文章编号:1001-506X(2013)01-0223-07
网址:www.sys-ele.com

Bayes 序贯试验方法中风险的选择与计算

刘 琦, 冯文哲, 王 囡
(国防科学技术大学信息系统与管理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 对 Bayes 序贯试验方法中弃真和采伪风险的计算进行论述,给出决策常数的计算公式。分别对经典风险、平均风险和 Bayes 风险的计算公式进行推导,给出了三者之间的递推计算关系。在给定 Bayes 风险条件下,对序贯验后加权检验和 Bayes 序贯概率比检验,推导了决策常数的计算公式。对现有 Bayes 方法应用中,两类风险选择所存在的问题进行分析,给出风险选择的准则和解决方案,并给出决策常数的准确计算公式。最后,给出一个示例,说明该方法的有效性。

关键词: Bayes 方法; 序贯试验; 风险; 决策常数
中图分类号: TP 114 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1001-506X.2013.01.38

Selection and calculation of risks in Bayes sequential test method

LIU Qi, FENG Wen-zhe, WANG Nan
(*College of Information Systems and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*)

Abstract: The calculation of producer's risk and consumer's risk in Bayes sequential test method is discussed, and the formulas of decision constants are deduced. The formulas of classical risk, average risk and Bayesian risk are deduced, and the recursive calculation relationship among three types of risk is presented. For sequential posterior odd test and sequential probability ratio test, the calculation formulas of decision constants are deduced for given Bayesian risk. The shortcomings and problems in the selection of two types of risk in the engineering application of Bayesian method are analyzed, the principle and solution of risks selection are given, and the exact calculation formulas of decision constants are presented. Finally, an example is given to show the validation of the proposed method.

Keywords: Bayes method; sequential test; risk; decision constant

0 引 言

由于 Bayes 方法[1-6]能够充分利用各种相关的验前信息,可在现场试验小子样条件下,对复杂的装备系统的统计参数与指标(如可靠性、精度等)做出可信度较高的估计与判断,所以 Bayes 方法近年来在工程上得到了大量的应用,如基于 Bayes 方法的试验设计[7]、基于 Bayes 方法的参数估计与检验[8-10]等。在序贯试验设计[11-14]中引入 Bayes 方法,从而降低现场试验次数,也得到了国内外广大学者的青睐。如文献[15]建立了 Bayesian 序贯方差检验(Bayesian sequential variance test, BSVT)模型及修正的 BSVT(modified BSVT, MBSVT)模型,设计了继续试验区临界值的求解方案,对“强制”截尾条件下的假设检验判决准则进行论述,并给出 MBSVT 模型平均样本量的求解算法。文献[16]提出采用 Bayes 序贯检验方法进行观测泊松过程强度的两类简单假设检验。文献[17]对正态分布未知参数的序贯验后加权检验(sequential posterior odd test, SPOT)方法进行分析,给出了进行参数假设检验时所需样本容量和决策阈值的计算方法。文献[18]提出了可靠性增长模型下的 Bayes 序贯试验设计模型,并针对指数分布类型进行进一步分析。文献[19]针对序贯试验过程中个体的分散决策,给出相应的决策规则,保证了决策时间及决策精度。文献[20]针对序贯决策方法中不同排序下置信度的最短区间进行研究。文献[21]对正态分布均值 μ 的 SPOT 的理论与计算公式进行推导,给出 SPOT 方法的计算公式和序贯检验过程。文献[22]针对航空航天产品的高可靠性及长寿命

收稿日期:2012-02-13; 修回日期:2012-09-19。
基金项目:国家自然科学基金(70971133)资助课题

的特征，采用 Bayes 序贯方法对其可靠性进行分析研究。文献[23]分析对数正态分布均值的 SPOT 方法，给出了抽样方案中样本容量和决策阈值的计算方法。文献[24]则以正态分布为基础，论述了对数正态分布均值的截尾 SPOT 方法。文献[25]将 Bayes 与经典方法的序贯概率比检验进行对比分析，分析得到 Bayes 序贯概率检验方法具有一定的优越性。文献[26]对 Bayes 序贯试验模型的敏感性进行了深入地分析。

从研究情况看，虽然目前对 SPOT 方法有大量的论文、专著发表。然而，现有的对于 SPOT 方法的研究，还不够系统、明确，难以指导实际的工程应用。现有研究的不足主要体现在以下几个方面：

(1) 在理论上，决策常数 A、B 的计算方法不同。部分学者(如文献[21, 24, 27, 28])采用式(1)进行计算

$$A=\frac{\beta_{\pi_1}}{\pi_0-\alpha_{\pi_0}},B=\frac{\pi_1-\beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}} \tag{1}$$

而另外部分学者(如文献[17])采用式(2)进行计算

$$A=\min\left(1,\frac{\beta_{\pi_1}}{P_{H_0}}\right),B=\max\left(1,\frac{P_{H_1}}{\alpha_{\pi_0}}\right) \tag{2}$$

式中，$\pi_0=P_{H_0}$；$\pi_1=P_{H_1}$ H_0、H_1 分别为参数假设检验中的原假设和备择假设；α_{π_0}、β_{π_1} 分别为事先给定的对假设检验的弃真和采伪风险要求。

(2) 对于决策常数 A、B 的取值范围，目前通用的要求是：$0<A<1<B$，从验后分布比较的角度是正确的，但没有考虑 π_0、π_1 的实际情况，事实上 A、B 的取值范围可进一步调整，或者根据 π_0、π_1 的实际情况进行一定的限制。

(3) 在工程实际中，如何选择 α_{π_0}、β_{π_1}，及其概率意义没有明确的说明，导致工程上选择 α_{π_0}、β_{π_1} 困难。

(4) 与 Bayes 序贯概率比检验(Bayes sequential probability ratio test, Bayes SPRT)方法相比，Bayes SPRT 方法与 SPOT 方法在决策常数 A、B 计算上的异同，两种方法的一致性如何，在现有的研究中没有给出明确的对比与说明，没有给出两者之间的关联性说明。

鉴于上述四点，本文对 SPOT 方法进行了进一步的研究，明确回答了关于 A、B 的取值，两类风险 α_{π_0}、β_{π_1} 的实际工程意义与选择方法，SPOT 方法与 Bayes SPRT 方法之间的一致性与关联性等，并以二项分布成功概率 p 的假设检验为例，进行阐述。

1 SPOT 方法的基本假设

在装备试验中，对于成功概率 p 进行假设检验，其复杂假设为

$$H_0: p\geqslant p_0 \qquad H_1: p<p_0 \tag{3}$$

式中，p_0 为研制合同规定的成功概率的最低可接受水平。

设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为现场试验样本，其中各 X_i 相互独立，且分布相同。当假设总体为二项分布时，$X_i=0,1$，分别代表试验失败和试验成功。假设 p 的验前分布为 Beta 分布 $B(a,b)$，其中，a、b 已知，定义验后加权比为

$$O_n=\frac{\int_0^{p_0}\pi(p\mid X)\mathrm{d}p}{\int_{p_0}^1\pi(p\mid X)\mathrm{d}p} \tag{4}$$

式中，$\pi(p|X)$ 为 p 的验后分布，表示为

$$\pi(p\mid X)=\frac{L(X\mid p)\pi(p)}{\int_0^1 L(X\mid p)\pi(p)\mathrm{d}p} \tag{5}$$

式中，$L(X|p)=\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}$ 为似然函数。$s=\sum_{i=1}^n X_i$ 为 n 次试验中的成功试验次数。

根据共轭验前分布的计算方法[29]，可知 $\pi(p|X)$ 为Beta 分布 $B(a+s,b+n-s)$。

基于给定的决策常数 A、$B(0<A<1<B)$，运用决策法则[27]进行参数假设检验的决策

(1) 若 $O_n\leqslant A$，终止试验，采纳 H_0；

(2) 若 $O_n\geqslant B$，终止试验，采纳 H_1；

(3) 若 $A<O_n<B$，继续下一次试验。

从上述检验过程看，对 SPOT 方法的应用，关键在于决策常数 A、B 的确定，有了 A、B 的具体数值，即可根据上述决策过程进行装备的试验与检验假设的决策。

2 SPOT 方法中风险的计算

对于风险的计算，根据参考文献[27]，记 H_0 被采纳的 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的取值集合为 D_0^n，即

$$D_0^n=\{(X_1,X_2,\cdots,X_n)\mid O_n\leqslant A\} \tag{6}$$

由式(6)，当 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in D_0^n$ 时，有

$$\int_{p<p_0}\pi(p\mid X)\mathrm{d}p\leqslant A\int_{p\geqslant p_0}\pi(p\mid X)\mathrm{d}p \tag{7}$$

由式(5)，式(7)可进一步写为

$$\int_{p<p_0}\frac{L(X\mid p)\pi(p)}{\int_0^1 L(X\mid p)\pi(p)\mathrm{d}p}\mathrm{d}p\leqslant$$
$$A\int_{p\geqslant p_0}\frac{L(X\mid p)\pi(p)}{\int_0^1 L(X\mid p)\pi(p)\mathrm{d}p}\mathrm{d}p \tag{8}$$

由于 $\int_0^1 L(X\mid p)\pi(p)\mathrm{d}p$ 为常量，所以式(8)的左右两侧可同时省略，即有

$$\int_{p<p_0}L(X\mid p)\pi(p)\mathrm{d}p\leqslant A\int_{p\geqslant p_0}L(X\mid p)\pi(p)\mathrm{d}p \tag{9}$$

将式(9)在 D_0^n 上积分，可得

$$\int_{X\in D_0^n}\int_{p<p_0}L(X\mid p)\pi(p)\mathrm{d}p\mathrm{d}X\leqslant$$
$$A\int_{X\in D_0^n}\int_{p\geqslant p_0}L(X\mid p)\pi(p)\mathrm{d}p\mathrm{d}X \tag{10}$$

根据 Fubini 定理，交换积分顺序，可得

$$\int_{p<p_0}\int_{X\in D_0^n} L(X \mid p)\pi(p)\mathrm{d}X\mathrm{d}p \leqslant$$
$$A\int_{p\geqslant p_0}\int_{X\in D_0^n} L(X \mid p)\pi(p)\mathrm{d}X\mathrm{d}p \tag{11}$$

当产品的可靠性服从二项分布时，D_0^n 可写为

$$D_0^n = \{s \mid s \geqslant s_0^n\} \tag{12}$$

式中，s_0^n 为 n 次试验中成功次数的最小值。

在二项分布的假设条件下，式(11)左侧的积分项可写为

$$\int_{p<p_0}\int_{X\in D_0^n} L(X \mid p)\pi(p)\mathrm{d}X\mathrm{d}p =$$
$$\int_{p<p_0}\sum_{s=s_0^n}^{n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}\pi(p)\mathrm{d}p \tag{13}$$

根据经典统计学中关于采伪错误的定义[30]，对于给定的 $p<p_0$，运用经典假设检验方法进行假设检验时，所犯的采伪错误的概率大小(采伪概率)为

$$\beta(p) = \sum_{s=s_0^n}^{n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s} \tag{14}$$

结合式(13)和式(14)，可见式(13)描述了在考虑验前信息 $\pi(p)$ 的条件下，采伪概率的期望，在 Bayes 方法中，通常记为 β_{π_1}，即

$$\beta_{\pi_1} = \int_{p<p_0}\beta(p)\pi(p)\mathrm{d}p \tag{15}$$

文献[1]给出了平均消费者风险(average consumer's risk)，即平均采伪风险(记为 $\bar{\beta}$)的定义为

$$\bar{\beta} = P(\text{Test is Passed} \mid p<p_0) = \frac{P(X\in D_0^n, p<p_0)}{P(p<p_0)} =$$
$$\frac{\int_{p<p_0}\sum_{s=s_0^n}^{n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}\pi(p)\mathrm{d}p}{\int_{p<p_0}\pi(p)\mathrm{d}p} \tag{16}$$

可以看出，$\bar{\beta}$ 是不同 p 取值下，经典的采伪风险基于验前分布的加权平均。该加权平均的定义较好地解决了复杂假设条件下风险的计算问题。

记 $\pi_1 = \int_{p<p_0}\pi(p)\mathrm{d}p$，表示 H_1 成立的验前概率。

比较式(15)和式(16)，可见

$$\beta_{\pi_1} = \pi_1\bar{\beta} \tag{17}$$

记 H_1 被采纳的 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的取值集合为 D_1^n，即

$$D_1^n = \{(X_1,X_2,\cdots,X_n) \mid O_n \geqslant B\} \tag{18}$$

当产品的可靠性服从二项分布时，D_1^n 可写为

$$D_1^n = \{s \mid s \leqslant s_1^n\} \tag{19}$$

式中，s_1^n 为 n 次试验中成功试验次数的最大值。结合第 1 节序贯检验的决策法则，可知 $s_1^n<s_0^n$。

在二项分布的假设条件下，式(11)右侧的积分项可写为

$$\int_{p\geqslant p_0}\int_{X\in D_0^n} L(X \mid p)\pi(p)\mathrm{d}X\mathrm{d}p =$$
$$\int_{p\geqslant p_0}\sum_{s=s_0^n}^{n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}\pi(p)\mathrm{d}p \tag{20}$$

由于 $\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}=1$ 对于任意的 $p\in[0,1]$ 成立，又因为 $s_1^n<s_0^n$，所以

$$\sum_{s=s_0^n}^{n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s} \leqslant 1-\sum_{s=0}^{s_1^n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}$$

从而有

$$\int_{p\geqslant p_0}\sum_{s=s_0^n}^{n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}\pi(p)\mathrm{d}p \leqslant$$
$$\int_{p\geqslant p_0}\left[1-\sum_{s=0}^{s_1^n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}\right]\pi(p)\mathrm{d}p =$$
$$\int_{p\geqslant p_0}\pi(p)\mathrm{d}p-\int_{p\geqslant p_0}\sum_{s=0}^{s_1^n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}\pi(p)\mathrm{d}p =$$
$$\pi_0-\int_{p\geqslant p_0}\sum_{s=0}^{s_1^n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}\pi(p)\mathrm{d}p \tag{21}$$

式中，$\pi_0=\int_{p\geqslant p_0}\pi(p)\mathrm{d}p$。

同样，根据经典统计学中关于弃真错误的定义[30]，可知对于给定的 $p\geqslant p_0$，运用经典假设检验方法进行假设检验时，所犯的弃真错误的概率大小(弃真概率)为

$$\alpha(p) = \sum_{s=0}^{s_1^n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s} \tag{22}$$

可见，$\int_{p\geqslant p_0}\sum_{i=0}^{s_1^n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\pi(p)\mathrm{d}p$ 描述了在考虑验前信息的条件下，弃真概率的期望，在 Bayes 方法中，通常记为 α_{π_0}，即

$$\alpha_{\pi_0} = \int_{p\geqslant p_0}\alpha(p)\pi(p)\mathrm{d}p \tag{23}$$

文献[1]给出了平均生产者风险(average producer's risk)，即平均弃真风险(记为 $\bar{\alpha}$)的定义，为

$$\bar{\alpha} = P(\text{Test is Failed} \mid p\geqslant p_0) = \frac{P(X\in D_1^n, p\geqslant p_0)}{P(p\geqslant p_0)} =$$
$$\frac{\int_{p\geqslant p_0}\sum_{s=0}^{s_1^n}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}\pi(p)\mathrm{d}p}{\int_{p\geqslant p_0}\pi(p)\mathrm{d}p} \tag{24}$$

从上述定义来看，$\bar{\alpha}$ 是不同 p 取值下，经典的弃真风险基于验前分布的加权平均。

比较式(23)和式(24)可见，$\bar{\alpha}$ 与 α_{π_0} 之间存在的对应关系为

$$\alpha_{\pi_0} = \pi_0\bar{\alpha} \tag{25}$$

3　SPOT 方法中决策常数的计算与选择

将第 2 节 α_{π_0}、β_{π_1}、π_0、π_1 的计算公式，以及式(21)的推导，代入式(11)，可得

$$\beta_{\pi_1} \leqslant A(\pi_0-\alpha_{\pi_0}) \tag{26}$$

结合式(17)和式(25)，有

$$\pi_1\bar{\beta} \leqslant A\pi_0(1-\bar{\alpha}) \tag{27}$$

可得

$$A \geqslant \frac{\beta_{\pi_1}}{\pi_0-\alpha_{\pi_0}} \text{ 或 } A \geqslant \frac{\pi_1}{\pi_0}\,\frac{\bar{\beta}}{1-\bar{\alpha}} \tag{28}$$

当采纳 H_1 时,有

$$\int_{p<p_0}\pi(p\mid X)\mathrm{d}p \geqslant B\int_{p\geqslant p_0}\pi(p\mid X)\mathrm{d}p \tag{29}$$

与第 2 节的推导过程类似,可得

$$\alpha_{\pi_0} \leqslant \frac{\pi_1-\beta_{\pi_1}}{B} \text{ 或 } \pi_0\bar{\alpha} \leqslant \frac{\pi_1(1-\bar{\beta})}{B} \tag{30}$$

进一步计算,可得

$$B \leqslant \frac{\pi_1-\beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}} \text{ 或 } B \leqslant \frac{\pi_1}{\pi_0}\,\frac{1-\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \tag{31}$$

从而可选决策常数 A、B 为[27, 31]

$$A = \frac{\pi_1}{\pi_0}\,\frac{\bar{\beta}}{1-\bar{\alpha}}\left(\text{即 } A = \frac{\beta_{\pi_1}}{\pi_0-\alpha_{\pi_0}}\right) \tag{32}$$

$$B = \frac{\pi_1}{\pi_0}\,\frac{1-\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}\left(\text{即 } B = \frac{\pi_1-\beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}}\right) \tag{33}$$

4 Bayes SPRT 中两类风险和决策常数的计算

考虑简单假设

$$H_0: p = p_0 \qquad H_1: p = p_1 \tag{34}$$

式中,$p_0 > p_1$。

运用 Bayes SPRT 方法进行假设检验时,定义似然比为

$$O_n = \frac{P(H_1\mid X)}{P(H_0\mid X)} = \frac{P(p=p_1\mid X)}{P(p=p_0\mid X)} \tag{35}$$

假设 H_0 成立的验前概率为 π_0,H_1 成立的验前概率为 π_1,在二项分布的假设条件下

$$O_n = \frac{\binom{n}{s}p_1^s(1-p_1)^{n-s}\pi_1}{\binom{n}{s}p_0^s(1-p_0)^{n-s}\pi_0} \tag{36}$$

式中,s 为 n 次试验中的成功试验次数。事先定义 A、$B(0<A<1<B)$,按照第 1 节的决策法则进行序贯决策,仍记接受 H_0 时,可能的样本取值的集合为 D_0^n(见式(12)),则接受 H_0 时,有

$$\binom{n}{s}p_1^s(1-p_1)^{n-s}\pi_1 \leqslant A\binom{n}{s}p_0^s(1-p_0)^{n-s}\pi_0 \tag{37}$$

对 s 的所有可能取值进行求和,有

$$\sum_{s=s_0^n}^{n}\binom{n}{s}p_1^s(1-p_1)^{n-s}\pi_1 \leqslant A\sum_{s=s_0^n}^{n}\binom{n}{s}p_0^s(1-p_0)^{n-s}\pi_0 \tag{38}$$

根据经典统计学中[30]关于采伪概率的定义,式中,$\sum_{s=s_0^n}^{n}\binom{n}{s}p_1^s(1-p_1)^{n-s}$ 为采伪概率的实际取值,记为 $\beta(p_1)$,则式(38)左端为考虑验前信息下的采伪风险,与第 2 节一致,仍记为 β_{π_1},有

$$\beta_{\pi_1} = \pi_1\beta(p_1) \tag{39}$$

仍记 D_1^n 为采纳 H_1 时,可能的样本取值的集合(见式(19)),因 $\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}p_0^s(1-p_0)^{n-s}=1$,$s_1^n < s_0^n$,所以

$$\sum_{s=s_0^n}^{n}\binom{n}{s}p_0^s(1-p_0)^{n-s}\pi_0 \leqslant$$

$$\pi_0 - \sum_{s=0}^{s_1^n}\binom{n}{s}p_0^s(1-p_0)^{n-s}\pi_0 \tag{40}$$

根据经典统计学[30]关于采伪概率的定义,式(40)中,$\sum_{s=0}^{s_1^n}\binom{n}{s}p_0^s(1-p_0)^{n-s}$ 为弃真概率的实际取值,记为 $\alpha(p_0)$,则 $\sum_{s=0}^{s_1^n}\binom{n}{s}p_0^s(1-p_0)^{n-s}\pi_0$ 为考虑验前信息下的弃真风险,与第 2 节一致,仍记为 α_{π_0},所以有

$$\alpha_{\pi_0} = \pi_0\alpha(p_0) \tag{41}$$

将式(39)、式(40)和式(41)代入式(38),有

$$\beta_{\pi_1} \leqslant A(\pi_0-\alpha_{\pi_0}) \tag{42}$$

或

$$\pi_1\beta(p_1) \leqslant A\pi_0(1-\alpha(p_0)) \tag{43}$$

类似地,当采纳 H_1 时,有

$$\alpha_{\pi_0} \leqslant \frac{\pi_1-\beta_{\pi_1}}{B} \tag{44}$$

或

$$\pi_0\alpha(p_0) \leqslant \frac{\pi_1(1-\beta(p_1))}{B} \tag{45}$$

从而,有

$$A \geqslant \frac{\pi_0-\alpha_{\pi_0}}{\beta_{\pi_1}} \text{ 或 } A \geqslant \frac{\pi_1}{\pi_0}\,\frac{\beta(p_1)}{1-\alpha(p_0)} \tag{46}$$

$$B \leqslant \frac{\pi_1-\beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}} \text{ 或 } B \leqslant \frac{\pi_1}{\pi_0}\,\frac{1-\beta(p_1)}{\alpha(p_0)} \tag{47}$$

从而可选[27, 32]

$$A = \frac{\pi_1}{\pi_0}\,\frac{\beta(p_1)}{1-\alpha(p_0)},\ B = \frac{\pi_1}{\pi_0}\,\frac{1-\beta(p_1)}{\alpha(p_0)} \tag{48}$$

5 风险的比较与选择

在前文中,以成败型产品为例,分析了弃真方面的风险 α_{π_0}、$\bar{\alpha}$ 和 $\alpha(p_0)$,采伪方面的风险 β_{π_1}、$\bar{\beta}$ 和 $\beta(p_1)$,这种分析结果可推广到其他的分布类型。从计算推导过程看,$\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 为复杂假设条件下,两类风险的概率加权平均值,对于这种结果取其极端值,为

$$\pi(p) = \begin{cases} \pi_0,\ p = p_0 \\ \pi_1,\ p = p_1 \\ 0,\ p \neq p_0 \text{ or } p_1 \end{cases} \tag{49}$$

在式(49)的条件下,$\bar{\alpha}=\alpha(p_0)$ 和 $\bar{\beta}=\beta(p_1)$,可见 $\alpha(p_0)$ 和

$\beta(p_1)$是$\bar{\alpha}$和$\bar{\beta}$的一种特殊情况。从这个意义上说，Bayes SPRT 方法是 SPOT 方法的一种特殊情况。

从$\alpha(p_0)$和$\beta(p_1)$的计算过程看，$\alpha(p_0)$和$\beta(p_1)$是由经典统计方法计算得出的两类风险。而α_{π_0}和β_{π_1}则是$\bar{\alpha}(\alpha(p_0))$和$\bar{\beta}(\beta(p_1))$在考虑验前概率$\pi_0$和$\pi_1$时的函数。可见$\alpha_{\pi_0}$、$\bar{\alpha}$和$\alpha(p_0)$，以及$\beta_{\pi_1}$、$\bar{\beta}$和$\beta(p_1)$有如图 1 所示的递推关系。

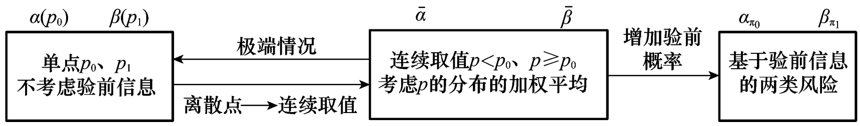


图 1　两类风险的递推计算关系

从 A 和 B 的计算公式看，在风险选择时，应满足：

(1) $\pi_1 > \beta_{\pi_1}$。虽然从计算的公式看出，$\beta_{\pi_1} = \pi_1\bar{\beta}$（或$\beta_{\pi_1} = \pi_1\beta(p_1)$）必定能满足该要求，但在实际的试验设计中，首先要求给出β_{π_1}，然后才能计算 A、B。所以，应首先进行验前信息的分析。若$\pi_1 \leqslant \beta_{\pi_1}$，则说明进行第一次试验后，无论该试验是成功还是失败，基于 Bayes 方法的分析，都应该采纳 H_0。这是因为即使试验失败，即取 $s_0^1 = 0$，由式(14)，$\beta(p) = 1$，再由式(15)，计算出的 $\beta_{\pi_1} = \pi_1$。从而，无论试验结果成功与否，实际的验后采伪风险都小于等于给定的值，所以在$\pi_1 \leqslant \beta_{\pi_1}$的情况下，在确定验前信息能正确反映装备的可靠性实际水平的情况下，不需要进行现场试验，直接采纳 H_0 即可。

(2) $\pi_0 > \alpha_{\pi_0}$。虽然从计算的公式看出，$\alpha_{\pi_0} = \pi_0\bar{\alpha}$（或$\alpha_{\pi_0} = \pi_0\alpha(p_0)$）必定能满足该要求，但在实际的试验设计中，首先要求给出α_{π_0}，然后才能计算 A、B。所以，应首先进行验前信息的分析，若$\pi_0 \leqslant \alpha_{\pi_0}$，则说明进行第 1 次试验后，无论该试验是成功还是失败，基于 Bayes 方法的分析，都应该采纳 H_1（直接拒绝 H_0），这是因为即使试验成功，即取 $s_1^1 = 1$，由式(22)，$\alpha(p) = 1$，再由式(23)，计算出的 $\alpha_{\pi_0} = \pi_0$，小于等于给定的值，所以在$\pi_0 \leqslant \alpha_{\pi_0}$情况下，在确定验前信息能正确反映装备的可靠性实际水平的情况下，不需要进行现场试验，直接拒绝 H_0 即可。

(3) 当$\pi_0 - \alpha_{\pi_0} < \beta_{\pi_1}$时，由式(32)可得出 $A > 1$ 的结论，此时采用 SPOT 方法决策法则：若 $O_n \leqslant A$，终止试验，采纳 H_0。在实际的可靠性试验中，可能会出现验后概率满足不等式$\int_0^{p_0}\pi(p \mid X)\mathrm{d}p > \int_{p_1}^1 \pi(p \mid X)\mathrm{d}p$成立的可靠性试验结果，并且按照序贯检验的决策法则，可做出采纳 H_0 的决策。这与基于"0－1"损失函数的 Bayes 检验决策法则"若$\dfrac{\int_0^{p_0}\pi(p \mid X)\mathrm{d}p}{\int_{p_1}^1 \pi(p \mid X)\mathrm{d}p} < 1$，则采纳 H_0"[27, 32]是矛盾的，并且从概率上是不能说服使用方的（因为 H_0 成立的验后概率$\int_{p_1}^1 \pi(p \mid X)\mathrm{d}p$小于 H_1 成立的验后概率$\int_0^{p_0}\pi(p \mid X)\mathrm{d}p$）。所以，定义决策常数 A 时，应选择的公式为

$$A = \min\left\{1, \frac{\beta_{\pi_1}}{\pi_0 - \alpha_{\pi_0}}\right\} \tag{50}$$

(4) 当$\pi_1 - \beta_{\pi_1} < \alpha_{\pi_0}$时，由式(33)，可得出 $B < 1$ 的结论，此时采用 SPOT 方法决策法则：若 $O_n \geqslant B$，终止试验，采纳假设 H_1。则在实际的可靠性试验中，可能会出现验后概率满足$\int_0^{p_0}\pi(p \mid X)\mathrm{d}p < \int_{p_1}^1 \pi(p \mid X)\mathrm{d}p$的不等式成立的可靠性试验结果，并且按照序贯检验的决策法则，可做出采纳 H_1 的决策。这与基于"0－1"损失函数的 Bayes 检验决策法则"若$\dfrac{\int_0^{p_0}\pi(p \mid X)\mathrm{d}p}{\int_{p_1}^1 \pi(p \mid X)\mathrm{d}p} > 1$，则采纳 H_1"[27, 32]是矛盾的，并且从概率上是不能说服生产方的（因为 H_0 成立的验后概率$\int_{p_1}^1 \pi(p \mid X)\mathrm{d}p$大于 H_1 成立的验后概率$\int_0^{p_0}\pi(p \mid X)\mathrm{d}p$）。所以，定义决策常数 B 时，应选择的公式为

$$B = \max\left\{1, \frac{\pi_1 - \beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}}\right\} \tag{51}$$

6　算例分析

设某装备的可靠性服从二项分布，通过对历史数据的分析，得出其成功概率 p 的验前分布为 Beta 分布 $B(1\,687, 78)$，研制合同要求其可靠性水平 $p_0 \geqslant 0.95$，要求在 $\alpha_{\pi_0} = \beta_{\pi_1} = 0.10$ 下进行序贯试验设计。

计算可得 $\pi_0 = 0.880\,2$，$\pi_1 = 0.119\,8$。根据式(32)和式(33)，可得

$$A = \frac{0.10}{0.880\,2 - 0.10} = 0.128\,2$$

$$B = \frac{0.119\,8 - 0.10}{0.10} = 0.198\,0$$

由式(51)，在 SPOT 方法中选择 $B = 1$。

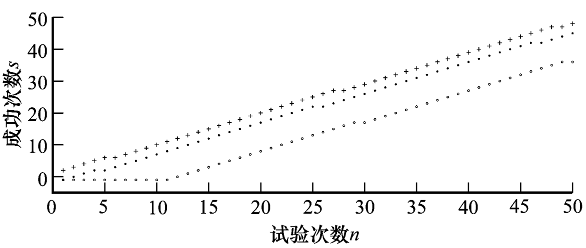
表 1 给出了不同 n 和 A、B 下的 s_0^n 和 s_1^n 以及两类风险的实际值。表 1 中 s_0^n 列的"—"表示当可靠性试验中的成功次数大于 s_1^n 时，需继续试验；当试验中的成功次数小于等于 s_1^n 时，拒绝 H_0。s_1^n 列的"—"表示当试验中的成功次数小于 s_0^n 时，需继续试验；当试验中的成功次数大于等于 s_0^n 时，接受 H_0。从表 1 可以看出，两类风险的实际值都

小于给定的 $\alpha_{\pi_0}=\beta_{\pi_1}=0.10$，这进一步验证了本文所给出 A、B 的计算公式的正确性。

表 1　不同 n 和 A、B 下的 s_0^n 和 s_1^n 以及两类风险的实际值

n	$s_0^n(A=0.128\ 2)$	β_{π_1}(实际)	$s_1^n(B=0.198\ 0)$	α_{π_0}(实际)	$s_1^n(B=1)$	α_{π_0}(实际)
1	—	—	—		—	—
2	—	—	0	0.001 6	—	—
3	—	—	1	0.004 7	—	—
4	—	—	2	0.009 0	—	—
5	—	—	2	0.000 67	—	—
6	6	0.086 6	3	0.001 3	—	—
7	7	0.082 1	4	0.002 1	—	—
8	8	0.077 7	5	0.003 2	—	—
9	9	0.073 7	6	0.004 6	—	—
10	10	0.069 8	7	0.006 3	—	—
11	11	0.066 1	8	0.008 3	—	—
12	12	0.062 6	9	0.010 5	0	5.551×10^{-17}
13	13	0.059 3	10	0.013 1	1	6.883×10^{-16}
14	14	0.056 2	11	0.016 0	2	4.595×10^{-15}
15	15	0.053 3	12	0.019 1	3	2.191×10^{-14}

图 2 给出了 $n\leqslant50$ 条件下，$A=0.128\ 2$、$B=0.198\ 0$ 和 $B=1$ 时的 s_0^n 和 s_1^n。图 2 中，当 $s_0^n>n$ 时，表示对于此时的试验次数 n，不存在接受域，只能继续试验或者根据决策法则做出拒绝 H_0 的决策；当 $s_1^n=-1$ 时，表示对于此时的试验次数 n，不存在拒绝域，试验中只能继续试验或者根据决策法则做出采纳 H_0 的决策。



•: B=0.198 0;　∘: B=1;　+: A=0.128 2。

图 2　$n\leqslant50$ 时 s_0^n 和 s_1^n 的取值

进一步比较式(1)、式(2)、式(50)和式(51)决策常数 A、B 的计算公式，可见式(1)和式(50)、式(51)相比，由于没有考虑 $0<A<1<B$ 的约束条件，而在本例中 $B=0.198\ 0$，所以在试验中，若按照“$O_n\geqslant B=0.198\ 0$，终止试验，采纳 H_1”的决策规则进行决策时，就可能造成：若满足 $\dfrac{\int_0^{p_0}\pi(p\mid X)\mathrm{d}p}{\int_{p_1}^{1}\pi(p\mid X)\mathrm{d}p}\geqslant0.198\ 0$ 的试验结果 X 出现时，则得出采纳 H_1 的结论。也就是说，在试验中，若现场试验数据 X 使得 H_1 的验后概率 $P(H_1\mid X)$ 满足式(52)时，即可得出采纳 H_1 的结论。

$$P(H_1\mid X)=\int_0^{p_0}\pi(p\mid X)\mathrm{d}p\geqslant0.165\ 3\qquad(52)$$

在现场试验中，满足式(52)成立的 X 是肯定存在的，但满足上述条件时，并不能保证 H_1 成立的验后概率大于 H_0 成立的验后概率。如 $P(H_1|X)=0.165\ 3$ 时，H_0 成立的验后概率为 $1-P(H_1|X)=0.834\ 7$。此时根据序贯检验方法，接受了 H_1，但 H_0 成立的验后概率 0.834 7 仍是比较大的概率值，这是不能让生产方满意的。

相比式(2)决策常数的选择，从推导过程看，式(50)和式(51)的决策常数计算，考虑满足给定的两类风险 α_{π_0}、β_{π_1} 要求，使得假设检验中实际的决策风险最接近要求的两类风险的决策常数 A、B，而按照式(2)的计算，在本例中，$A=0.113\ 6$、$B=1.198\ 0$。可见 A 小于式(50)给出的 0.128 2，B 大于式(51)给出的 1，从而使得在实际的试验中，可导致实际两类风险减小，这是由式(15)和式(23)直接推导出来的，但两类风险减小，直接导致的结果是使进行决策的平均试验样本量增加，导致决策周期延长、试验消耗增加。

7　结束语

论文结合成败型产品可靠性试验的特点，对 Bayes 序贯试验方法中两类风险的计算以及决策常数 A、B 的选择方法进行论述。在两类风险的计算方面，分别讨论了经典的两类风险 $\alpha(p)$、$\beta(p)$，基于验前分布加权的平均风险 $\bar{\alpha}$、$\bar{\beta}$ 和 Bayes 序贯方法中两类风险 α_{π_0}、β_{π_1} 的计算公式，给出了 3 者之间的递推计算关系。在 Bayes 方法应用中，对现有两类风险选择中存在的问题，给出了风险选择的要求和解决方案，并进一步明确了决策常数 A、B 的计算公式。论文的研究对于序贯试验方法的进一步工程应用具有理论上的指导作用。

参考文献：

[1] Hamada M S, Alyson G W, Shane R C, et al. *Bayesian reliability*[M]. New York: Springer-Verlag, 2008.

[2] Hoff P D. *A first course in Bayesian statistical methods*[M]. New York: Springer, 2009.

[3] Koch K R. *Introduction to Bayesian statistics*[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.

[4] Thomas L, John S J H. *Bayesian methods*[M]. Beijing: China

Machine Press, 2006.

[5] Berger J O. *Statistical decision theory and Bayesian analysis*[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[6] Ghosh J K, Delampady M, Samanta T. *An introduction to Bayesian analysis*[M]. New York: Springer Verlag, 2006.

[7] Navid O, Thomas A D, Ali E, et al. A Bayesian experimental design approach for assessing new product performance: an application to disinfectant formulation[J]. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 2010, 88(1): 88-94.

[8] Yang G B. Reliability demonstration through degradation bogey testing[J]. *IEEE Trans. on Reliability and Maintainability*, 2009, 58(4): 604-610.

[9] Jiang M, Dummer D J. Bayesian reliability demonstration test in a design for reliability process[C]// *Proc. of the Annual Reliability and Maintainability Symposium*, 2009: 31-36.

[10] Fan T H, Chang C C. A Bayesian zero-failure reliability demonstration test of high quality electro-explosive devices[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2009, 25(8): 913-920.

[11] Ghosh B K. *Sequential tests of statistical hypotheses*[M]. London: Addison-Wesley, 1970.

[12] Wetherill G B, Glazebrook K D. *Sequential methods in statistics*[M]. London: Chapman and Hall, 1986.

[13] Ganesan R, Rao A N V, Das T K. A multiscale Bayesian SPRT approach for online process monitoring[J]. *IEEE Trans. on Semiconductor Manufacturing*, 2008, 21(3): 399-412.

[14] Li J, Shen L, Zhao L. Success ratio sequential test plan using development test data[C]// *Proc. of the International Conference on Reliabilitym Maintainability and Safety*, 2009: 370-373.

[15] Liu Q, An M. A posterior probability based sequential binomial test method for verification of success ratio P[J]. *World Journal of Engineering*, 2011, 8(4): 313-325.

[16] Peskir G, Shiryaev A N. Sequential testing problems for poisson processes[J]. *The Annals of Statistics*, 2000, 28(3): 837-859.

[17] 申绪涧，戚宗锋，汪连栋，等. 正态分布未知参数的联合序贯验后加权检验方法[J]. 系统工程与电子技术，2004, 26(6): 744-746.(Shen X J, QI Z F, Wang L D, et al. Sequential posterior odd test method of the unknown parameters in the normal distribution[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(6): 744-746.)

[18] Xing Y Y, Wu X Y. Bayesian sequential testing for exponential life system with reliability growth[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2011, 22(6): 1023-1029.

[19] Dandach S H, Carli R, Bullo F S. Accuracy and decision time for decentralized implementations of the sequential probability ratio test[C]// *Proc. of the American Control Conference*, 2010: 2390-2395.

[20] Hebert P, Burdick J. The minimum interval for confident spike sorting: a sequential decision method[C]// *Proc. of the Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2010: 4838-4851.

[21] 王国玉，申绪涧，汪连栋，等. 电子系统小子样试验理论方法[M]. 北京：国防工业出版社，2003.(Wang G Y, Shen X J, Wang L D, et al. *Small sample test theory and method of electronic system*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003.)

[22] Liu Q, Zhou J L, Jin G, et al. Bayesian sequential demonstration based on performance reliability for long life aerospace product[C]// *Proc. of the 2nd International Conference on Computer Modeling and Simulation*, 2010: 445-449.

[23] 黄秀平，周经伦，冯静. 装备部件平均修复时间的序贯验后加权检验方法[J]. 装备制造技术，2008(6): 1-3.(Huang X P, Zhou J L, Feng J. The sequential posterior odd test for the mean time to repair[J]. *Equipment Manufacturing Technology*, 2008(6):1-3.)

[24] Guo B, Jiang P, Xing Y Y. A censored sequential posterior odd test (SPOT) method for verification of the mean time to repair reliability[J]. *IEEE Trans. on Reliability*, 2008, 57(2): 243-247.

[25] Kulacsy K. Further comments on the sequential probability ratio testing methods[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 1997, 24(13): 1005-1012

[26] Ruggoo A, Vandebroek M. Model-sensitive sequential optimal design[J]. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2006, 51(2): 1089-1099.

[27] 张金槐，刘琦，冯静. Bayes 试验分析方法[M]. 长沙：国防科技大学出版社，2007.(Zhang J H, Liu Q, Feng J. *Bayes test analysis method*[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2007.)

[28] Gang L, Shao K R, Guo Y G, et al. Sequential optimization method for the design of electromagnetic device[J]. *IEEE Trans. on Magnetics*, 2008, 44(11): 3217-3220.

[29] Andrew G, John B C, Hal S S, et al. *Bayesian data analysis*[M]. New York: Chapman and Hall, 2003.

[30] Miller I, Miller M. *Mathematical statistics with applications*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.

[31] 武小悦，刘琦. 装备试验与评价[M]. 北京：国防工业出版社，2008.(Wu X Y, Liu Q. *Military equipment test and evaluation*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008.)

[32] Bolstad W M. *Bayesian statistics*[M]. New York: Wiley & Son, 2004.

作者简介：

刘　琦(1974-)，男，副教授，博士，主要研究方向为系统评价与决策分析。

E-mail: liuqigfkd@yahoo.com.cn

冯文哲(1984-)，男，硕士，主要研究方向为系统评价与决策分析。

E-mail: fengwenzhe0506@163.com

王　囡(1988-)，女，硕士研究生，主要研究方向为系统评价与决策分析。

E-mail: hualuohefang@gmail.com