2010年太原科技大学硕士研究生入学考试

（641）数学分析试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一、填空题（每小题4分，共20分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}=$______

2、幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$的收敛域为__________

3、曲线$y=\dfrac{x^2}{2x+1}$的斜渐近线方程为________

4、设$x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\le x\le\pi)$,则$a_2=$______

5、设数列$\{a_n\}$收敛于a，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=$________

二、计算题（每小题10分，共30分）

1、求函数$z=\arctan\dfrac{y}{x}$在位于圆$x^2+y^2-2x=0$上点$P_0(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\sqrt{3})$处沿这圆顺时针切线方向的方向导数$\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_{P_0}$.

2、求$I=\int_L[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy$，其中$a,b$为正常数，L为从点$A(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$到点$O(0,0)$的弧。

3、计算曲面$(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2})^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$所围立体的体积。

三、证明题（共 100 分）

1、（本题满分 20 分）设 $u_n(x)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2), n=1,2,\cdots$

证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，并讨论其和函数在 $[0,1]$ 上的连续性、可积性与可微性。

2、（本题满分 20 分）设 $f(x)$ 是连续函数，

（1）利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

（2）当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数

$$G(x)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$$

也是以 2 为周期的周期函数。

3、（本题满分 15 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得: $f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(b)+f'(a)]-\frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$

4、（本题满分 15 分）若数列 $\{x_n\}$ 无界，但非无穷大量，证明必存在两个子列 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 与 $\{x_{n_k^{(2)}}\}$，其中 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大量，$\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是收敛数列。

5、（本题满分 15 分）设 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，且 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内能取到最小值。

6、（本题满分 15 分）函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，则 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续的充分必要条件是：对任意数列 $\{x_n'\}$、$\{x_n''\}$（$\{x_n'\}\subset X,\{x_n''\}\subset X$），只要满足 $\lim_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，就成立 $\lim_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$。