文章编号:1001-506X(2010)11-2332-04

基于移位算子方法的通用介质 CFS-PML 实现

张玉强[1,2]，葛德彪[1]
(1. 西安电子科技大学理学院，陕西 西安 710071；
2. 延安大学物理与电子信息学院，陕西 延安 716000)

摘　要：针对通用色散介质时域有限差分方法计算时完全匹配层吸收边界截断的问题，提出了一种新颖的复频率完全匹配层实现方法。该方法从拉伸坐标系的麦克斯韦旋度方程出发，首先利用移位算子方法得到拉伸坐标张量系数的移位算子表示式，进而得到完全匹配层的时域有限差分更新公式。该公式与计算区域内的介质无关，可用于通用介质情况。数值计算结果表明，所得吸收边界在内存占用、计算时间、应用场合等方面均表现出色，且推导简单，概念明确。

关键词：色散介质；时域有限差分方法；移位算子；复频率参数完全匹配层
中图分类号：TN 011　　**文献标志码**：A　　**DOI**:10.3969/j.issn.1001-506X.2010.11.17

Shift operator scheme applied to CFS-PML for general medium

ZHANG Yu-qiang[1,2], GE De-biao[1]
(*1. School of Sciences, Xidian Univ., Xi'an 710071, China;*
2. Coll. of Physics and Electronic Information, Yan'an Univ., Yan'an 716000, China)

Abstract: A novel implementation of shift operator to complex frequency shifted perfectly matched layer (CFS-PML) is presented for the truncation of finite-difference time-domain lattices. The CFS-PML formulation based on stretched coordinate Maxwell curl equations is deduced and combined with the shifted operator method, which is referred to as SO-PML that is completely independent of the host medium and may be applied to general medium. Computation examples demonstrate its efficiency and feasibility. In addition, the proposed SO-PML is easily understood in concept and implemented in programming.

Keywords: dispersive media; finite difference time domain (FDTD) method; shift operator; complex frequency shift-perfectly matched layer (CFS-PML)

0　引　言

完全匹配层(perfectly matched layer, PML)吸收介质被公认是一种稳定的、有效的截断时域有限差分(finite difference time domain, FDTD)区域的技术，并在 FDTD 计算中得到了广泛的应用。然而，分裂 PML、各向异性 PML 等在吸收倏逝波、晚时反射以及低频作用时却会出现有较大的反射误差[1-2]。1996 年，在 Chew 等提出的 Berenger PML 拉伸坐标系公式的基础上，Kuzuoglu 和 Mittra 提出复频率参数(complex frequency shifted, CFS)张量系数，通过把张量系数的极点移到复平面上半平面巧妙地解决了 PML 的低频反射等问题。同时，由于张量系数独立于计算区域介质参数，也为实现适用于通用介质的 FDTD 吸收边界技术提供可能[3-4]。随后，Gedney 基于辅助差分方程(auxiliary differential equation, ADE)，Roden 和 Gedney 基于递推卷积(recursive convolution, RC)技术，Li 等基于 Z 变换，分别都实现了 CFS-PML[5-8]。与 ADE、RC 等方法一样，移位算子(shift operator, SO)方法[8]是由葛德彪等人在 2003 年提出的一种处理色散介质电磁问题 FDTD 计算新方法，该方法先利用算子$\partial/\partial t$代替介电系数频域表达式中的 $j\omega$，然后再利用离散时域移位算子代替微分算子，进而导出相应的离散时域关系，使色散介质 FDTD 计算问题得到有效解决。与 ADE、RC 等方法不同的是，SO 方法具有概念简明、推导简单的特点[9-13]。

本文从拉伸坐标系形式的麦克斯韦旋度方程出发，利用 SO 方法推导了一个新的 CFS-PML 公式，在这里被称为 SO-PML，并结合分段线性递归卷积(piecewise linear, RC) PLRC 方法对等离子体目标的电磁散射进行了分析。数值

收稿日期:2009-03-23；**修回日期**:2009-05-20。
基金项目:国家自然科学基金(60871071)资助课题
作者简介:张玉强(1970-)，男，副教授，博士研究生，主要研究方向为电磁散射与逆散射、计算电磁学。E-mail:ya_zyq@yahoo.com.cn

计算表明,该实现在计算时间、内存占用、反射误差等方面不低于卷积 PML(convolution PML, CPML),但推导简单,不需要计算递归卷积。

1　SO 的定义

SO 是一种从时间导数过渡到时域离散形式的变换。设函数

$$y(t) = \partial f(t)/\partial t \tag{1}$$

在$(n+1/2)\Delta t$ 的中心差分近似为

$$(y^{n+1} + y^{n})/2 = (f^{n+1} - f^{n})/\Delta t \tag{2}$$

式中,左端取平均值近似。引进离散时域的移位算子 z_t,定义为

$$z_t f^n = f^{n+1} \tag{3}$$

亦即 SO 的作用相当于使离散时域序列的 n 时刻值移位到函数在 $n+1$ 时刻的值。合并式(2)、式(3)可得

$$y^n = (2/\Delta t)[(z_t - 1)/(z_t + 1)]f^n \tag{4}$$

比较式(1)和式(4)有

$$\partial/\partial t \rightarrow (2/\Delta t)[(z_t - 1)/(z_t + 1)] \tag{5}$$

该式给出了时间导数算子过渡到离散时域时的移位算子表示式,并且可以证明[13],高阶时间导数过渡到离散时域时的移位算子表示式为

$$(\partial/\partial t)^n \rightarrow \{(2/\Delta t)[(z_t - 1)/(z_t + 1)]\}^n \tag{6}$$

2　基于 SO 的 CFS-PML 公式

对于拉伸坐标系,麦克斯韦方程的两个旋度方程频域形式可以表示为

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial D_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial D_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial D_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s_y}\dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{1}{s_z}\dfrac{\partial H_y}{\partial z} \\ \dfrac{1}{s_z}\dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{1}{s_x}\dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ \dfrac{1}{s_x}\dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{1}{s_y}\dfrac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$-\begin{pmatrix} \dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s_y}\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{1}{s_z}\dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{1}{s_z}\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{1}{s_x}\dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{1}{s_x}\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{1}{s_y}\dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{8}$$

式中

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r(\omega)\boldsymbol{H} \tag{9}$$

在 CFS-PML 方案中

$$s_w = \kappa_w + \frac{\sigma_w}{\alpha_w + \mathrm{j}\omega\varepsilon_0},\ w = x, y, z \tag{10}$$

由式(7)和式(8)可见,PML 介质中的参数全部位于等号的右边,反映计算区域内介质本构关系的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 位于等号的左边,即 PML 与计算区域内介质无关。由式(10)可得,式(7)和式(8)中算子 $T_w = 1/s_w$ 在频域可表示为

$$T_w(\omega) = \frac{1}{s_w} = \frac{\alpha_w + \mathrm{j}\omega\varepsilon_0}{\kappa_w\alpha_w + \sigma_w + \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\kappa_w} \tag{11}$$

将式(11)代入式(7)和式(8)即可得到基于 CFS-PML 的拉伸坐标系麦克斯韦旋度方程的频域形式。然后,先利用频域到时域转换关系 $\mathrm{j}\omega \rightarrow \partial/\partial t$,把式(7)和式(8)的右边转换为对时间的导数形式,再利用式(5)所示时间微分算子到离散时域移位算子转换关系 $\dfrac{\partial}{\partial t} \rightarrow \dfrac{2}{\Delta t}\dfrac{z_t - 1}{z_t + 1}$ 进行变换,进一步可将式(7)和式(8)右端表示为时域离散移位算子表示的 T_w 与磁场 $\boldsymbol{H}$、电场 $\boldsymbol{E}$ 各分量对空间坐标 x、y、z 导数的乘积形式。其中

$$T_w = \frac{(\alpha_w\Delta t + 2\varepsilon_0)z_t + (\alpha_w\Delta t - 2\varepsilon_0)}{(\kappa_w\alpha_w\Delta t + 2\varepsilon_0\kappa_w + \Delta t\sigma_w)z_t + (\kappa_w\alpha_w\Delta t - 2\varepsilon_0\kappa_w + \Delta t\sigma_w)}$$
$$w = x, y, z \tag{12}$$

为式(11)对应的时域离散移位算子表示式。将式(7)和式(8)进行整理,可得时域离散移位算子表示的 PML 的 FDTD 更新方程,再根据式(3)即可得用于 PML 的 FDTD 更新方程。为讨论简单,以式(7)中的 x 分量为例,设

$$F_{zy}(\omega) = \frac{1}{s_y}\frac{\partial H_z}{\partial y},\ F_{yz}(\omega) = \frac{1}{s_z}\frac{\partial H_y}{\partial z} \tag{13}$$

把式(12)和式(3)代入式(13),并整理可得

$$F_{zy}^{n+1/2} = C_{zy,0}F_{zy}^{n-1/2} + C_{zy,1}\frac{\partial H_z^{n+1/2}}{\partial y} + C_{zy,2}\frac{\partial H_z^{n-1/2}}{\partial y} \tag{14}$$

$$F_{yz}^{n+1/2} = C_{yz,0}F_{yz}^{n-1/2} + C_{yz,1}\frac{\partial H_y^{n+1/2}}{\partial z} + C_{yz,2}\frac{\partial H_y^{n-1/2}}{\partial z} \tag{15}$$

式中

$$\begin{cases} C_{zy,0} = -\dfrac{\kappa_y\alpha_y\Delta t - 2\varepsilon_0\kappa_y + \sigma_y\Delta t}{\kappa_y\alpha_y\Delta t + 2\varepsilon_0\kappa_y + \sigma_y\Delta t} \\ C_{zy,1} = \dfrac{\alpha_y\Delta t + 2\varepsilon_0}{\kappa_y\alpha_y\Delta t + 2\varepsilon_0\kappa_y + \sigma_y\Delta t} \\ C_{zy,2} = \dfrac{\alpha_y\Delta t - 2\varepsilon_0}{\kappa_y\alpha_y\Delta t + 2\varepsilon_0\kappa_y + \sigma_y\Delta t} \end{cases} \tag{16}$$

式中,$C_{yz,0}$、$C_{yz,1}$、$C_{yz,2}$ 与式(16)中的 $C_{zy,0}$、$C_{zy,1}$、$C_{zy,2}$ 形式完全相同,只需把 κ_y、α_y 和 σ_y 相应地换为 κ_z、α_z 和 σ_z 即可。这样,只要已知 $F_{zy}^{n-1/2}$、$H_z^{n+1/2}$、$H_z^{n-1/2}$ 和 $F_{yz}^{n-1/2}$、$H_y^{n+1/2}$、$H_y^{n-1/2}$,即可求得 $F_{zy}^{n+1/2}$ 和 $F_{yz}^{n+1/2}$,从而可得 $\partial D_x/\partial t$,此时所需存储的辅助量为 4 个。为了尽可能地减少内存需求,进一步引入 ψ_{zy} 和 ψ_{yz},并令

$$\begin{cases} \psi_{zy}^{n-1/2} = C_{zy,0}F_{zy}^{n-1/2} + C_{zy,2}\dfrac{\partial H_z^{n-1/2}}{\partial y} \\ \psi_{yz}^{n-1/2} = C_{yz,0}F_{yz}^{n-1/2} + C_{yz,2}\dfrac{\partial H_y^{n-1/2}}{\partial z} \end{cases} \tag{17}$$

将式(17)代入式(14)、式(15),最后可得

$$\frac{\partial D_x^{n+1}}{\partial t} = C_{zy,1}\frac{\partial H_z^{n+1/2}}{\partial y} - C_{yz,1}\frac{\partial H_y^{n+1/2}}{\partial z} + \psi_{zy}^{n-1/2} - \psi_{yz}^{n-1/2} \tag{18}$$

式中

$$\begin{cases} \psi_{zy}^{n+1/2} = C_{zy,0}\,\psi_{zy}^{n-1/2} + (C_{zy,0}C_{zy,1} + C_{zy,2})\dfrac{\partial H_z^{n+1/2}}{\partial y} \\ \psi_{yz}^{n+1/2} = C_{yz,0}\,\psi_{yz}^{n-1/2} + (C_{yz,0}C_{yz,1} + C_{yz,2})\dfrac{\partial H_y^{n+1/2}}{\partial z} \end{cases} \tag{19}$$

这样使得在计算 D_x 时只增加 2 个额外的存储单元。

式(7)和式(8)中其他分量的更新方程同理可得。将式(18)和式(19)与对应的 CPML 表达式[2] 比较可见,二者在内存占用和运算量上是相同的。

当 SO-PML 与色散介质的 PLRC 方法结合应用时,由于 FDTD 计算域的介质电磁特性只被包含在式(9)中,即式(18)的左端,与式(18)右端无关。因此,只需要把色散介质的 PLRC 公式应用到式(18)的左端,然后进行整理即可。当 FDTD 计算域的介质电磁特性不同时,只需修改 $\boldsymbol{D}\to\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{H}$ 的公式,右端无需修改,因此 SO-PML 可用于通用介质截断。

3 数值算例

作为吸收边界吸收效果检验,考虑三维空间中的电偶极子辐射。设垂直电偶极子位于计算区域中心 $E_z(0,1,1/2)$ 处,FDTD 计算区域为 24×24×24 个元胞,元胞尺寸为 1 cm×1 cm×1cm,且 $\delta=2c\Delta t$,辐射源采用高斯脉冲

$$p(t)=10^{-10}\exp\left[-\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2\right] \tag{20}$$

式中,$t_0=3T$,$T=30\Delta t$。为了衡量吸收边界的品质,记录距离辐射源 10δ 处的 Q 点 $E_z(0,10,1/2)$,并定义观察点 Q 处的相对反射误差

$$Error=20\lg\frac{|E_z(t)-E_{z,\mathrm{ref}}(t)|}{|E_{z,\mathrm{ref_max}}|} \tag{21}$$

式中,$E_{z,\mathrm{ref}}(t)$ 是观察点场的参考解,可通过保持其他条件不变,仅扩大计算区域,使得在所考虑时间范围内边界反射不能到达观察点 Q 情况下,计算观察点场 $E_z(0,10,1/2)$ 得到。$E_{z,\mathrm{ref_max}}$ 是 $E_{z,\mathrm{ref}}(t)$ 的最大值。张量系数中的 κ_w、σ_w 和 α_w 按多项式分级取值[2],且

$$\sigma_{\mathrm{opt}}=\frac{m+1}{150\pi\sqrt{\varepsilon_r}\delta} \tag{22}$$

设计算区域四周被 4 层 PML 包围,计算得到观察点 Q 处的电场 E_z 如图 1 所示。作为对比,同时给出 Mie 级数解,由图 1 可见,二者符合很好。然后,取计算区域分别被 4 层~10 层 PML 包围(其中,4 层、6 层、10 层时 PML 参数如表 1 所示),计算得到观察点 Q 处的吸收边界相对反射误差随 PML 层数变化情况如图 2 所示,同时得到计算时间随 PML 层数变化情况如图 3 所示。作为比较,给出了采用 CPML 吸收层时的结果。由图可见,SO-PML 吸收边界的误差、计算时间与 CPML 相当。

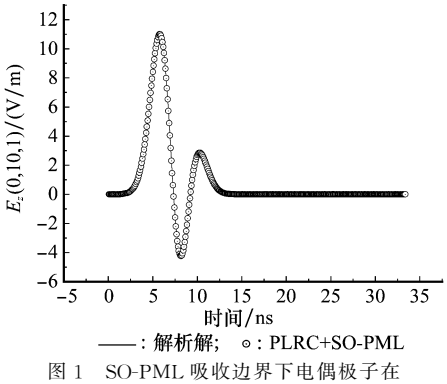

图 1 SO-PML 吸收边界下电偶极子在 Q 点的时域辐射场(4 层 PML)

表 1 PML 层的参数

层数	$\kappa_{\max}$	$\alpha_{\max}$	$\sigma_{\max}/\sigma_{\mathrm{opt}}$	m	m_a
4	5	0.08	1.4	4.0	4
6	5	0.08	1.3	3.6	4
10	5	0.08	1.0	4.0	4

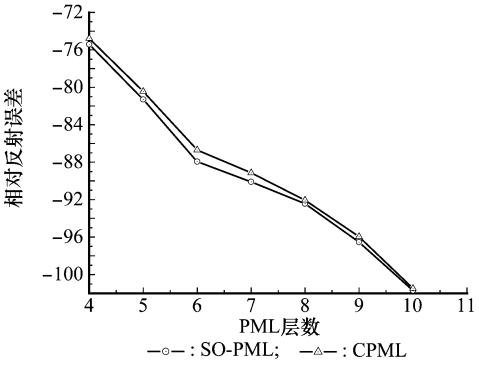

图 2 最大相对误差随 PML 层数的变化

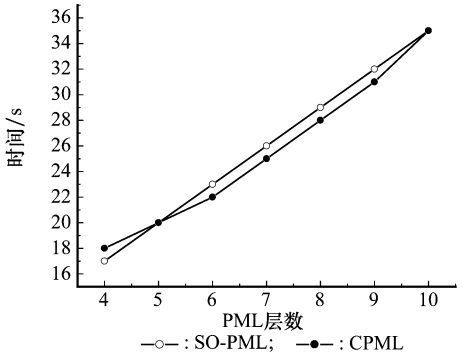

图 3 计算时间随 PML 层数的变化

作为应用,结合 PLRC 方法还分别计算了金属球和等离子体球的后向散射雷达散射截面积(radar cross section, RCS)。其中,金属球半径为 1 m,元胞尺度 $\delta=0.05$ m,$\Delta t=\delta/2c$,目标区域为 $40\times40\times40\delta^3$。等离子体球半径 $r=3.75\times10^{-3}$ m,元胞尺度 $\delta=5.0\times10^{-5}$ m,$\Delta t=\delta/2c$。等离子体频率 $\omega_p=2\pi\times28.7\times10^9\ \mathrm{s}^{-1}$,电子碰撞频率 $\nu_c=2.0\times10^{10}$ Hz。入射波均采用高斯脉冲,脉冲宽度分别为 $\tau=30\Delta t$ 和 $\tau=60\Delta t$。计算结果如图 4 和图 5 所示。由图可见,SO-PML 计算结果与 Mie 级数解以及 CPML 的结果符合很好。

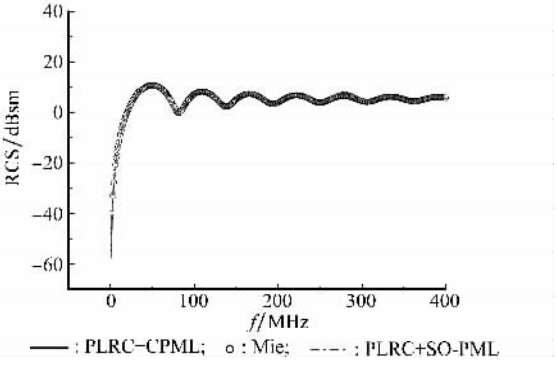

图 4 金属球后向散射 RCS

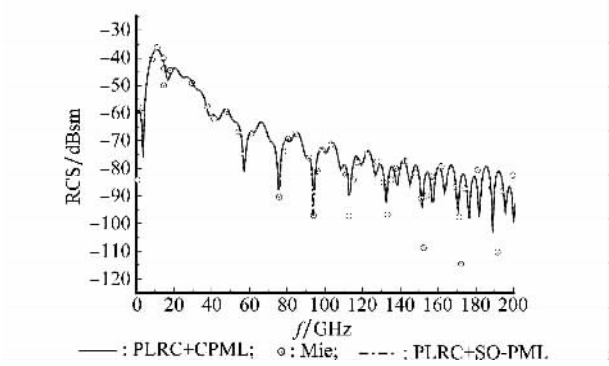

图 5　等离子体球的后向散射 RCS

4　结　论

本文从拉伸坐标系下的麦克斯韦旋度方程出发,首先利用利用移位算子方法导出拉伸坐标系中拉伸因子的时域离散 SO 表达式,然后代入麦克斯韦旋度方程得到了在 CFS-PML 的区域的 FDTD 更新方程,并通过算例验证了此方法的可行性。数值计算表明,该实现在计算时间、内存占用、反射误差等方面不低于 CPML,但推导简单,概念明确。

参考文献:

[1] Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994,114(2):185 -200.

[2] Taflove A, Hagness S C. *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method* [M]. Norwood, MA: Artech House, 2005.

[3] Chew W C, Weedon W H. A 3-D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates [J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 1994,7(13):599 -603.

[4] Kuzuoglu M, Mittra R. Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers[J]. *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, 1996,6(12):447 - 449.

[5] Li J X, Dai J F. Z-transform implementations of CFS-PML[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2006,5(1): 410 -413.

[6] Roden J A, Gedney S D. Convolutional PML (CPML): an efficient FDTD implementation of CFS-PML for arbitrary media [J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2000,27(12):334 - 339.

[7] Ramadan O. Auxiliary differential equation formulation: an efficient implementation of the perfectly matched layer[J]. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 2003, 13 (2): 69 -71.

[8] 葛德彪, 吴跃丽, 朱湘琴. 等离子体散射 FDTD 分析的移位算子方法[J]. 电波科学学报, 2003,18(4):359 - 362.

[9] 葛德彪,闫玉波. 电磁波时域有限差分方法[M]. 2 版. 西安:西安电子科技大学出版社, 2005.

[10] 王茂琰,徐军,魏兵,等. 基于移位算子法高斯波束与双负介质板相互作用的 FDTD 分析[J]. 微波学报,2008,24(1):10 - 13.

[11] 杨宏伟,袁洪,陈如山,等. 各向异性磁化等离子体的 SO-FDTD 算法[J]. 物理学报,2007,56(3):1443 - 1446.

[12] 杨宏伟,陈如山,张云, 等. 离子体的 SO-FDTD 算法和对电磁波反射系数的计算分析[J]. 物理学报, 2006, 55 (7): 3464 -3469.

[13] 魏兵,葛德彪,王飞. 一种处理色散介质问题的通用 FDTD 方法[J]. 物理学报, 2008,57(10):252 - 259.

[14] Dong X T, Yin W Y, Gain Y B. Perfectly matched layer implementation using bilinear transform for microwave device applications[J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 2005, 53 (10):3098 - 3105.

[15] Wang Y, Yuan N C. Perfectly matched layer implementation for ADI-FDTD in dispersive media[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2006,17(1):80 - 84.

[16] Liu S, Zhong S Y, Liu S B. Piecewise linear recursive convolution FDTD method for magnetized plasmas[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*,2006,17(2):290 - 295.

[17] 葛德彪,杨利霞. 各向异性介质 FDTD 分析及其并行计算[J]. 系统工程与电子技术, 2006,28(4):483 - 485. (Ge D B, Yang L X. FDTD applied to anisotropic medium and its para-llel computing [J]. *Systems Engineering and Electronics*,2006,28 (4):483 - 485.)