2009 年太原科技大学硕士研究生入学考试

（631）数学分析 试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 $f'(x^2)=\dfrac{1}{x}\,(x>0)$, 则 $f(x)=$______

2、幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n^p}(0<p\le 1)$ 的收敛域为__________

3、设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，则 $div(gradu)=$________

4、曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点 $(3,1,1)$ 处的切平面方程为_______

5、设椭圆 L：$x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的周长为 A，则 $\oint_L(xy+9x^2+y^2)ds=$______

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

1、设 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)dxdydz$, 其中 Ω 为空间区域 $x^2+y^2\le z^2\le t^2$, $f(t)$ 为连续函数.求 $F''(t)$.

2、计算曲面积分：

$$\iint\limits_{\Sigma}[(f(x,y,z)+x]dydz+[2(f(x,y,z)+y]dzdx+[(f(x,y,z)+z]dxdy,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限的上侧。

3、将 $f(x)=x^2(0\le x\le\pi)$ 展成余弦级数，并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

三、证明题（共 100 分）

1、（本题满分 15 分）设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 对 $\forall x \in [a,b], f(x) \le g(x)$, 且存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$, 证明：$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$ 。

2、（本题满分 15 分）证明：$\{x_n\}$ 为有界数列的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 的任一子列都存在其收敛子列。

3、（本题满分 15 分）证明：当 $x > 0$ 时有不等式

$$\left| \int_x^{x+c} \sin t^2 dt \right| < \frac{1}{x} \quad (\text{其中 } c > 0)$$

4、（本题满分 20 分）证明：

（1）若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且存在极限 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$，则 A=0.

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛，则

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

5、（本题满分 20 分）证明：函数列

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, n = 1,2,\cdots$$

在闭区间[0，1]上收敛而不一致收敛，但

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 [\lim_{n \to \infty} f_n(x)]dx$$

6、（本题满分 15 分）证明：在点 $(0,0)$ 连续的函数

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

在点 $(0,0)$ 的偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 存在，但在点 $(0,0)$ 不可微。