

基于 ESPRIT 算法的双基地 MIMO 雷达 幅相误差分析

王 伟, 吕成财

(哈尔滨工程大学自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 对于双基地多输入多输出(multiple input multiple output, MIMO)雷达,发射和接收阵列幅相误差耦合到一起,不易单独测量。针对阵列存在小扰动幅相误差的 MIMO 雷达,分别推导了借助旋转不变信号参数估计技术(estimating signal parameter via rotational invariance techniques, ESPRIT)算法的到达角(direction of arrival, DOA)和离开角(direction of departure, DOD)的均方根误差(root mean square error, RMSE)与幅相误差关系表达式。与其他方法相比,ESPRIT 算法可以将发射和接收阵列的幅相误差进行解耦,并且 DOA 和 DOD 的 RMSE 只与阵列相位误差相关,与阵列幅值误差无关。仿真结果表明,理论值和仿真实验值能够较好地吻合,验证了理论的正确性。

关键词: 双基地多输入多输出雷达;幅相误差;旋转不变信号参数估计技术;解耦;多目标

中图分类号: TN 95

文献标志码: A

DOI:10.3969/j.issn.1001-506X.2013.05.10

Analysis of amplitude-phase errors in bistatic MIMO radar based on ESPRIT

WANG Wei, LÜ Cheng-cai

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: For the bistatic multiple input multiple output (MIMO) radar, amplitude-phase errors of the transmit sensors and the receive sensors are coupled. It is hard to measure respectively. The general expressions for the root mean square error (RMSE) of the estimating signal parameter via rotational invariance techniques (ESPRIT) of direction of arrival (DOA) and direction of departure (DOD) estimation of bistatic MIMO radar under random sensor perturbations are derived, respectively. Compared with other methods, the ESPRIT algorithm can decouple errors of the transmit sensors and the receive sensors. What's more, the RMSE of DOA and DOD estimation depends only on sensor phase errors, irrelevant to the sensor gain errors. The simulation results show that values of the theory fit those of simulation experiment, and the truth of the theory is demonstrated.

Keywords: bistatic multiple input multiple output (MIMO) radar; amplitude-phase errors; estimating signal parameter via rotational invariance techniques (ESPRIT); decouple; multitarget

0 引 言

近年来,人们开始广泛关注多输入多输出(multiple input multiple output, MIMO)雷达。其主要分为两大类:一类是共址 MIMO 雷达^[1-2],包括单基地和双基地共址 MIMO 雷达(以下简称 MIMO 雷达)。这类雷达发射和接收阵列与传统相控阵雷达类似,发射端发射相互正交波形,通过接收端匹配滤波形成虚拟阵列,扩大阵列孔径,提高雷达的分辨率和参数估计的性能。另一类是统计 MIMO 雷达^[3-4],其采用空间分集与信号分集技术,可以从不同视角

观测目标,从而抑制目标的闪烁特性。目前,针对 MIMO 雷达的研究,主要有探测波形优化设计^[5]、数字波束形成^[6]、目标成像^[7]以及目标检测和参数估计^[8]等。到达角(direction of arrival, DOA)和离开角(direction of departure, DOD)估计是信号的重要空域参数,特别是在雷达领域。空间谱估计技术是近 30 年来发展起来的空域信号处理技术,包括:Capon、旋转不变信号参数估计技术(estimating signal parameter via rotational invariance techniques, ESPRIT)、多重信号分类法(multiple signal classification, MUSIC)等经典算法。文献[9]将 Capon 算法应用到 MIMO

雷达中,实现多个目标的 DOA 和 DOD 联合估计。文献 [10]在收发两端分别采用 ESPRIT 算法估计目标的 DOA 和 DOD。文献 [11]采用 ESPRIT 算法估计出目标的 DOD,采用 Root-MUSIC 算法估计 DOA。这些结论都是在未考虑阵列误差状况下的理论研究,共址 MIMO 雷达在进行数据处理时,要用到发射与接收阵列的导向矢量,因此必须考虑阵列误差。阵列误差包括阵列幅相误差、阵元间互耦、阵元位置误差等,实际工程中考虑阵列幅相误差较多。阵列误差估计与校正^[12-15]是 MIMO 雷达误差的主要研究方向。文献 [15]利用迭代的方法得到考虑幅相误差时双基地 MIMO 雷达的收发导向矢量后,使用 MUSIC-like 算法得到目标的 DOD 和 DOA,并认为 DOA 和 DOD 的均方根误差 (root mean square error, RMSE) 对接收幅相误差并不敏感,对发射幅相误差具有容差性。但是此结论只是从仿真图中得到的,并没有从理论上给出 DOA 和 DOD 的 RMSE 与收发幅相误差的关系表达式。

本文主要研究 MIMO 雷达存在小扰动幅相误差时对 ESPRIT 算法估计 DOA 和 DOD 的影响,推导了 DOA 和 DOD 估计的 RMSE 与阵列幅相误差关系表达式。由表达式可以看出:DOA 和 DOD 估计的 RMSE 只与阵列相位误差相关,与阵列幅值误差无关;并且发射阵列幅相误差只能影响 DOD 估计,接收阵列幅相误差只能影响 DOA 估计,即可以对发射阵列和接收阵列的幅相误差进行解耦。最后将仿真实验值与理论值进行比较,验证了理论的正确性。

在讨论本文的主题之前,这里先给出一些文中常用符号的定义: * 表示取共轭;diag(A) 表示由矢量 A 构成的对角矩阵;(·)^T 表示转置;I_N 表示 N 维单位矩阵;(·)^H 表示共轭转置;⊗ 表示 Kronecker 乘积;rank(A) 表示取矩阵 A 的秩;∠ 表示取相角;A[†] 表示矩阵 A 的伪逆;E{·} 表示求期望;O_{M×M} 表示 M×M 维值为 1 的方阵。

1 MIMO 雷达信号建模

图 1 为双基地 MIMO 雷达结构示意图,发射阵列和接收阵列采用均匀线阵并且发射和接收阵元间距分别为 d_t 和 d_r,阵元的数目分别为 M 和 N。所有发射阵元发射同频相互正交的周期相位编码信号,并且信号满足

$$\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L s_l(t) s_h^*(t) = \begin{cases} 1, & l = h \\ 0, & l \neq h \end{cases} \quad (1)$$

式中,L 为发射编码信号的码长;s_l 和 s_h 分别表示第 l 和第 h 个发射阵元的信号。

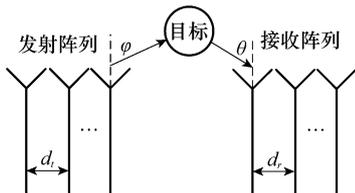


图 1 MIMO 雷达结构示意图

假设空间存在 P 个远场目标,第 i 个目标的 DOD 和 DOA 分别为 φ_i 和 θ_i,则理想情况下接收阵列所接收到的信号可表示为^[9]

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{A}_r(\theta) \text{diag}(\beta) \mathbf{A}_t^T(\varphi) \mathbf{S}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (2)$$

式中,Z(t)=[Z₁(t),⋯,Z_N(t)]^T 为接收阵列在 t 时刻输出信号矢量;S(t)=[S₁(t),⋯,S_M(t)]^T 为发射阵列在 t 时刻的发射信号矢量;A_r(θ)=[a_r(θ₁),⋯,a_r(θ_P)] 为接收导向矢量,a_r(θ_i)=[1,e^{-j(2π/λ)d_rsin θ_i},⋯,e^{-j(2π/λ)(N-1)d_rsin θ_i}]^T,λ 为载波波长;β=[β₁,⋯,β_P],β_i=δ_ie^{j2πf_dt},其中,δ_i 和 e^{j2πf_dt} 分别为第 i 个目标的散射系数和归一化多普勒频率系数;A_t(φ)=[a_t(φ₁),⋯,a_t(φ_P)] 为发射导向矢量,a_t(φ_i)=[1,e^{-j(2π/λ)d_tsin φ_i},⋯,e^{-j(2π/λ)(M-1)d_tsin φ_i}]^T;w(t)∈C^{N×1} 服从均值为 0,方差为 σ_w²I_N 的高斯白噪声矩阵,即 w(t)~N^c(0,σ_w²I_N)。在 Q 个重复周期内,经过接收端匹配滤波器后,相关接收机的输出可表示为^[9]

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{K}_r(\theta, \varphi) \mathbf{H} + \mathbf{v}_r \quad (3)$$

式中,Y_r=[y₁,⋯,y_Q] 为 MN×Q 维矩阵,代表接收阵列在 Q 个重复周期内的回波信号通过相关接收机后的输出矢量;K_r(θ,φ)=[k_r(θ₁,φ₁),⋯,k_r(θ_P,φ_P)] 为 MN×P 维 MIMO 雷达联合导向矢量,k_r(θ_i,φ_i)=a_r(θ_i)⊗a_t(φ_i);v_r=[v_{r1},⋯,v_{rQ}] 为 MN×Q 维矩阵,其中,v_{rq}(q=1,⋯,Q) 为 MN×1 维矢量,v_{rq}~N^c(0,σ_w²I_{MN});H 为目标散射系数和归一化多普勒频率矩阵,可表示为}

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \beta_{1Q} & \cdots & \beta_{1Q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{P1} & \cdots & \beta_{PQ} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,β_{iq}(i=1,2,⋯,P;q=1,2,⋯,Q) 代表第 i 个目标在第 q 个周期内的归一化多普勒频率和散射系数。由式(3)易知,接收阵列可等效为一阵元数为 MN,输出数据的快拍数为 Q 的阵列。

2 ESPRIT 算法下的 MIMO 雷达幅相误差

2.1 ESPRIT 算法在 MIMO 雷达中的应用

本文采用两次独立的 ESPRIT 算法分别估计出目标的 DOA 和 DOD,并进行配对。定义 Y_r 为

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{K}_r(\theta, \varphi) \mathbf{H} + \mathbf{v}_r \quad (5)$$

式中,K_r(θ,φ)=[k_r(θ₁,φ₁),⋯,k_r(θ_P,φ_P)],k_r(θ_i,φ_i)=a_r(φ_i)⊗a_r(θ_i)。则对 Y_r 和 Y_t 的互协方差矩阵的最大似然估计 R 进行奇异值分解有

$$\mathbf{R} = \frac{1}{Q} \mathbf{Y}_r \mathbf{Y}_r^H = \mathbf{U}_s \mathbf{\Sigma}_s \mathbf{V}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{V}_n^H \quad (6)$$

式中,Σ_s 为大特征值组成的对角阵;Σ_n 为小特征值组成的对角阵;U_s 和 V_s 分别为 Y_r 和 Y_t 的信号子空间。大特征值矢量张成的信号子空间与导向矢量张成的信号子空间是相等的,即存在非奇异方阵 T,使得

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{K}_r(\theta, \varphi) \mathbf{T} \quad (7)$$

取 Y_r 的前 M(N-1) 个阵元和后 M(N-1) 个阵元输出

的数据分别记为 \mathbf{X}_{r1} 和 \mathbf{X}_{r2} , $\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi)$ 和 $\mathbf{A}_{r2}(\theta, \varphi)$ 分别取 $\mathbf{K}_r(\theta, \varphi)$ 的前 $M(N-1)$ 行和后 $M(N-1)$ 行元素, \mathbf{v}_{r1} 和 \mathbf{v}_{r2} 分别取 \mathbf{v}_r 前 $M(N-1)$ 行和后 $M(N-1)$ 行元素, 则有

$$\mathbf{X}_{r1} = \mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi)\mathbf{H} + \mathbf{v}_{r1} \quad (8)$$

$$\mathbf{X}_{r2} = \mathbf{A}_{r2}(\theta, \varphi)\mathbf{H} + \mathbf{v}_{r2} \quad (9)$$

取 $\Phi_r = \text{diag}(e^{-j(2\pi/\lambda)d_r \sin \theta_1}, \dots, e^{-j(2\pi/\lambda)d_r \sin \theta_p})$, 由于阵在导向矢量上的关系可知

$$\mathbf{A}_{r2}(\theta, \varphi) = \mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi)\Phi_r \quad (10)$$

与 $\mathbf{K}_r(\theta, \varphi)$ 分割类似, 将 \mathbf{U}_s 分割为 \mathbf{U}_{s1} 和 \mathbf{U}_{s2} , 则有

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{s1} \\ \mathbf{U}_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi)\mathbf{T} \\ \mathbf{A}_{r2}(\theta, \varphi)\mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi)\mathbf{T} \\ \mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi)\Phi_r\mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (11)$$

由式(11)可得 \mathbf{U}_{s2} 、 \mathbf{U}_{s1} 、 Φ_r 三者的关系为

$$\mathbf{U}_{s2} = \mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi)\Phi_r\mathbf{T} = \mathbf{U}_{s1}\mathbf{T}^{-1}\Phi_r\mathbf{T} \quad (12)$$

定义矩阵 Ψ_r , 使得式(13)成立。

$$\mathbf{U}_{s2} = \mathbf{U}_{s1}\Psi_r \quad (13)$$

由式(12)和式(13)可得

$$\Psi_r = \mathbf{T}^{-1}\Phi_r\mathbf{T} \quad (14)$$

若 $\text{rank}(\mathbf{U}_{s1}) = P \leq M(N-1)$, Ψ_r 有最小二乘解 $\hat{\Psi}_r = \mathbf{U}_{s1}^+ \mathbf{U}_{s2}$, 此时对矩阵 Ψ_r 进行特征值分解就可以得到 Φ_r , 同理可以得到 Φ_t 。经过配对过程后, 确定了第 i 个目标的 DOD 和 DOA 所对应的特征值配对 $(\alpha_{ri}, \alpha_{ti})$, 则第 i 个目标的 DOD 和 DOA 估计值为

$$\begin{cases} \varphi_i = \arcsin\left(-\lambda \cdot \frac{\angle(\alpha_{ri})}{2\pi d_r}\right) \\ \theta_i = \arcsin\left(-\lambda \cdot \frac{\angle(\alpha_{ti})}{2\pi d_t}\right) \end{cases} \quad (15)$$

2.2 存在幅相误差时角度估计均方误差表达式推导

阵列幅相误差通常是由于通道内放大器的增益不一致造成的^[15], 记收发阵列的通道增益对角阵为 \mathbf{G}_r 与 \mathbf{G}_t , 可表示为

$$\mathbf{G}_r = \text{diag}((\Delta a_1 + a_1)e^{j(\phi_1 + \Delta\phi_1)}, \dots, (\Delta a_N + a_N)e^{j(\phi_N + \Delta\phi_N)}) \quad (16)$$

$$\mathbf{G}_t = \text{diag}((\Delta b_1 + b_1)e^{j(\vartheta_1 + \Delta\vartheta_1)}, \dots, (\Delta b_M + b_M)e^{j(\vartheta_M + \Delta\vartheta_M)}) \quad (17)$$

式中, $(a_n, \phi_n)(n=1, \dots, N)$ 表示第 n 个接收通道内传感器的幅值和相位增益均值; $(\Delta a_n, \Delta\phi_n)$ 为第 n 个接收阵列传感器的幅相误差, 各自满足独立高斯分布, 即 $\Delta a_n \sim N^c(0, \sigma_a^2)$, $\Delta\phi_n \sim N^c(0, \sigma_\phi^2)$; $(b_m, \vartheta_m)(m=1, \dots, M)$ 表示第 m 个发射通道内传感器幅值和相位增益均值; $(\Delta b_m, \Delta\vartheta_m)$ 代表发射阵列传感器的幅相误差, 同样满足独立高斯分布, 即 $\Delta b_m \sim N^c(0, \sigma_b^2)$, $\Delta\vartheta_m \sim N^c(0, \sigma_\vartheta^2)$ 。

考虑收发阵列幅相误差情况下, 相关接收机经过接收端匹配滤波器后的输出可表示为

$$\hat{\mathbf{Y}}_r = \hat{\mathbf{K}}_r(\theta, \varphi)\mathbf{H} + \mathbf{v}_r \quad (18)$$

式中, $\hat{\mathbf{K}}_r(\theta, \varphi) = [\hat{\mathbf{k}}_r(\theta_1, \varphi_1), \dots, \hat{\mathbf{k}}_r(\theta_p, \varphi_p)]$ 为考虑收发阵列幅相误差的 MIMO 雷达联合导向矢量。

$$\hat{\mathbf{k}}_r(\theta_i, \varphi_i) = (\mathbf{G}_r \mathbf{a}_r(\theta_i)) \otimes (\mathbf{G}_t \mathbf{a}_t(\varphi_i)) =$$

$$(\mathbf{G}_r \otimes \mathbf{G}_t)(\mathbf{a}_r(\theta_i) \otimes \mathbf{a}_t(\varphi_i)) \quad (19)$$

由式(19)可以看出, 发射和接收阵列的幅相误差耦合到一起, 分别给出 DOD 和 DOA 的估计误差公式很难, 因此考虑采用 ESPRIT 算法通过两个子阵的接收信号做差来进行解耦。下面主要推导 DOA 估计误差表达式, DOD 估计的误差与 DOA 估计误差的形式类似。

当 $\Delta\phi_n$ 为小扰动量时, 即 $|\Delta\phi_n| \ll |\phi_n|$, 取一阶 Taylor 级数展开, 有 $e^{j(\phi_n + \Delta\phi_n)} \approx e^{j\phi_n}(1 + j\Delta\phi_n)$ 成立, 此时, 第 n 个接收通道传感器增益可以表示为

$$(\Delta a_n + a_n)e^{j(\phi_n + \Delta\phi_n)} \approx (\Delta a_n + a_n)e^{j\phi_n}(1 + j\Delta\phi_n) \approx e^{j\phi_n}(a_n + \Delta a_n + a_n j\Delta\phi_n) \quad (20)$$

实际工程应用中, 同一批次生产的传感器的幅值和相位增益均值认为是相等的, 因此令 $a_n = 1, \phi_n = 0$, 式(20)可以简化为

$$e^{j\phi_n}(a_n + \Delta a_n + a_n j\Delta\phi_n) = 1 + (\Delta a_n + j\Delta\phi_n) \quad (21)$$

定义 $\Delta\mathbf{G}_r$ 和 $\Delta\mathbf{G}_t$ 为

$$\Delta\mathbf{G}_r = [(\Delta a_1 + j\Delta\phi_1), \dots, (\Delta a_N + j\Delta\phi_N)]^T \quad (22)$$

$$\Delta\mathbf{G}_t = [(\Delta b_1 + j\Delta\vartheta_1), \dots, (\Delta b_M + j\Delta\vartheta_M)]^T \quad (23)$$

定义 \mathbf{B}_M 为 $M \times 1$ 维值为 1 的列向量, 即 $\mathbf{B}_M = [1, \dots, 1]^T$ 。分别定义 $\mathbf{F}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \partial\mathbf{A}_1, \partial\mathbf{A}_2$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (\Delta a_1 + j\Delta\phi_1) \times \mathbf{B}_M + \Delta\mathbf{G}_r \\ \vdots \\ (\Delta a_N + j\Delta\phi_N) \times \mathbf{B}_M + \Delta\mathbf{G}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \text{后 } M \text{ 行} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{前 } M \text{ 行} \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\partial\mathbf{A}_1 = \text{diag}(\mathbf{F}_1)\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi) \quad (25)$$

$$\partial\mathbf{A}_2 = \text{diag}(\mathbf{F}_2)\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi) \quad (26)$$

此时, 式(19)中的 $\mathbf{G}_r \otimes \mathbf{G}_t$ 可以表示为

$$\mathbf{G}_r \otimes \mathbf{G}_t = (\mathbf{I}_N + \text{diag}(\Delta\mathbf{G}_r)) \otimes (\mathbf{I}_M + \text{diag}(\Delta\mathbf{G}_t)) = \mathbf{I}_{MN} + \text{diag}(\mathbf{F}) \quad (27)$$

考虑收发阵列幅相误差情况, 式(8)、式(9)、式(14)应为

$$\hat{\mathbf{X}}_{r1} = \hat{\mathbf{A}}_{r1}(\theta, \varphi)\mathbf{H} + \mathbf{v}_{r1} = (\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi) + \partial\mathbf{A}_1)\mathbf{H} + \mathbf{v}_{r1} \quad (28)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{r2} = \hat{\mathbf{A}}_{r2}(\theta, \varphi)\mathbf{H} + \mathbf{v}_{r2} = (\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi) + \text{diag}(\mathbf{F}_2)\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi))\Phi_r\mathbf{H} + \mathbf{v}_{r2} = (\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi) + \partial\mathbf{A}_2)\Phi_r\mathbf{H} + \mathbf{v}_{r2} \quad (29)$$

$$\hat{\Psi}_r = \mathbf{T}^{-1}(\hat{\mathbf{A}}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger(\hat{\mathbf{A}}_{r2}(\theta, \varphi))\mathbf{T} \quad (30)$$

当幅相误差为小扰动量时, $(\hat{\mathbf{A}}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger$ 可近似为

$$(\hat{\mathbf{A}}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger = (\mathbf{I} - (\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi)^\dagger \partial\mathbf{A}_1)(\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger) \quad (31)$$

将式(31)代入式(30), 忽略二阶小量, 可得

$$\hat{\Psi}_r = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{I} + (\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi)^\dagger \partial\mathbf{A}_2 - \partial\mathbf{A}_1))\Phi_r\mathbf{T} \quad (32)$$

定义 $P \times 1$ 维列向量 \mathbf{e}_i : 第 i 行元素为 1, 其余元素为 0。则对 $\hat{\Psi}_r$ 进行特征值分解得到第 i 个目标的特征值为

$$\hat{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} + \alpha_{ri} \mathbf{e}_i^\dagger (\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger (\partial\mathbf{A}_2 - \partial\mathbf{A}_1) \mathbf{e}_i \quad (33)$$

至此, 证明了在小扰动幅相误差的情况下, 采用 ESPRIT

算法 MIMO 雷达第 i 个目标的特征值与“单输入多输出”相控阵雷达第 i 个目标的特征值在表达式^[16]上是一致的。所以 MIMO 雷达 DOA 估计的均方误差 (mean square error, MSE) 与相控阵雷达 DOA 估计的 MSE 形式类似。

$$E\{|\Delta\theta_i|^2\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi d_r \cos \theta_i} \right)^2 \{ \mathbf{b}_i^T \mathbf{M}_{0i} \mathbf{b}_i^* - \text{Re}(\mathbf{b}_i^T \mathbf{M}_{1i} \mathbf{b}_i) \} \quad (34)$$

式中, $\Delta\theta_i$ 为第 i 个目标 DOA 估计偏差; $\mathbf{b}_i^T = \mathbf{e}_i^T(\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger$ 。定义 $\mathbf{A}_{r1i}(\theta, \varphi)$ 为 $\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi)$ 的第 i 列元素, \mathbf{D}_i 为 $\mathbf{A}_{r1i}(\theta, \varphi)$ 元素构成的对角矩阵; \mathbf{f}_i 为列向量 \mathbf{F}_2 和 \mathbf{F}_1 的差, 则 \mathbf{M}_{0i} 和 \mathbf{M}_{1i} 表达式为

$$\mathbf{M}_{0i} = \mathbf{D}_i E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^H\} \mathbf{D}_i^H \quad (35)$$

$$\mathbf{M}_{1i} = \mathbf{D}_i E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T\} \mathbf{D}_i^T \quad (36)$$

2.3 存在幅相误差时角度估计 MSE 表达式分析

对于 MIMO 雷达来说, 接收和发射阵列的列元素 Kronecker 乘积构成了联合导向矢量相应的列元素, 因此考虑此性质对于 DOA 估计的 MSE 是否依然存在。

定义 $\mathbf{a}_r(\theta_i)$ 为 $\mathbf{A}_r(\theta)$ 的第 i 列元素, $\mathbf{a}_r^{N-1}(\theta_i)$ 取 $\mathbf{a}_r(\theta_i)$ 的前 $(N-1)$ 行元素; $\mathbf{a}_t(\varphi_i)$ 为 $\mathbf{A}_t(\varphi)$ 的第 i 列元素。易知 $\mathbf{e}_i^T(\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger$ 为 $(\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger$ 的第 i 行元素, 并且有

$$\mathbf{e}_i^T(\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger \times \mathbf{A}_{r1i}(\theta, \varphi) = 1 \quad (37)$$

$$\mathbf{A}_{r1i}(\theta, \varphi) = \mathbf{a}_r^{N-1}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}_t(\varphi_i) \quad (38)$$

当接收阵列数目 M 和发射阵列数目 N 足够大时, $\mathbf{b}_i^T = \mathbf{e}_i^T(\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger$ 可以近似认为是 $\mathbf{A}_{r1i}(\theta, \varphi)$ 的伪逆, 并可以表示成两个向量的 Kronecker 乘积形式, 为

$$\mathbf{b}_i^T = \mathbf{e}_i^T(\mathbf{A}_{r1}(\theta, \varphi))^\dagger = (\mathbf{A}_{r1i}(\theta, \varphi))^\dagger = (\mathbf{a}_r^{N-1}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}_t(\varphi_i))^\dagger = (\mathbf{a}_r^{N-1}(\theta_i))^\dagger \otimes (\mathbf{a}_t(\varphi_i))^\dagger \quad (39)$$

定义 $\mathbf{A}_r^{N-1}(\theta)$ 为 $\mathbf{A}_r(\theta)$ 的前 $(N-1)$ 行元素, 则 $\mathbf{a}_r^{N-1}(\theta_i)$ 的伪逆可近似认为是 $\mathbf{e}_i^T(\mathbf{A}_r^{N-1}(\theta))^\dagger$, $\mathbf{a}_t(\varphi_i)$ 的伪逆可近似认为是 $\mathbf{e}_i^T(\mathbf{A}_t(\varphi))^\dagger$ 。此时, 式(39)可以进一步写成 \mathbf{c}_i^T 和 \mathbf{d}_i^T 的 Kronecker 乘积形式

$$\mathbf{b}_i^T = (\mathbf{a}_r^{N-1}(\theta_i))^\dagger \otimes (\mathbf{a}_t(\varphi_i))^\dagger = (\mathbf{e}_i^T(\mathbf{A}_r^{N-1}(\theta))^\dagger) \otimes (\mathbf{e}_i^T(\mathbf{A}_t(\varphi))^\dagger) = \mathbf{c}_i^T \otimes \mathbf{d}_i^T \quad (40)$$

容易证明 \mathbf{D}_i 可以表示成两个矩阵 \mathbf{D}_{2i} 和 \mathbf{D}_{4i} 的 Kronecker 乘积形式。

$$\mathbf{D}_i = \text{diag}(\mathbf{A}_{r1i}(\theta, \varphi)) = \text{diag}(\mathbf{a}_r^{N-1}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}_t(\varphi_i)) = \text{diag}(\mathbf{a}_r^{N-1}(\theta_i)) \otimes \text{diag}(\mathbf{a}_t(\varphi_i)) = \mathbf{D}_{2i} \otimes \mathbf{D}_{4i} \quad (41)$$

定义 \mathbf{f}_i 为 $(N-1) \times 1$ 维列向量, 表示为

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} (\Delta a_2 + j\Delta\phi_2) - (\Delta a_1 + j\Delta\phi_1) \\ \vdots \\ (\Delta a_N + j\Delta\phi_N) - (\Delta a_{N-1} + j\Delta\phi_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (42)$$

由于接收阵列传感器的幅相误差满足独立高斯分布, 可以求得 $E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^H\}$ 和 $E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T\}$ 为 $(N-1) \times (N-1)$ 维矩阵, 其值分别为

$$E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^H\} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times (\sigma_a^2 + \sigma_\phi^2) \quad (43)$$

$$E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T\} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times (\sigma_a^2 - \sigma_\phi^2) \quad (44)$$

容易证明 $E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^H\}$ 可以表示成矩阵 $E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^H\}$ 和 $\mathbf{O}_{M \times M}$ 的 Kronecker 乘积形式

$$E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^H\} = E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^H\} \otimes \mathbf{O}_{M \times M} \quad (45)$$

$E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T\}$ 同样可以表示成矩阵 $E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T\}$ 和 $\mathbf{O}_{M \times M}$ 的 Kronecker 乘积形式

$$E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T\} = E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T\} \otimes \mathbf{O}_{M \times M} \quad (46)$$

将式(41)和式(45)代入式(35)中, 则可以将 \mathbf{M}_{0i} 表示成两矩阵 \mathbf{M}_{2i} 和 \mathbf{M}_{4i} 的 Kronecker 乘积形式

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{0i} &= \mathbf{D}_i E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^H\} \mathbf{D}_i^H = (\mathbf{D}_{2i} \otimes \mathbf{D}_{4i})(E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^H\} \otimes \mathbf{O}_{M \times M})(\mathbf{D}_{2i} \otimes \mathbf{D}_{4i})^H = \\ &= (\mathbf{D}_{2i} E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^H\} \mathbf{D}_{2i}^H) \otimes (\mathbf{D}_{4i} \mathbf{O}_{M \times M} \mathbf{D}_{4i}^H) = \mathbf{M}_{2i} \otimes \mathbf{M}_{4i} \end{aligned} \quad (47)$$

同理, 可将 \mathbf{M}_{1i} 表示成两矩阵 Kronecker 乘积形式

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{1i} &= \mathbf{D}_i E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T\} \mathbf{D}_i^T = (\mathbf{D}_{2i} \otimes \mathbf{D}_{4i})(E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T\} \otimes \mathbf{O}_{M \times M})(\mathbf{D}_{2i} \otimes \mathbf{D}_{4i})^T = \\ &= (\mathbf{D}_{2i} E\{\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^T\} \mathbf{D}_{2i}^T) \otimes (\mathbf{D}_{4i} \mathbf{O}_{M \times M} \mathbf{D}_{4i}^T) = \mathbf{M}_{3i} \otimes \mathbf{M}_{5i} \end{aligned} \quad (48)$$

将式(40)和式(47)代入式(34)中的 $\mathbf{b}_i^T \mathbf{M}_{0i} \mathbf{b}_i^*$, 可以得到两矩阵 $\mathbf{c}_i^T \mathbf{M}_{2i} \mathbf{c}_i^*$ 和 $\mathbf{d}_i^T \mathbf{M}_{4i} \mathbf{d}_i^*$ 的 Kronecker 乘积形式

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{M}_{0i} \mathbf{b}_i^* = (\mathbf{c}_i^T \otimes \mathbf{d}_i^T)(\mathbf{M}_{2i} \otimes \mathbf{M}_{4i})(\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{d}_i)^* = \mathbf{c}_i^T \mathbf{M}_{2i} \mathbf{c}_i^* \otimes \mathbf{d}_i^T \mathbf{M}_{4i} \mathbf{d}_i^* \quad (49)$$

同理, 可将式(34)中的 $\mathbf{b}_i^T \mathbf{M}_{1i} \mathbf{b}_i$ 表示成两矩阵 $\mathbf{c}_i^T \mathbf{M}_{3i} \mathbf{c}_i$ 和 $\mathbf{d}_i^T \mathbf{M}_{5i} \mathbf{d}_i$ 的 Kronecker 乘积形式

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{M}_{1i} \mathbf{b}_i = (\mathbf{c}_i^T \otimes \mathbf{d}_i^T)(\mathbf{M}_{3i} \otimes \mathbf{M}_{5i})(\mathbf{c}_i \otimes \mathbf{d}_i) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{M}_{3i} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{d}_i^T \mathbf{M}_{5i} \mathbf{d}_i \quad (50)$$

$\mathbf{d}_i^T \mathbf{M}_{4i} \mathbf{d}_i^* = 1, \mathbf{d}_i^T \mathbf{M}_{5i} \mathbf{d}_i = 1$, 故式(34)可以化简为

$$E\{|\Delta\theta_i|^2\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi d_r \cos \theta_i} \right)^2 \{ \mathbf{c}_i^T \mathbf{M}_{2i} \mathbf{c}_i^* - \text{Re}(\mathbf{c}_i^T \mathbf{M}_{3i} \mathbf{c}_i) \} \quad (51)$$

式(51)为相控阵雷达 DOA 估计的 MSE 表达式, 故

$$E\{|\Delta\theta_i|^2\} \simeq \frac{2}{(N-1)^2} \left(\frac{\lambda}{2\pi d_r \cos \theta_i} \right)^2 \sigma_\phi^2 \quad (52)$$

定义角度估计的 RMSE 为 MSE 的开方, 则可以得到 DOA 估计的 RMSE 为

$$\text{RMSE}_{\text{DOA}} = \sqrt{E\{|\Delta\theta_i|^2\}} = \frac{\sqrt{2}}{(N-1)} \left| \frac{\lambda}{2\pi d_r \cos \theta_i} \right| |\sigma_\phi| \quad (53)$$

同理, DOD 估计的 RMSE 为

$$RMSE_{DOD} = \frac{\sqrt{2}}{(M-1)} \left| \frac{\lambda}{2\pi d_i \cos \varphi_i} \right| |\sigma_\theta| \quad (54)$$

由式(53)和式(54)可以得到结论:对于存在小扰动幅相误差的 MIMO 雷达,采用 ESPRIT 算法估计角度的误差只与阵列相位误差相关,与阵列幅值误差无关;并且发射阵列幅相误差只能影响 DOD 估计,接收阵列幅相误差只能影响 DOA 估计。

3 仿真结果及分析

仿真条件:双基地共址 MIMO 雷达,发射和接收阵列间距 $d_t = d_r = \lambda/2$,各个发射阵元发射快拍数 $Q=200$ 的正交信号,并且在信噪比为 0 dB 的高斯白噪声背景下。收发阵列的相位误差都服从零均值,标准差为 4 的高斯分布;幅值误差都服从零均值,标准差为 -20 dB 的高斯分布。空间存在的两个远场目标的 DOD 和 DOA 分别为 $(\varphi_1, \theta_1) = (30^\circ, 55^\circ)$, $(\varphi_2, \theta_2) = (40^\circ, 20^\circ)$,目标的散射系数和归一化多普勒频率系数 $\beta = [1, 1]$ 。

仿真实验 1 固定发射阵列为 $M=3$,接收阵列的阵元数 N 分别为 4,6,8,10,12,14,各独立进行 1 000 次蒙特卡罗实验,计算 DOA 和 DOD 估计的 RMSE,与理论 DOA 和 DOD 估计的 RMSE 进行比较,结果如图 2 和图 3 所示。

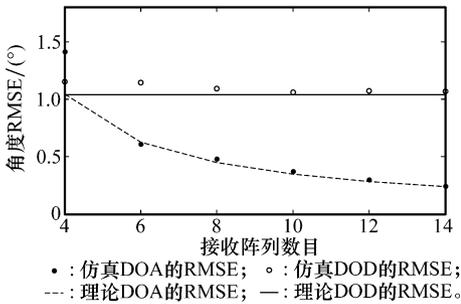


图 2 目标 1 理论与仿真角度误差随接收阵元数目变化

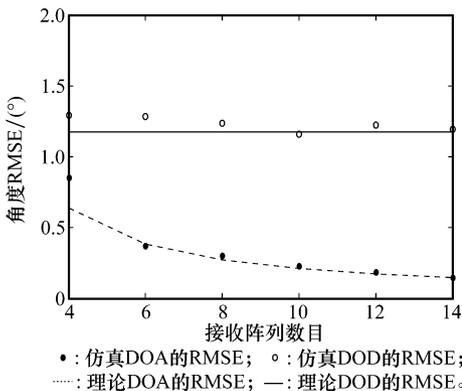


图 3 目标 2 理论与仿真角度误差随接收阵元数目变化

仿真实验 2 固定接收阵列为 $N=4$,发射阵列的阵元数 M 分别为 3,6,9,12,15,18,各独立进行 1 000 次蒙特卡

罗实验,计算 DOA 和 DOD 估计的 RMSE,与理论的 DOA 和 DOD 估计的 RMSE 进行比较,结果如图 4 和图 5 所示。

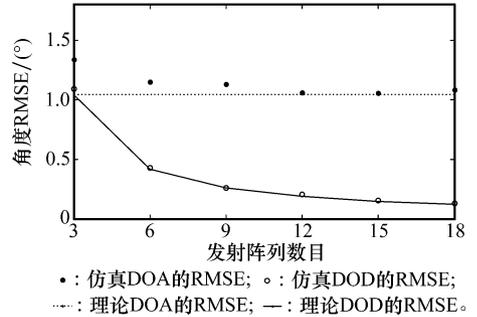


图 4 目标 1 理论与仿真角度误差随发射阵元数目变化

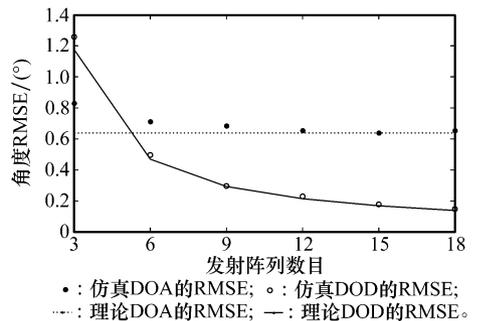


图 5 目标 2 理论与仿真角度误差随发射阵元数目变化

由图 2~图 5 中可以看出,理论值与仿真实验值可以较好的吻合,证明本文推导的公式的正确性。而仿真实验值与理论值在阵列数目较小时误差比较大,这主要是由于两点原因造成的:①式(39)和式(40)成立的条件是阵元数目足够大;②阵元数目较小时,模型中的高斯白噪声对仿真实验值的影响更大。

4 结论

本文推导了 MIMO 雷达的收发阵列存在小扰动幅相误差时,采用 ESPRIT 算法估计得到的 DOA 和 DOD 的误差表达式。由表达式可以看出,DOA 和 DOD 估计的 RMSE 只与阵列相位误差相关,与阵列幅值误差无关,因此,ESPRIT 算法具有抗小扰动幅值误差扰动的特性。另外,ESPRIT 算法可以对耦合到一起发射和接收阵列的幅相误差进行解耦;ESPRIT 算法的 DOA 估计只受接收阵列幅相误差影响;DOD 估计只受发射阵列幅相误差影响。

参考文献:

[1] Boyer R. Performance bounds and angular resolution limit for the moving colocated MIMO radar[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2011, 59(4): 1539 - 1552.

[2] Moo P W. Multiple-input multiple-output radar search strategies for high-velocity targets[J]. *IET Radar, Sonar and Navigation*,

- 2011,5(3):256-265.
- [3] Jin M, Liao G, Li J. Target localization for distributed multiple-input multiple-output radar and its performance analysis[J]. *IET Radar, Sonar and Navigation*, 2011,5(1):83-91.
- [4] Zhou S, Liu H. Signal fusion-based target detection algorithm for spatial diversity radar[J]. *IET Radar, Sonar and Navigation*, 2011,5(3):204-214.
- [5] Zhang J D, Wang H Q, Zhu X H. Adaptive waveform design for separated transmit/receive ULA-MIMO radar[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2010,58(9):4936-4942.
- [6] Ahmed S, Thompson J S, Petillot Y R, et al. Unconstrained synthesis of covariance matrix for MIMO radar transmit beam pattern[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2011,59(8):3837-3849.
- [7] Zhu Y T, Su Y, Yu W X. An ISAR imaging method based on MIMO technique[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2010,48(8):3290-3299.
- [8] Tajer A, Jajamovich G H, Wang X D, et al. Optimal joint target detection and parameter estimation by MIMO radar[J]. *IEEE Journal of Selected Topic in Signal Processing*, 2010,4(1):127-145.
- [9] Yan H D, Li J, Liao G S, et al. Multitarget identification and localization using bistatic MIMO radar[J]. *European Association for Signal Processing (EURASIP) Journal on Advances in Signal Processing*, 2008,8(2):1-8.
- [10] Chen D F, Chen B X, Qin G D. Angle estimation using ESPRIT in MIMO radar[J]. *Electronics Letters*, 2008,44(12):770-771.
- [11] Bencheikh M L, Wang Y. Joint DOD-DOA estimation using combined ESPRIT-MUSIC approach in MIMO radar[J]. *Electronics Letters*, 2010,46(15):1081-1083.
- [12] Guo Y D, Zhang Y S, Tong N N. ESPRIT-like angle estimation for bistatic MIMO radar with gain and phase uncertainties[J]. *Electronics Letters*, 2011,47(17):996-997.
- [13] Yang M L, Zhang S H, Chen B X, et al. Gain and phase error calibration for multi carrier frequency MIMO radar[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010,32(2):279-283. (杨明磊, 张守宏, 陈伯孝, 等. 多载频 MIMO 雷达的幅相误差校正[J]. 系统工程与电子技术, 2010,32(2):279-283.)
- [14] Xu Q, Liao G S, Zhang J, et al. An estimation method for MIMO radar under gain and phase errors[J]. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 2012,33(3):530-536. (徐青, 廖桂生, 张娟, 等. 一种 MIMO 雷达幅相误差估计方法[J]. 航空学报, 2012,33(3):530-536.)
- [15] Liu X L, Liao G S. Multitarget localization and estimation of gain-phase error for bistatic MIMO radar[J]. *Acta Electronic Sinica*, 2011,39(3):596-601. (刘晓莉, 廖桂生. 双基地 MIMO 雷达多目标定位及幅相误差估计[J]. 电子学报, 2011,39(3):596-601.)
- [16] Soon V C, Huang Y F. An analysis of ESPRIT under random sensor uncertainties[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992,40(9):2353-2358.

作者简介:

王伟(1979-),男,教授,博士,主要研究方向为 MIMO 雷达信号处理、阵列信号处理。

E-mail:chinaww2006@yahoo.com.cn

吕成财(1988-),男,硕士研究生,主要研究方向为 MIMO 雷达信号处理、阵列信号处理。

E-mail:lvchengcai@hrbeu.edu.cn