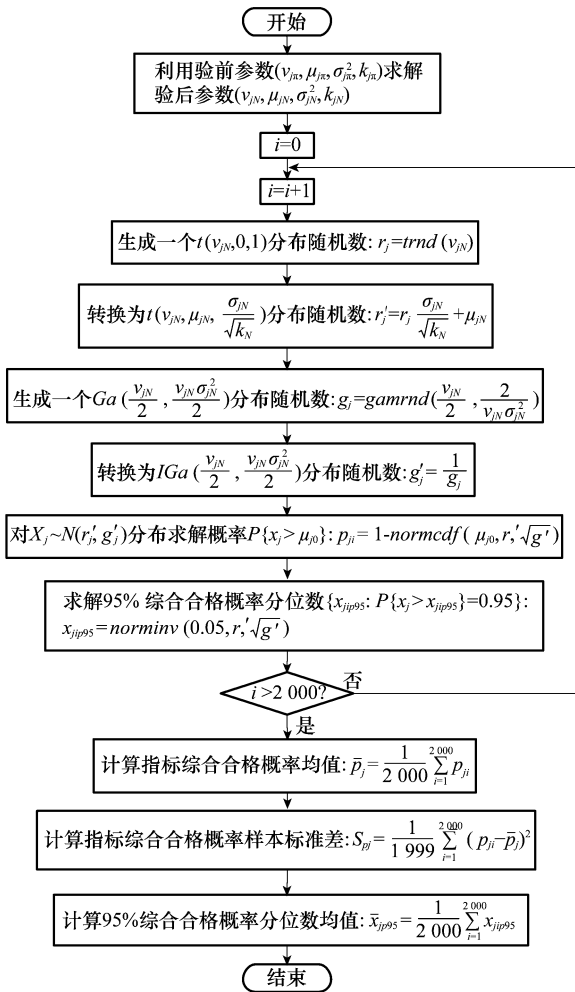


图 1 Matlab 下应用 Monte Carlo 法求解指标综合合格概率

2 应用举例

假设某待检系统的最低要求合格概率限定为 μ_{j0} , 并约定生产方风险为 α_j , 使用方风险为 β_j , 如表 1 所示。为了尽

可能缩减该系统动态试验的次数,首先对该系统进行了 10 次静态试验,测得各次静态试验下相应的系统指标统计观测值如表 2 所示。事实上,10 次抽检的静态试验是不足以提供足够的验前信息的,因此根据 1.3 节的验前信息获取方法,应用 bootstrap 方法对表 2 的测试数据进行 1 000 次随机抽样后,得加权验前统计信息如表 3 所示。从表 3 的统计数据可以看出,没有任何一项指标的似然比 O_{j0} 高于其相应的决策阈值 $B_{j\alpha}$, 因此符合 1.3 节给出的动态试验基本条件,可以进行动态试验。假设待检系统既定动态试验最小试验次数为 5 次,序贯截尾试验起始次数为 7 次,最大动态试验次数为 9 次。并设动态试验各次抽检取得的统计观测值如表 4 所示,则根据 1.4 节的 Bayes 序贯试验工作流程,当动态试验执行完第 5、6、7 次抽检后,发现 Bayes 序贯试验统计后统计分析均不能满足多指标序贯试验退出条件,此时统计得到的第 7 次后 Bayes 序贯试验统计后统计数据如表 5 所示。从表 5 的数据看,指标 1、指标 3 和指标 4 没有满足序贯退出条件,其他指标均趋于满足 H_0 假设检验。因此,为了快速结束试验,选择进入序贯截尾试验程序。由此,根据 1.4 节的 Bayes 序贯截尾试验规则,得到第 8、第 9 次序贯截尾试验后统计信息,如表 6 所示。从表 6 的数据看,第 8 次试验后,指标 1 没有满足序贯退出条件,其他指标均满足 H_0 假设检验;第 9 次试验后,指标 1 和指标 3 没有满足序贯退出条件,其他指标均满足 H_0 假设检验。由于此时已达到系统设定的最大动态试验次数,根据第 1.4 节的 Bayes 序贯截尾试验规则,令 $A_{j\beta} = B_{j\beta} = 1$, 对动态试验进行强制截尾,结果表明所有指标的 Bayes 序贯试验后加权概率比均小于 1, 因此认为应接受 H_0 假设检验,鉴定产品合格。

表 1 待检系统各指标最低要求合格概率及两类错误风险值

条目	指标						
	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4	指标 5	指标 6	指标 7
μ_{j0}	0.80	0.80	0.85	0.85	0.85	0.85	0.9
α_j	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
β_j	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05

表 2 待检系统各指标静态试验的统计观测值

次数	指标						
	指标 7	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4	指标 5	指标 6
1	0.786 2	0.799 5	0.806 1	0.850 3	0.880 5	0.910 0	0.919 2
2	0.799 1	0.855 0	0.818 5	0.883 6	0.882 4	0.904 9	0.931 5
3	0.817 0	0.795 9	0.872 3	0.863 4	0.869 0	0.899 5	0.922 8
4	0.820 7	0.848 1	0.861 1	0.847 8	0.862 7	0.906 3	0.921 7
5	0.842 5	0.817 6	0.813 8	0.885 4	0.884 5	0.904 4	0.910 6
6	0.810 6	0.824 3	0.847 6	0.849 0	0.842 8	0.916 1	0.922 2
7	0.778 0	0.802 3	0.798 7	0.820 5	0.884 7	0.888 3	0.920 6
8	0.802 2	0.810 0	0.848 9	0.894 5	0.871 2	0.892 4	0.913 9
9	0.798 3	0.808 5	0.872 7	0.896 2	0.887 3	0.908 4	0.934 7
10	0.797 6	0.800 2	0.795 3	0.890 3	0.901 3	0.905 3	0.937 9

表 3 待检系统各指标静态试验的验前统计信息

条目	指标						
	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4	指标 5	指标 6	指标 7
$\mu_{j\pi 0}$	0.804 997 7	0.815 780 1	0.833 367 8	0.867 505 1	0.876 475 3	0.903 476 4	0.923 448 1
$k_{j\pi 0}$	0.100 930 6	0.100 784 8	0.099 423 1	0.100 490 9	0.100 612 7	0.104 194 6	0.102 639 6
$v_{j\pi 0}$	4.092 105 4	4.110 809 1	4.293 846 8	4.171 235 4	4.078 436 0	4.136 879 6	4.154 578 4
$\sigma_{j\pi 0}^2$	0.000 022 9	0.000 029 1	0.000 063 1	0.000 045 3	0.000 016 9	0.000 004 9	0.000 005 2
$P_{j\pi H 0}$	0.621 813 3	0.797 996 6	0.271 396 9	0.772 840 3	0.945 246 3	0.999 375 7	0.985 629 7
$P_{j\pi H 1}$	0.378 186 7	0.202 003 4	0.728 603 1	0.227 159 7	0.054 753 7	0.000 624 3	0.014 370 3
$\alpha_{j\pi 0}$	0.031 090 7	0.039 899 8	0.013 569 8	0.038 642 0	0.047 262 3	0.049 968 8	0.049 281 5
$\beta_{j\pi 1}$	0.018 909 3	0.010 100 2	0.036 430 2	0.011 358 0	0.002 737 7	0.000 031 2	0.000 718 5
$A_{j\pi 0}$	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6
$B_{j\pi 0}$	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000
$O_{j 0}$	0.608 199 7	0.253 138 2	2.684 640 8	0.293 928 4	0.057 925 4	0.000 624 7	0.014 579 8

表 4 待检系统各指标动态试验的统计观测值

次数	指标						
	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4	指标 5	指标 6	指标 7
1	0.795 6	0.847 9	0.881 0	0.888 9	0.880 8	0.906 8	0.935 7
2	0.803 4	0.830 5	0.880 2	0.879 6	0.876 5	0.886 8	0.943 5
3	0.802 9	0.779 8	0.874 7	0.814 6	0.866 9	0.899 3	0.944 0
4	0.798 5	0.862 4	0.806 5	0.835 3	0.882 7	0.884 4	0.924 2
5	0.795 2	0.830 6	0.883 7	0.866 9	0.875 1	0.880 4	0.900 9
6	0.800 9	0.867 8	0.891 6	0.878 7	0.875 3	0.892 5	0.923 9
7	0.799 4	0.846 2	0.843 6	0.861 2	0.879 5	0.911 7	0.926 3
8	0.801 6	0.790 6	0.887 7	0.894 7	0.880 1	0.919 9	0.915 9
9	0.802 1	0.811 9	0.784 0	0.891 4	0.875 3	0.880 8	0.932 8

表 5 第 7 次动态试验后待检系统各指标 Bayes 序贯试验后统计信息

条目	指标						
	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4	指标 5	指标 6	指标 7
μ_{j7}	0.799 480 1	0.837 557 4	0.865 453 3	0.860 851 3	0.876 676 9	0.894 712 8	0.928 291 4
k_{j7}	7.100 930 6	7.100 784 8	7.099 423 1	7.100 490 9	7.100 612 7	7.104 194 6	7.102 639 6
v_{j7}	11.092 105	11.110 809	11.293 847	11.171 235	11.078 436	11.136 880	11.154 578
σ_{j7}^2	0.000 015 4	0.000 555 4	0.000 602 5	0.000 464 5	0.000 023 3	0.000 089 8	0.000 140 4
$P_{j7 H 0}$	0.365 363 6	0.999 328 2	0.939 555 9	0.896 829 1	1.000 000 0	1.000 000 0	0.999 974 9
$P_{j7 H 1}$	0.634 636 4	0.000 671 8	0.060 444 1	0.103 170 9	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 025 1
A_j	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6
B_j	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000
$O_{7,j}$	1.736 999 7	0.000 672 3	0.064 332 6	0.115 039 6	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 025 1

表 6 第 8,9 次动态试验后待检系统各指标 Bayes 序贯截尾试验后统计信息

条目	指标						
	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4	指标 5	指标 6	指标 7
μ_{j8}	0.799 747 9	0.831 757 4	0.868 197 7	0.865 027 8	0.877 100 8	0.897 825 9	0.926 757 3
k_{j8}	8.100 930 6	8.100 784 8	8.099 423 1	8.100 490 9	8.100 612 7	8.104 194 6	8.102 639 6
v_{j8}	12.092 105	12.110 809	12.293 847	12.171 235	12.078 436	12.136 880	12.154 578
σ_{j8}^2	0.000 014 4	0.000 682 3	0.000 582 9	0.000 512 2	0.000 022 0	0.000 133 4	0.000 139 0

续表 6

条目	指标						
	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4	指标 5	指标 6	指标 7
P_{j8H0}	0.426 570 3	0.997 672 7	0.973 710 7	0.958 589 2	1.000 000 0	1.000 000 0	0.999 985 4
P_{j8H1}	0.573 429 7	0.002 327 3	0.026 289 3	0.041 410 8	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 014 6
A_{j8}	0.052 631 6	0.052 631 6	0.064 332 6	0.115 039 6	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6
B_{j8}	1.736 999 7	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000
$O_{8,j}$	1.344 279 4	0.002 332 7	0.026 999 1	0.043 199 7	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 014 6
μ_{j9}	0.800 008 3	0.829 578 8	0.858 940 0	0.867 922 6	0.876 906 7	0.895 955 7	0.927 418 0
k_{j8}	9.100 930 6	9.100 784 8	9.099 423 1	9.100 490 9	9.100 612 7	9.104 194 6	9.102 639 6
v_{j9}	13.092 105	13.110 809	13.293 847	13.171 235	13.078 436	13.136 880	13.154 578
σ_{j9}^2	0.000 013 6	0.000 650 7	0.001 066 2	0.000 518 9	0.000 020 3	0.000 143 4	0.000 129 2
P_{j9H0}	0.502 660 7	0.998 058 9	0.788 285 2	0.983 255 9	1.000 000 0	1.000 000 0	0.999 997 1
P_{j9H1}	0.497 339 3	0.001 941 1	0.211 714 8	0.016 744 1	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 002 9
A_{j9}	0.052 631 6	0.052 631 6	0.064 332 6	0.115 039 6	0.052 631 6	0.052 631 6	0.052 631 6
B_{j9}	1.344 279 4	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000	19.000 000
$O_{9,j}$	0.989 413 6	0.001 944 9	0.268 576 5	0.017 029 3	0.000 000 0	0.000 000 0	0.000 002 9

最后,参照第 1.5 节序贯截尾风险增量上界计算方法,以及第 1.6 节图 1 给出的指标综合合格概率 Monte Carlo

估算方法,可以得到的第 9 次序贯强制截尾试验后两类风险增量上界及综合合格概率统计信息如表 7 所示。

表 7 第 9 次 Bayes 序贯强制截尾试验两类风险增量上界及综合合格概率统计信息

条目	指标						
	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4	指标 5	指标 6	指标 7
$\Delta\alpha_j$	0.011 533 1	0.058 469 0	0.038 710 5	0.042 740 8	0.003 196 4	0.000 096 9	0.004 975 6
$\Delta\beta_j$	0.011 016 1	0.032 701 5	0.057 181 2	0.028 535 9	0.002 603 5	0.000 057 5	0.002 038 7
\bar{p}_j	0.500 877 8	0.868 008 9	0.605 676 3	0.778 212 0	0.999 971 2	0.999 028 2	0.984 686 2
S_{pj}	0.000 562 2	0.045 784 4	0.020 937 5	0.044 291 5	0.000 414 4	0.003 485 8	0.017 639 2
\bar{x}_{jp95}	0.793 564 3	0.785 329 3	0.801 797 3	0.828 310 5	0.869 077 1	0.875 108 5	0.907 631 0

3 结 论

目前,有些长周期系统动态试验次数(如惯性导航系统海上试验航次)的确定都是基于经典统计学理论展开的,不但试验所需的样本容量大,其相关的理论推导也存在争议。本文基于 Bayes 序贯检验方法有效解决了传统方法所需样本容量过大的问题,为这类长周期系统的动态试验鉴定提供了理论依据。本文关于确定长周期系统动态试验次数的方法是以单次抽样检验合格概率可测算为工作前提的,这主要是考虑到本文特定的应用背景的需要^[14-15]。对此,读者可根据自身项目需要将此假设检验条件变更为其他统计量,只要确保该统计量同样服从正态分布即可。另外,考虑到经典 Bayes 序贯检验方法很难在试验前就事先获知具体的试验样本容量,给试验预算带来不便的问题,本文还对 Bayes 序贯检验方法增加了最大动态试验次数和最小动态试验次数的可选约束条件,这从一定程度上可以弥补经典 Bayes 序贯检验方法的不足。本文最后给出了应用 Bayes

序贯检验方法进行长周期系统动态试验设计的系统仿真实例,从仿真试验的结果看,该方法是可行的。

参考文献:

- [1] Xu T X, Dong Q, Zhang Y L. The research of flight reliability evaluation of missile[C]// *Proc. of the International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering*, 2011: 114 - 117.
- [2] Shao Z J, Zhang Q Z, Li Y P, et al. Storage reliability assessment for missile-borne electronic products with small sampling based on Bayes theorem[C]// *Proc. of the 6th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, 2011: 2605 - 2609.
- [3] Hu Z H, Luo J X. Research on Bayesian evaluation method of missile hit accuracy[C]// *Proc. of the 4th International Symposium on Computational Intelligence and Design*, 2011: 114 - 117.
- [4] Huang X Y, Peng D L. The sequential likelihood ratio test VSMM algorithm for maneuvering target tracking[C]// *Proc.*

- of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2010: 6864 - 6867.
- [5] Liu Q, Zhou J L, Jin G, et al. Bayesian sequential demonstration based on performance reliability for long life aerospace product[C] // *Proc. of the 2nd International Conference on Computer Modeling and Simulation*, 2010: 445 - 449.
- [6] Gong Y X, Yang H W, Hu W D, et al. An efficient particle filter based distributed track-before-detect algorithm for weak targets [C] // *Proc. of the International Radar Conference*, 2009: 1 - 6.
- [7] Candy J V, Chambers D H. Physics-based detection of radioactive contraband: a sequential Bayesian approach [J]. *Nuclear Science*, 2009, 56(6): 3694 - 3711.
- [8] ISO 2859 - 5: 2005. Sampling procedures for inspection by attributes-part 5: system of sequential sampling plans indexed by acceptance quantity limit (AQL) for lot-by-lot inspection[S]. London: British Standard Institution, 2006.
- [9] GB/T 8051 - 2008. 计数序贯抽样方案[S]. 北京: 中国标准出版社, 2008. (GB/T 8051 - 2008. Sequential sampling plans for inspection by attributes[S]. Beijing: China Standard Press, 2008.)
- [10] Kulldorff M, Davis R L, Kolezak M, et al. A maximized sequential probability ratio test for drug and vaccine safety surveillance [J]. *Sequential Analysis*, 2011, 30(1): 58 - 78.
- [11] Guo B, Jiang P, Xing Y Y. A censored sequential posterior odd test (SPOT) method for verification of the mean time to repair[J]. *Reliability*, 2008, 57(2): 243 - 247.
- [12] Lynch S M. *Introduction to applied Bayesian statistics and estimation for social scientists*[M]. New York: Springer, 2007.
- [13] 张金槐. 多元正态总体分布参数的 Bayes 序贯后加权检验及估计[J]. 飞行器测控学报, 2002, 21(4): 65 - 69. (Zhang J H. Bayesian sequential posterior odd test and evaluation on the multi-parameter normal population distribution[J]. *Journal of Spacecraft TT & C Technology*, 2002, 21(4): 65 - 69.)
- [14] 韩旭, 王建宇, 祖先锋. 基于时间序列模型的系统最大值指标评定方法[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(4): 839 - 845. (Han X, Wang J Y, Zu X F. System maximum-error specification oriented testing methodology basing on timing series model [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(4): 839 - 845.)
- [15] 韩旭, 王建宇, 祖先锋. 基于极值理论的系统最大值指标评定方法[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(5): 1073 - 1084. (Han X, Wang J Y, Zu X F. System maximum-error specification oriented testing methodology basing on extreme value theory[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(5): 1073 - 1084.)