中国科学院研究生院
2007年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：线性代数

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。
2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. （10分）计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ u & x & y & z \\ z & u & x & y \\ y & z & u & x \end{vmatrix}$$

2．（15分）已知两个n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

求解矩阵方程$AX=B$。

3．（20分）$C(A)$表示全体与n阶矩阵A可交换的矩阵构成的集合。

1) 证明$C(A)$是线性空间；

2) 若

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

求向量空间$C(A)$的维数和基。

4．（15分）设V是由所有次数不超过n的多项式构成的线性空间，证明

$$1, (x+1), (x+1)^2, \cdots, (x+1)^n,$$

是V的一组基，并求V中向量$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在这组基下的坐标。

5．（25分）设$S=\begin{pmatrix}2&2&4\\2&-1&2\\4&2&2\end{pmatrix}$,

1）求正交矩阵T使$T'ST$成对角形；

2）求最小的正实数c，使得当$a>c$时，$aI+S$ 是正定矩阵，而$-aI+S$是负定矩阵，其中I是 3 阶单位矩阵。

6．（20分）设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，求

1）A的若当形；

2）A^5。

7．（15分）设a,b,c是常数，当a,b,c满足什么关系时，方程组

$$\begin{cases}\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\\ \dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\\ \dfrac{c}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\end{cases}$$

有解，反之，当方程组有解时，这个关系一定满足？

8．（15分）已知$\alpha=(1,1,-1)'$是矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$$

的一个特征向量，试确定参数a,b及特征向量α所对应的特征值。矩阵A能否相似于对角矩阵？说明理由。

9． (15分) 设A是实对称矩阵，a,b分别是A的最小和最大特征值，证明：A的所有对角线元素都介于a,b 之间。