

# 中国科学技术大学

## 2011 年硕士学位研究生入学考试试题

(量子力学)

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

需使用计算器

不使用计算器

1. (20 分)

电子在稀有气体中散射时，会发现完全穿透的现象，它可以用下面的模型描写。质量为  $\mu$  的粒子在势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, x > a \\ -V_0 & 0 < x < a \end{cases}$$

中散射，完全穿透。试求此时入射粒子的能量  $E$ 。

2. (20 分)

一量子系统，其哈密顿量可写为

$$\hat{H} = \hat{a}^+ \hat{a} + \alpha \hat{a} + \beta \hat{a}^+$$

其中  $\alpha, \beta$  为数，而算符  $\hat{a}$  及其厄米共轭  $\hat{a}^+$  满足下面的对易关系

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$$

试求此系统的能量本征值。

3. (30 分)

质量为  $\mu$  粒子在势  $V(x)$  中作一维运动， $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(x)$ ，定态波函数为

$$|n\rangle, \hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, n=1,2,3,\dots$$

(a) 证明： $\langle n|\hat{p}|m\rangle = a_{nm}\langle n|\hat{x}|m\rangle$ ，并求系数  $a_{nm}$ ；

(b) 推导求和公式  $\sum_n (E_n - E_m)^2 |\langle n|\hat{x}|m\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{\mu^2} \langle m|\hat{p}^2|m\rangle$ 。

4. (20分)

现有一个电子限制在平面上一半径为  $R$  的圆环上运动,  $\theta$  为其角位置。

已知开始时刻该电子的波函数为  $\psi(\theta, 0) = \sin^2 \theta$ 。试求

- (a) 粒子在任意  $t \geq 0$  时刻的波函数;
- (b) 试求任意  $t \geq 0$  时刻的电子能量期望值。

5. (30分)

已知氢原子初始时刻( $t=0$ )处于由如下波函数描述的状态

$$\Psi(\vec{x}, 0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta, \varphi) \\ -R_{31}(r)Y_{11}(\theta, \varphi) \end{pmatrix},$$

其中  $R_{21}$ 、 $R_{31}$  分别为归一化的径向波函数(量子数分别为  $n=2, \ell=1$  和

$n=3, \ell=1$ )。试求  $t$  时刻

- (a) 电子自旋朝上的的概率;
- (b) 总角动量  $z$  分量的期望值。

6. (30分)

某双态体系的哈氏量可表示为  $H = H_0 + H'$ , 而  $H_0$  的两个归一化本征态分别为  $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ , 相应的能量本征值分别为  $E_a$ 、 $E_b$ , 满足  $E_a < E_b$ 。在  $H_0$  表象,  $H'$  可表示为

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & i\varepsilon \\ -i\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

其中  $\varepsilon$  为一正的实常量, 满足  $\varepsilon \ll E_b - E_a$ 。取试探态为

$$|\psi\rangle = \cos\theta|a\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta|b\rangle$$

$\theta, \varphi$  为变分参数, 试用变分法计算体系的基态能级。