

5. (15分) 设 A 是实对称矩阵, 如果 A 是半正定的, 则存在实的半正定矩阵 B , 使得 $A = B^2$ 。

6. (20分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 试证明对于 $n \geq 3$ 有 $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$, 并

计算 A^{100} , 其中 I 表示单位矩阵。

7. (20分) 设二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 4bx_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $f = y_2^2 + 2y_3^2$, 求参数 a, b 及所用的正交变换。

8. (20分) 设 A 是复数域上 6 维线性空间 V 的线性变换, A 的特征多项式为 $(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$, 证明 V 能够分解成三个不变子空间的直和, 而且它们的维数分别是 1, 2, 3。