第16卷 第4期 1995年 7月
航 空 学 报
ACTA AERONAUTICA ET ASTRONAUTICA SINICA
Vol. 16 No. 4 July 1995

关于区间系统的鲁棒严格正实性设计

贾英民 高为炳
(北京航空航天大学第七研究室，北京，100083)

ROBUST STRICT POSITIVE REALNESS DESIGN OF INTERVAL SYSTEMS

Jia Yingmin, Gao Weibing
(7th Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing, 100083)

摘 要 主要研究了区间系统的鲁棒严格正实设计问题。给出了系统严格正实镇定的充分条件，分析了该条件的易计算性并获得了一类区间分母系统采用一阶控制器时鲁棒严格正实镇定的顶点结果。使得控制器的设计程序大为简化。

关键词 鲁棒性，区间系统，系统设计
中图分类号 V249.1,21

Abstract The robust strict positive realness design of interval systems is studied. A sufficient condition for strict positive realness stabilization is first given, then the computability of the condition is analyzed and the extreme point results for robust strict positive realness stabilization of a class of interval denominator systems with first order controllers are derived. Thus the controller design procedure may be greatly simplified.

Key words robustness, interval systems, system design

有理函数或矩阵的严格正实性在鲁棒控制、自适应控制以及网络理论中有着广泛的应用。例如，一个严格正实的标称传函可容许较大的无源不确定性且保持系统的稳定性。由此表明判定一个给定传函严格正实的重要性。但是，在系统综合中人们更期望的是如何设计一个严格正实的系统[1, 2]。

本文研究的鲁棒严格正实设计问题是作者在文献[3]中首次提出的，意义是指对一不确定系统考虑何时存在，进而设计一单一控制器，不仅使得单位反馈下的闭环系统是稳定的，而且也能保证闭环传函是严格正实的。本文没有象文献[3~5]那样考虑较一般形式的不确定性描述，而是受Kharitonov定理[6]的启发，研究了一类区间分母系统鲁棒严格正实设计问题的Kharitonov型顶点结果。应该指出：虽然区间系统鲁棒严格正实设计的顶点结果还未见研究，但是区间系统鲁棒严格正实的判断结果已在文献[7]中完整地给出。

1 定义与引理

1993年6月14日收到，1994年6月10日收到修改稿
国家自然科学基金与中国博士后科学基金资助课题

一个实区间多项式定义为

$$F_D(s)=\left\{D_0+D_1s+D_2s^2+\cdots+D_ns^n,\ D_i\in[x_i,y_i],\ i=0,1,2,\cdots,n\right\} \qquad (1)$$

令 $D^{odd}(s)$ 和 $D^{even}(s)$ 分别表示 $D(s)$ 的奇部和偶部, 则对任何 $D(s)\in F_D(s)$ 和 $\omega\in(0,\infty)$ 有

$$K_{min}^{even}(j\omega)\le D^{even}(j\omega)\le K_{max}^{even}(j\omega);\ K_{min}^{odd}(j\omega)/j\omega\le D^{odd}(j\omega)/j\omega\le K_{max}^{odd}(j\omega)/j\omega \qquad (2)$$

其中

$$K_{min}^{even}(s)=x_0+y_2s^2+x_4s^4+y_6s^6+x_8s^8+\cdots;$$
$$K_{max}^{even}(s)=y_0+x_2s^2+y_4s^4+x_6s^6+y_8s^8+\cdots;$$
$$K_{min}^{odd}(s)=x_1s+y_3s^3+x_5s^5+y_7s^7+x_9s^9+\cdots;$$
$$K_{max}^{odd}(s)=y_1s+x_3s^3+y_5s^5+x_7s^7+y_9s^9+\cdots。$$

分别以 $K_{min}^{even}(s)$, $K_{max}^{even}(s)$ 作为偶部, $K_{min}^{odd}(s)$, $K_{max}^{odd}(s)$ 作为奇部构成的 4 个多项式, 即为 $F_D(s)$ 的 Kharitonov 顶点多项式。著名的 Kharitonov 定理[6]指出 $F_D(s)$ 稳定的充要条件是它的 4 个顶点多项式稳定。

一个区间有理函数定义为

$$P=\{p(s)=a(s)/b(s),\ a(s)\in F_a(s),\ b(s)\in F_b(s)\} \qquad (3)$$

其中 $F_a(s)$ 和 $F_b(s)$ 都为形如式(1) 的区间多项式。如记 K_a^i, K_b^i, $i=1,2,3,4$, 分别为与 $F_a(s)$ 和 $F_b(s)$ 对应的 Kharitonov 顶点多项式, 那么每一区间有理函数 P 对应 16 个 Kharitonov 顶点函数 $K_P^{ij}=K_a^i/K_b^j$, $i,j=1,2,3,4$。特别, 当区间有理函数的分子为一固定的多项式 $a(s)$ 时, 便称为区间分母有理函数并记为 P_d。同时与之相应的 Kharitonov 顶点函数则变为 4 个 $K_P^i=a(s)/K_b^i$, $i=1,2,3,4$。有关区间分母系统的鲁棒稳定性研究可参见文献 [8]。类似地, 可定义区间分子有理函数和它的顶点函数。

定义 1[9] 有理函数 $p(s)$ 称为严格正实的是指它满足: ① 当 s 是实数时, $p(s)$ 也是实的; ② $p(s)$ 在闭的右半平面 $\mathrm{Re}(s)\ge 0$ 内没有极点, 即 $p(s)$ 是稳定的; ③ $\mathrm{Re}\,p(j\omega)>0$, $\omega\in R$。

引理 1[7] 正则稳定的实有理函数 $p(s)=n(s)/d(s)$ 为严格正实的当且仅当: ① $\mathrm{Re}\,p(0)>0$; ② $n(s)$ 是稳定的; ③ 对所有 $\alpha\in R$, $d(s)+j\alpha n(s)$ 是稳定的。[1]

引理 2[10] 设 $p(s)=n(s)/d(s)$ 是一个稳定的正则有理函数(实的或复的), 其阶数为 n, 那么 $\|p(s)\|_\infty<1$ 的充分必要条件为: ① $|a_n|<|b_n|$, 其中 a_n 和 b_n 分别为 $p(s)$ 分子分母的首次系数; ② $d(s)+e^{j\theta}n(s)$, $\theta\in[0,2\pi)$ 是稳定的。

引理 3[11] 设 $f(s)$ 为 n 阶正系数稳定多项式, $fc(s)$ 为 nc 阶实多项式, 如果 ① $nc\le n+1$; ② 当 $nc=n+1$ 时 $fc(s)$ 的首项系数为正, 则一定存在 $\varepsilon^*>0$, 使得对任何 $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*)$ 都有 $f_\varepsilon(s)=f(s)+\varepsilon fc(s)$ 是稳定的正系数多项式。

2 严格正实函数的充分条件

[1] 引理 1 表明为了判定一稳定的有理函数的严格正实性, 必须判定无穷多个复多项式的稳定性。因目前没有可方便利用的复系数多项式稳定性判别准则, 直接应用是困难的。

对文献[12]关于一簇圆盘多项式的稳定性结果作一个更精细的刻画并给出一个严格正实函数的充分条件。这对获得鲁棒严格正实镇定的顶点结果起着重要的启发性作用。

考虑一簇圆盘多项式为

$$D=\left\{D(s)=D_0+D_1s+D_2s^2+\cdots+D_ns^n,\ D_i\in D_i,\ i=0,1,2,\cdots,n\right\} \tag{4}$$

其中，D_i 为复平面上中心在 B_i 半径为 C_i 的圆盘。显然, D 中包含 3 个特殊的多项式。

$$B(s)=B_0+B_1s+\cdots+B_{n-1}s^{n-1}+B_ns^n;$$
$$C_1(s)=C_0-jC_1s-C_2s^2+jC_3s^3+C_4s^4+\cdots;$$
$$C_2(s)=C_0+jC_1s-C_2s^2-jC_3s^3+C_4s^4+\cdots;$$

特别 $B(s)$ 称为圆心多项式。记 ∂D_i 表示 D_i 的圆周, 可得带心圆周多项式

$$D_c=\left\{D(s)=D_0+D_1s+D_2s^2+\cdots+D_ns^n,\quad D_i\in\partial D_i;\ B(s)\right\} \tag{5}$$

在下面的讨论中, 不失一般性设 $0\notin D_n$。

引理 4[12]　多项式簇(4)稳定的充要条件是: ① $B(s)$ 稳定; ② $\|C_i(s)/B(s)\|_\infty<1,\ i=1,2$。

定理 1　多项式簇(4)稳定当且仅当多项式簇(5)稳定。

证明: 类似于文献[12], 这里首先证明多项式簇(5)稳定的充要条件是: ① $B(s)$ 稳定; ② $\left\|\left(\sum_{i=0}^{n}C_ie^{j\theta_i}s^i\right)/B(s)\right\|_\infty<1,\ \theta_i\in[0,2\pi),\ i=0,1,2,\cdots,n$。

显然, 条件①和②的充分性可直接从 Rouché 定理获得。由于 $B(s)$ 含在簇(5)中, 所以①的必要性自然满足。注意到 $0\notin D_n$, 则有 $|C_n/B_n|<1$。假设②不成立, 则必存在 $\bar\theta_i\in[0,2\pi),\ i=0,1,\cdots,n$ 使得 $\left\|\left(\sum_{i=0}^{n}C_i\exp(j\bar\theta_i)s^i\right)/B(s)\right\|_\infty\geq 1$。令 $d(s)=B(s)$, $n(s)=\sum_{i=0}^{n}C_i\exp(j\bar\theta_i)s^i$ 则由引理 2 知存在 $\theta^*\in[0,2\pi)$ 使得, $B(s)+\exp(j\theta^*)\sum_{i=0}^{n}C_i\exp(j\bar\theta_i)s^i$ 是不稳定的。记 $\theta_i=\theta^*+\bar\theta_i$ 知 $B(s)+\sum_{i=0}^{n}C_i\exp(j\theta_i)s^i$ 在簇(5)的圆周上, 与簇(5)的稳定性矛盾。②的必要性得证。

在条件②的表达式中取 $\theta_i=-i\pi/2,\ i=0,1,\cdots,n$ 时, 得 $\left(\sum_{i=0}^{n}C_i\exp(j\theta_i)s^i\right)/B(s)=C_1(s)/B(s)$, 取 $\theta_i=i\pi/2,\ i=0,1,\cdots,n$ 时, 得 $\left(\sum_{i=0}^{n}C_i\exp(j\theta_i)s^i\right)/B(s)=C_2(s)/B(s)$。并注意到 i 较大时, $-i\pi/2$ 和 $i\pi/2$ 可以模 2π 取值, 因此由条件②可以推出引理 4 的条件②。又因条件①和引理 4 中的条件①是相同的, 这表明由条件①和②能推出引理 4 条件①和②。即簇(5)的稳定性可保证簇(4)的稳定性。注意到簇(5)是簇(4)的子集, 证明完成。[1]。

定理 2　设 $p(s)=n(s)/d(s)$ 是一个正则稳定的实有理函数且满足 $d(s)+n(s)$ 是稳定的, 那么 $p(s)$ 为严格正实的充分条件是: ① $\mathrm{Re}\,p(0)>0$; ② $n(s)$ 是稳定的; ③ ‖

[1] 从定理 1 和引理 4 可知圆周多项式簇(5)的稳定性可用引理 4 的范数条件来表示, 而引理 2 则是将范数条件化为系数在圆周上等位置取值时的稳定性条件。这样可将引理 1 关于严格正实的结果借助于模值或范数表示出来。

(d(j X)- n(j X)) / (d(j X) + n(j X)) | < 1, X I R 。

进一步, 如果 deg d(s) = deg n(s), 那么条件 » 可换为 »c +(d(s) - n(s)) / (d(s) + n(s)) +] < 1, 并且条件 ¹, º 和 »c 也是必要的。

证明: 从引理 1, 只需证明上述条件能够推出 d(s)+ j An(s), A I R 是稳定的即可。这里首先指出古典控制理论中的一个简单事实: 任何形如 k / (Ts+ 1) 的惯性传函在全频率范围内的 Nyquist 图是复平面上圆心在 (k/2, 0j) , 半径为 k / 2 的圆。其方程可表示为 k/2+ (k/2) exp (j H), H I [0, 2P) 。如果仅考虑频率 X I R, 那么它的 Nyquist 图方程为 k/2+ (k/2) exp (j H), H I (- P, P) 。从条件 » 可得

(d(j X) + n(j X) + exp (j H)(d(j X) - n(j X) X 0, H I [0, 2P), X I R。 (6)

特别上式对 H I (- P, P) 时成立。注意到 H= 0 I (- P, P) 时, 式(6) 对应的多项式 2d(s) 是稳定的, 故由排零定理[13] 知与(6) 式对应的下多项式簇是稳定的 。

(d(s) + n(s) + exp(j H)(d(s) - n(s), H I (- P, P). (7)

整理上式得 n(s)+ (1/2+ (1/2)exp(j H))(d(s) - n(s)), H I (- P, P) 是稳定的。由事实 1/2+ (1/2) exp (j H), H I (- P, P) 与 1/(1+ j A), A I R 对应的点集相同, 因此得 n(s)+ (d(s) - n(s))/ (1+ j A), A I R 是稳定的。这等价于 d(s)+ j An(s), A I R 是稳定的。

另外, 由于条件 »c 暗示了条件 », 因此为完成定理证明还需要证明条件 »c 的必要性。事实上, 当 p(s) 为严格正实时, n(s), d(s) 都是稳定的。从 Re p(0) > 0 知 n(s) 和 d(s) 的常数项同号进而它们的首次系数同号。注意到 deg d(s) = deg n(s) 知 d(s) + n(s) 的首次项系数的绝对值严格大于 d(s) - n(s) 的首次项系数的绝对值, 即 | (d(]) - n(]))/(d(]) + n(])) | < 1。又因式(7) 中多项式簇在 H I [0, 2P) 时也是稳定的, 利用引理 2 知条件 »c 的必要性成立[1] 。

3 区间分母系统的顶点结果

定义 2 控制器 $c(s) = n_c(s)/d_c(s)$ 严格正实镇定系统 $p(s) = n_p(s)/d_p(s)$ 是指 ¹ $d_p(s)d_c(s) + n_p(s)n_c(s)$ 是稳定的; º 单位反馈下的闭环传函记为 $G(s) = n_p(s)n_c(s) / (d_p(s)d_c(s) + n_p(s)n_c(s))$ 是严格正实的。如果对于式(3) 中的任一 p(s) 都满足条件 ¹ 和 º, 则称 c(s) 鲁棒严格正实镇定 P[º] 。

由定理 2 可立即得下定理。

定理 3 控制器 c(s) 严格正实镇定系统 p(s) 的充分条件是

¹ Re G(0) > 0 ;

º $n_p(s)n_c(s)$, $d_p(s)d_c(s) + n_p(s)n_c(s)$, $d_p(s)d_c(s) + 2n_p(s)n_c(s)$ 都是稳定的;

» | d_p(j X) d_c(j X)/(d_p(j X) d_c(j X) + 2n_p(j X) n_c(j X)) | < 1, X I R 。

---

¹ 将定理 2 与引理 1 相比较, 新增加了条件 d(s) + n(s) 是稳定的, 这主要是为保证条件 » 和 »c 的适定性。后面会看到这个条件可以通过设计满足。

º 由于定义 2 中的条件 º 包含了条件 ¹, 因此, 一般说来条件 ¹ 是可以去掉的。这里单独写出条件 ¹ 是为了表现出严格正实镇定是比镇定更强的概念。

引理 5[14]　记 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\} = \sum c_{i_1 i_2 \cdots i_q} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_q}$, $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_q$, $c_{i_1 i_2 \cdots i_q}$为实数; $1 \le q \le n\}$。若 $a_i \le x_i \le b_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 且 a_i, b_i为实数, 那么 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ 取顶点值时达到极值。

引理 6[15]　设区间分母系统 P_d的相对阶为 1 , 则形如 $k(s+z)/(s+p)$ 的一阶控制器镇定 P_d 的充要条件是它同时镇定 P_d 的 4 个 Kharitonov 顶点系统。

定理 4　(顶点结果) 一阶控制器 $k(s+z)/(s+p)$ 使得相对阶为 1 的区间分母系统 P_d 满足定理 3 中条件 ①～④ 当且仅当它使得 P_d 的 4 个顶点系统满足它们。

证明: 必要性显然, 仅需证充分性。由引理 6 可知对定理 3 中条件 ①～③ 来说其顶点系统的满足可以保证区间分母系统的满足。因此只需证对定理 3 中的条件 ④ 也有类似结论成立。事实上, 设 $p(s)$ 为区间分母系统 P_d中的任一元, 显然定理 3 中条件 ④ 成立当且仅当

$$|d_p(j\omega) d_c(j\omega)| < |d_p(j\omega) d_c(j\omega) + 2 n_p(j\omega) n_c(j\omega)|, \quad \omega \in R \tag{8}$$

令 $d_p(j\omega) = d_p^R + j d_p^I$, $n_p(j\omega) = n_p^R + j n_p^I$; $d_c(j\omega) = d_c^R + j d_c^I$, $n_c(j\omega) = n_c^R + j n_c^I$, 则式 (8) 与下式等价

$$\begin{aligned} &(d_p^R d_c^R - d_p^I d_c^I)(n_p^R n_c^R - n_p^I n_c^I) + \\ &(d_p^R d_c^I + d_p^I d_c^R)(n_p^R n_c^I + n_p^I n_c^R) + |n_p n_c|^2 > 0; \quad \omega \ge 0 \end{aligned} \tag{9}$$

固定 ω, 由式(2) 知 d_p^R, d_p^I分别在某一区间中取值。再从引理 5 知式(9) 左边两项的最小值在某顶点达到。因此, 在这个固定的 ω 上由于顶点系统满足式(9) 从而使得 P_d也满足式(9)。注意到 ω的任意性定理得证。

定理 4 表明, 为了完成区间分母系统的鲁棒严格正实镇定, 只需设计控制器对其顶点系统满足定理 3 中条件 ①～④ 即可, 这正是期望的顶点结果。

4　关于设计条件分析

给出定理 3 中条件 ①～④ 的可计算性分析, 对本文结果的应用是非常重要的。为此, 需作下面两条假设。

(a) 对象和控制器都是最小相位的, 即 $n_p(s)$, $n_c(s)$ 都是稳定的。

(b) 如果要求控制器是正则的, 那么对象的相对阶只能是 0 和 1。

事实上, 从引理 1 和定义 2, 上面两个假设恰是一个对象能够被一个控制器严格正实镇定的必要条件, 因此这种假设是合理的。

命题 1　设 $f_1(s)$ 为稳定的多项式, $f_2(s)$ 是首次系数与 $f_1(s)$ 的首次系数同号且阶数满足 $\deg f_2(s) \le \deg f_1(s) + 1$ 的多项式, 那么一定存在 $\varepsilon^* > 0$, 使得当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ 时, $f_1(s) + \varepsilon f_2(s)$ 是稳定的且有

$$|\varepsilon f_2(j\omega)/(f_1(j\omega) + \varepsilon f_2(j\omega))| < 1, \quad \omega \in R \tag{10}$$

证明: 记 $f_1(j\omega) = f_1^R + j f_1^I$, $f_2(j\omega) = f_2^R + j f_2^I$。故式 (10) 等价于

$$|f_1(j\omega)|^2 + 2\varepsilon(f_1^R f_2^R + f_1^I f_2^I) > 0, \quad \omega \in R \tag{11}$$

根据阶数条件知式 (11) 左边两项关于 X 的阶数相等或者第一项高于第二项。则存在 $E_1 > 0$ 使得当 $E I (0, E_1)$ 时, 式(11) 左边 X 的最高次项系数符号与第一项最高次项系数的符号相同。因此可找到一个独立于 $E I (0, E_1)$ 的 $X_m > 0$, 使得 $| X| > X_m$ 时, 式(11) 成立。因为 $f_1(s)$ 是稳定的, 故得 $\min_X | f_1(jX) | = A > 0$。这样又可选 $E_2 > 0$, 使得当 $E I (0, E_2)$ 时 $\max_{| X| [X_m} | 2E(f_1^R f_2^R + f_1^I f_2^I) | < A$, 即式 (11) 成立。注意到本命题满足引理 3 的条件, 又可设计 $E_3 > 0$, 使得当 $E I (0, E_3)$ 时, $f_1(s) + Ef_2(s)$ 是稳定的。综上取 $E^* = \min\{E_1, E_2, E_3\}$, 命题得证。

定理 5 设 $p(s)$ 满足假设 (a) ~ (b)。一定存在正则稳定的控制器 $c(s)$ 严格正实镇定 $p(s)$。

证明: 任取 $n_c(s)$ 为满足 $\deg n_c(s) \setminus \deg d_p(s) - \deg n_p(s) - 1$ 的稳定多项式, 那么 $d_c(s) = d_m s^m + , + d_1 s + d_0$ 的设计步骤如下

¹ 令 $f_1(s) = n_p(s) n_c(s)$, $f_2(s) = d_p(s)$。从引理 3 和命题 1, 可设计 $E_0 > 0$ 满足 $n_p(s) n_c(s) + E_0 d_p(s)$, $2n_p(s) n_c(s) + E_0 d_p(s)$ 是稳定的且有

$$\frac{n_p(0) n_c(0)}{n_p(0) n_c(0) + E_0 d_p(0)} > 0 ; \quad \left| \frac{E_0 d_p(jX)}{2n_p(jX) n_c(jX) + E_0 d_p(jX)} \right| < 1, \quad X I R。$$

º 令 $f_1(s)$ 同上, $f_2(s) = d_p(s)(s + E_0)$。与第一步相同, 可设计出 $E_1 > 0$ 满足 $n_p(s) n_c(s) + E_1 d_p(s)(s + E_0)$, $2n_p(s) n_c(s) + E_1 d_p(s)(s + E_0)$ 是稳定的, 且有

$$\frac{n_p(0) n_c(0)}{n_p(0) n_c(0) + E_1 E_0 d_p(0)} > 0; \quad \left| \frac{E_1 d_p(jX)(jX + E_0)}{2n_p(jX) n_c(jX) + E_1 d_p(jX)(jX + E_0)} \right| < 1, \quad X I R。$$

完全类似地可设计 $E_2 > 0$ 满足要求。

» 为了保证设计的控制器是稳定的, 在设计 E_3 时还应增加一步 $\bar{E}_3 > 0$ 的设计, 使得 $\bar{E}_3 s^3 + E_2(s^2 + E_1(s + E_0))$ 是稳定的。然后令 $f_1(s) = n_p(s) n_c(s)$, $f_2(s) = d_p(s)\{\bar{E}_3 s^3 + E_2 + s^2 + E_1(s + E_0)]\}$, 与上述步骤类似可设计出 $E_3 > 0$ 满足要求。

¼ 重复上述步骤直到 $m = \deg[n_p(s) n_c(s)] - \deg d_p(s) + 1$ 时停止。此时可得 $d_p(s) = E_m(\bar{E}_m s^m + E_{m-1}(\bar{E}_{m-1} s^{m-1} + , + E_2(s^2 + E_1(s + E_0)) ,))$, 即 $d_c(s)$ 的系数为 $d_i = \prod_{j=i}^{m} E_j$, $i = 0, 1, 2$; $d_i = \bar{E}_i \prod_{j=i}^{m} E_j$, $i = 3, 4, , m$。令 $c(s) = n_c(s) / d_c(s)$ 定理得证¹ º 。

5 说明示例

¹ 定理 5 中的设计步骤与文献 [11] 中设计 $d_c(s)$, 使得 $d_p(s) d_c(s) + n_p(s) n_c(s)$ 是稳定的基本设计步骤有两个本质区别: ¹ 这里的设计方法不是每次设计 $d_c(s)$ 的一个系数, 而是直到结束步骤时才同时设计出所有系数; º 文献 [11] 中 $d_c(s)$ 的阶数在理论上来说是任意的, 而本文的最高阶数受到限制, 详见设计步骤 4。

º 在定理 5 的证明中如果选择 $E_0 > 0$, 使得 $n_p(s) n_c(s) + E_0 d_p(s)$ 是稳定的, 从引理 3 可知 $2n_p(s) n_c(s) + E_0 d_p(s)$ 也是稳定的。另外如果选择 $0 < E_1 < 1$ 那么由 $\frac{n_p(0) n_c(0)}{n_p(0) n_c(0) + E_0 d_p(0)} > 0$, 可推出 $\frac{n_p(0) n_c(0)}{n_p(0) n_c(0) + E_1 E_0 d_p(0)} > 0$。因此, 定理 5 证明中的设计步骤还可进一步简化。有关这一点可在下面的例子中体现出来。

考虑区间分母对象

$$P_d = \left\{ p(s) = \frac{n_p(s)}{d_p(s)} = \frac{s^2 + 0.5s + 1}{s^3 + cs^2 + bs + a}, a \ I \ [-2, 1], \ b \ I \ [10, 12], c \ I \ [5, 7] \right\}$$

从定理 5, 为了设计一个固定控制器 c(s) 鲁棒严格正实镇定 P_d, 仅需设计 c(s) 使得 P_d 的 4 个顶点系统 $p_i(s) = n_p(s)/d_p^i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$ 满足定理 3 的 3 个条件即可。其中

$$d_p^1(s) = -2 + 10s + 7s^2 + s^3, \qquad d_p^2(s) = 1 + 12s + 5s^2 + s^3$$

$$d_p^3(s) = 1 + 10s + 5s^2 + s^3, \qquad d_p^4(s) = -2 + 12s + 7s^2 + s^3$$

令控制器 $c(s) = n_c(s)/d_c(s)$ 并且 $n_c(s) = s + 1$, 则可算得 $n_p(s) n_c(s) = s^3 + 115s^2 + 115s + 1$ 按照定理 5 和注 º, $d_c(s)$ 可设计如下

¹ 令 $f_1(s) = n_p(s) n_c(s)$, $f_2(s) = \left\{ d_p^i(s), i = 1, 2, 3, 4 \right\}$。简单计算可得 $E_0 = 014$ 满足

$$n_p(s) n_c(s) + E_0 d_i^p(s) \ I \ H, \ n_p(0) n_c(0) / (n_p(0) n_c(0) + E_0 d_p^i(0)) > 0, \ i = 1, 2, 3, 4 \tag{12}$$

$$| E_0 d_i^p(jX) / (2n_p(jX) n_c(jX) + E_0 d_i^p(jX)) | < 1, \ X \ I \ R, \ i = 1, 2, 3, 4 \tag{13}$$

这里 H 表示所有 Hurwitz 稳定多项式的集合。

º 令 $f_1(s)$ 同上, $f_2(s) = \{ d_p^i(s)(s + 0.4), i = 1, 2, 3, 4 \}$。类似于第一步并利用注 º 可设计 $0 < E_1 = 01005 < 1$ 使得 $n_p(s) n_c(s) + E_1 d_p^i(s)(s + 0.4) \ I \ H$, $i = 1, 2, 3, 4$。下面以 $i = 1$ 为例证明 E_1 还满足定理 5 第 2 步中的模值条件。从式(11) 要 证

$$11029\,5X^6 - 01714\,5X^4 - 01793\,0X^2 + 01996 > 0, \ X \ I \ R \tag{14}$$

当 $X > 1$ 时

$$11029\,5X^6 - 01714\,5X^4 - 01793\,0X^2 + 01996\,0 > 11029\,5X^6$$
$$- 11507\,5X^4 + 01996\,0 = X^4(11029\,5X^2 - 11507\,5) + 01996\,0.$$

令 $X_m = 1.3$。那么当 $|X| > X_m$ 时, 式 (14) 成立。注意到式 (14) 左边的极值点分别是 $s_1 = 0$ 和 $s_{23} = ?\ 01887\,9$, 可算得式(14) 左边的最小值为 01431 1. 因此当 $|X| [X_m$ 时, 式 (14) 也成立。完全类似地可证明 $i = 2, 3, 4$ 的情况。详细数据见表 1。

表 1 模值条件参数表

序号	X_m	s_1	s_{23}	最小值
i = 1	113	0	? 01 887 9	01 431 1
i = 2	113	0	? 01 887 4	01 446 0
i = 3	113	0	? 01 889 7	01 442 3
i = 4	113	0	? 01 885 7	01 434 8

现在, 要求的控制器 c(s) 可以表示为

$$c(s) = \frac{s + 1}{01005(s + 014)} = \frac{200(s + 1)}{s + 014}$$

参 考 文 献

1 Anderson B D O, Dasgupta S, Khargonekar P, Kraus F J, Mansour M. Robust strict positive realness: characterization and construction, IEEE Trans Circuits and Systems, 1990; 37: 869- 876

2 Abdallah C, Dorato P, Karni S. SPR design using feedback, Proceedings of ACC, 1991; 1- 6

3 贾英民, 高为炳, 程勉. 不确定系统的鲁棒严格正实镇定问题. 中国科学, A 辑, 1992; (8): 867- 874

4 Jia Y M, Gao W B, Cheng M. Robust strict positive real stabilization criteria for SISO uncertain systems, Systems and Control Letters, 1992; 19 (2): 111- 117

5 贾英民, 高为炳, 程勉. 多输入多输出不确定系统的鲁棒镇定核. 中国科学, A 辑, 1993; (10): 1083- 1091

6 Kharitonov V L. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations, Differ2 ential Uravnen, 1978; 14: 2086- 2088

7 Chapellat H, Dahleh M, Bhattacharyya S P. On robust nonlinear stability of interval control systems, IEEE Trans Autmat Contr, 1991; 36: 59- 67

8 Zhao Y D, Jayasuriya S. Frequency domain necessary and sufficient conditions for robust stability of interval plants, Pro2 ceedings of ACC, 1992; 1392- 1396

9 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京: 科学出版社, 1988; 578- 598

10 Chapellat H, Dahleh M, Bhattacharyya S P. Robust stability under structured and unstructured perturbations, IEEE Trans Autmat Contr, 1990; 35: 1100- 1108

11 Wei K H, Yedavalli R K. Robust stabilizability for linear system with both parameter variation and unstructured uncertainty, IEEE Trans Autmat Contr, 1989; 34: 149- 156

12 Chapellat H, Dahleh M, Bhattacharyya S P. Robust stability of a family of disc polynomials, Int J Control, 1990; 51 (6): 1353- 1362

13 Barmish B R. New tools for robustness analysis, Proceedings of IEEE CDC, 1988: 1- 6

14 胡汉中, 程勉, 高为炳. 系统的鲁棒稳定性问题. 控制与决策, 1986; 1 (1): 9- 13

15 Rantzer A. Stability conditions for polytopes of polynomials, IEEE Trans Autmat Contr, 1992; 37 (1): 79- 89