文章编号：1001-506X(2010)11-2407-05

光学陀螺旋转式惯导系统的安装误差效应分析

袁保伦，饶谷音，廖　丹
（国防科学技术大学光电科学与工程学院，湖南 长沙 410073）

摘　要：在光学陀螺惯导系统中，利用系统旋转自动补偿可以有效地减小惯性元件漂移对系统导航精度的影响，从而实现高精度、低成本的惯性导航要求。首先从光学陀螺旋转式惯导系统的误差传播方程出发，推导了系统中由于光学陀螺安装误差引起的数学平台角度误差表达式。以此为基础，分析了旋转式系统中的安装误差引起的误差效应及自动补偿安装误差所应满足的条件，为系统设计和精度分析提供了理论参考。

关键词：激光陀螺；光纤陀螺；旋转式惯导系统；安装误差；自动补偿；误差分析

中图分类号：U 666.1　　**文献标志码**：A　　**DOI**：10.3969/j.issn.1001-506X.2010.11.33

Mounting error analysis for rotating inertial navigation system with optical gyroscopes

YUAN Bao-lun, RAO Gu-yin, LIAO Dan
(*Coll. of Optoelectronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China*)

Abstract: Auto-compensation with system rotating can effectively decrease the influence of inertial sensing elements' drift on the navigation accuracy of an inertial navigation system with optical gyroscopes, and this makes high-performance and low-cost navigation possible. Formulae for the propagation of mathematical platform misalignment angles induced by mounting errors in rotating inertial navigation system with optical gyroscopes are deduced from the error-propagation equation of the rotating inertial navigation system. On the basis of these formulae, analyses are made on the characteristics of navigation errors induced by mounting errors and conditions for the auto-compensation of mounting errors. These provide theoretical consults for the system design and performance analysis of the rotating inertial navigation system.

Keywords: ring laser gyroscope; fiber optic gyroscope; rotating inertial navigation system; mounting error; auto-compensation; error analysis

0　引　言

光学陀螺是基于 Sagnac 效应测量原理的惯性器件，目前广泛应用的有激光陀螺和光纤陀螺两种类型，它们的共同特点是对 g 不敏感、无运动部件、动态范围宽、标度因数线性度好等，是一种比较理想的惯性器件。也正是因为有此优点，与一般的机械陀螺相比，光学陀螺更适合于采用旋转自动补偿的方式提高系统精度而不会造成陀螺本身精度的下降。

在光学陀螺旋转式系统中，是利用惯性测量组合（inertia measure unit, IMU）按照一定的次序转动，将惯性元件的漂移引起的导航误差调制成周期变化的形式，最终使其能够在一个转动周期内得到抵消，从而提高了惯性导航的长期精度。旋转式惯导还能通过提高系统可观测度来提高初始对准精度[1]。目前国外的单轴和双轴激光陀螺旋转式惯性导航系统发展已经比较成熟，其中 MK39 MOD3C[2]、WSN-7B[3]、MK49[4] 等型号装备于美国和北约的大量海军舰船。

旋转式惯导系统的设计目的是减小光学陀螺漂移误差对导航精度影响，然而，在一个实际的系统中，不仅仅存在惯性元件的漂移误差，还存在着惯性元件的标度因数误差、安装误差等其他误差因素，这些误差因素均有可能与转位运动耦合而在系统中引起额外的误差效应，从而最终影响到导航精度[5-6]。本文即是对光学陀螺旋转式系统中的安装误差效应进行了详细分析，为旋转式系统的设计和精度分析提供了理论参考。

1　光学陀螺旋转式惯导系统的误差传播方程

在光学陀螺旋转式惯导系统中，并不存在稳定的物理平台，导航解算采用的是捷联算法，计算机内部建立有“数

收稿日期：2009－11－30；**修回日期**：2010－03－23。
作者简介：袁保伦（1979－），男，讲师，博士，主要研究方向为激光陀螺和惯性导航系统。E-mail：karlun@163.com

学平台”作为导航计算的参考坐标系，因此与捷联惯导系统一样，可以采用 $\boldsymbol{\Phi}$ 角误差方程[7]来表示一个旋转式惯导系统的误差模型

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}^n = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi}^n + \boldsymbol{\delta\omega}_{in}^n - C_b^n \boldsymbol{\delta\omega}_{ib}^b \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}\dot{v}^n = {} & f^n \times \boldsymbol{\phi}^n + C_b^n \boldsymbol{\delta} f^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \\ & \boldsymbol{\delta} v^n - (2\boldsymbol{\delta\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\delta\omega}_{en}^n) \times v^n + \boldsymbol{\delta} g^n\end{aligned} \tag{2}$$

上面式子的 n 表示由数学平台构成的导航坐标系，b 表示由惯性测量组合构成的机体坐标系，i 表示惯性坐标系，e 表示地球坐标系。$\boldsymbol{\phi}$ 为数学平台的失准角度，v 和 $\boldsymbol{\delta} v$ 分别为数学平台的速度和速度误差，$\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\delta\omega}$ 分别为角速度和角速度误差，$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{\delta} f$ 分别为加速度计测量的力及其误差，$\boldsymbol{\delta} g$ 为重力偏差，$\boldsymbol{C}_b^n$ 为机体坐标系到导航坐标系的变换矩阵，即姿态矩阵。

在式(1)和式(2)两式中，$\boldsymbol{\delta\omega}_{ib}^b$ 和 $\boldsymbol{\delta} f^b$ 分别为由陀螺仪和加速度计测量的不准确所引起的误差项，可看出，惯性元件的误差项 $\boldsymbol{\delta\omega}_{ib}^b$ 和 $\boldsymbol{\delta} f^b$ 需要在前面乘以姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_b^n$ 转化为导航坐标系中的分量表示才最终在误差方程中起作用。令

$$\boldsymbol{\varepsilon}^n = C_b^n \boldsymbol{\delta\omega}_{ib}^b \tag{3}$$

$$\nabla^n = C_b^n \delta f^b \tag{4}$$

则 $\boldsymbol{\varepsilon}^n$、$\nabla^n$ 分别代表由惯性元件测量所形成的误差在惯导系统误差方程中的最终引起的数学平台的角速度和作用力的误差。由此系统的 $\boldsymbol{\Phi}$ 角误差方程重新写为

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}^n = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi}^n + \boldsymbol{\delta\omega}_{in}^n - \boldsymbol{\varepsilon}^n \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}\dot{v}^n = {} & f^n \times \boldsymbol{\phi}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{\delta} v^n - \\ & (2\boldsymbol{\delta\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\delta\omega}_{en}^n) \times v^n + \boldsymbol{\delta} g^n + \nabla^n\end{aligned} \tag{6}$$

旋转系统自动补偿的本质即是周期性的改变姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_b^n$ 的值，从而使一个周期内的误差传播方程中数学平台的误差项 $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ 和 ∇^n 的积分或者均值尽量接近零，以此来减小系统误差的积累，提高导航精度。

2 安装误差引起的数学平台误差角度推导

根据系统误差自动补偿本质的思路，可以通过探讨一个转动周期内上述 $\boldsymbol{\varepsilon}^n$、$\nabla^n$ 的积分或者均值能否为零来研究安装误差在系统旋转下的误差效应。为了论述问题的方便，下面的探讨是在系统中仅存在安装误差、并且一个轴连续转动和载体没有运动的情况下进行的，此时陀螺的输入只有地球自转和旋转运动的角速度。采用这种简化的条件是为了物理意义的简单清晰，而并不会影响到最终对安装误差效应的讨论。

安装误差必须相对于一个固定的参考系来说才有意义，在本文中，若没有特别说明，安装误差是相对于 IMU 上的本体坐标系 $ox_by_bz_b$ 来定义的，即与 IMU 姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_b^t$ 所参考的 $ox_by_bz_b$ 坐标系相同。由此在经过惯性测量组合的标定工作以后，即求得了光学陀螺的三个敏感轴组成的坐标系 $ox_gy_gz_g$（非正交系）到 IMU 上的本体坐标系 $ox_by_bz_b$（正交系）的变换矩阵 $\boldsymbol{C}_g^{b'}$，标定得到的 $\boldsymbol{C}_g^{b'}$ 矩阵不是绝对准确的，它和真实的 $ox_gy_gz_g$ 到 $ox_by_bz_b$ 之间变换矩阵 $\boldsymbol{C}_g^b$ 的关系为

$$\boldsymbol{C}_g^{b'} = (\boldsymbol{I} + \Delta\boldsymbol{C}_g^b) \cdot \boldsymbol{C}_g^b \tag{7}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，$\Delta\boldsymbol{C}_g^b$ 为三个光学陀螺的真实敏感轴方位与标定校正后的陀螺敏感轴方位之间的夹角矩阵，也即为标定后系统中剩余的安装误差矩阵，本文中的安装误差即指此矩阵。一般经过标定工作以后，剩余的安装误差角已经很小(角秒量级)，在小角度的情况下，陀螺的安装误差矩阵 $\Delta\boldsymbol{C}_g^b$ 可表示为[8]

$$\Delta\boldsymbol{C}_g^b = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_{xz} & \eta_{xy} \\ \eta_{yz} & 0 & -\eta_{yx} \\ -\eta_{zy} & \eta_{zx} & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

式中，η_{ij}（$i=x,y,z$；$j=x,y,z$；$i\neq j$）为第 i 坐标轴上陀螺的敏感轴方位误差角度。

导航坐标系采用东北天地理坐标系，设初时时刻 IMU 的姿态矩阵为

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} & \boldsymbol{M}_{13} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} & \boldsymbol{M}_{23} \\ \boldsymbol{M}_{31} & \boldsymbol{M}_{32} & \boldsymbol{M}_{33} \end{pmatrix} \tag{9}$$

假设从零时刻开始，控制系统的 IMU 绕竖直方向以角速度 ω 相对于地理坐标系开始匀速转动，则可得 t 时刻 IMU 的姿态矩阵为

$$\boldsymbol{C}_b^t = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega \boldsymbol{t}) & 0 \\ \sin(\omega \boldsymbol{t}) & \cos(\omega \boldsymbol{t}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} & \boldsymbol{M}_{13} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} & \boldsymbol{M}_{23} \\ \boldsymbol{M}_{31} & \boldsymbol{M}_{32} & \boldsymbol{M}_{33} \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}_0^t \cdot \boldsymbol{M} \tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{C}_0^t$ 为绕天向轴的转动矩阵。则 t 时刻 IMU 本体坐标系中陀螺测量所得到的角速度为

$$\omega_{ib}^b = \boldsymbol{C}_g^{b'} \cdot \boldsymbol{\omega}^g = \boldsymbol{C}_g^{b'} \boldsymbol{C}_b^g \boldsymbol{C}_t^b \cdot \boldsymbol{\omega}^t = \boldsymbol{C}_g^{b'} \boldsymbol{C}_b^g \boldsymbol{C}_t^b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{ieN} \\ \omega + \omega_{ieU} \end{pmatrix} \tag{11}$$

式中，$\boldsymbol{C}_t^b$ 为姿态矩阵的转置，$\boldsymbol{\omega}^g$ 为陀螺感受到的理想角速度，$\boldsymbol{\omega}^t$ 为地理坐标系中的理想角速度，ω_{ieN}、ω_{ieU} 分别为地球自转角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ 在北向和天向上的分量。

将式(7)代入到式(11)得机体系中测量得到的角速度为

$$\omega_{ib}^b = \boldsymbol{C}_g^{b'} \boldsymbol{C}_b^g \boldsymbol{C}_t^b \cdot \boldsymbol{\omega}^t = (\boldsymbol{I} + \Delta\boldsymbol{C}_g^b) \boldsymbol{C}_g^b \boldsymbol{C}_b^g \boldsymbol{C}_t^b \cdot \boldsymbol{\omega}^t = (\boldsymbol{I} + \Delta\boldsymbol{C}_g^b) \boldsymbol{C}_t^b \cdot \boldsymbol{\omega}^t \tag{12}$$

由式(12)可得在 IMU 本体坐标系中，由于陀螺敏感轴方位误差(即安装误差)的存在而使陀螺所感受到的误差角速度为

$$\delta\omega_{ib}^b = \Delta\boldsymbol{C}_g^b \boldsymbol{C}_t^b \cdot \boldsymbol{\omega}^t \tag{13}$$

将式(13)和式(10)代入到 $\varepsilon^n = C_b^n \delta\omega_{ib}^b$ 中，得到 t 时刻由安装误差所造成的数学平台的角速度误差项为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^n &= \boldsymbol{C}_0^t \cdot \boldsymbol{M} \cdot \Delta\boldsymbol{C}_g^b \cdot (\boldsymbol{C}_0^t \cdot \boldsymbol{M})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}^t = \\ & \boldsymbol{C}_0^t \cdot \boldsymbol{M} \cdot \Delta\boldsymbol{C}_g^b \cdot \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{C}_0^t)^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}^t\end{aligned} \tag{14}$$

为了方便起见，定义矩阵 $\boldsymbol{\Delta}'$ 为 $\boldsymbol{\Delta}'=\boldsymbol{M}\cdot\Delta\boldsymbol{C}_g^b\cdot\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$，则有

$$\boldsymbol{\varepsilon}^n=\boldsymbol{C}_0^t\cdot\boldsymbol{\Delta}'\cdot(\boldsymbol{C}_0^t)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\omega}^t \tag{15}$$

将上述各式代入上式中并展开得

$$\begin{aligned}
\varepsilon_E^n=&\\
&(\boldsymbol{\Delta}'_{11}\omega_{ieN}\sin(\omega t)+\boldsymbol{\Delta}'_{12}\omega_{ieN}\cos(\omega t)+\boldsymbol{\Delta}'_{13}(\omega+\omega_{ieU}))\cos(\omega t)-\\
&(\boldsymbol{\Delta}'_{21}\omega_{ieN}\sin(\omega t)+\boldsymbol{\Delta}'_{22}\omega_{ieN}\cos(\omega t)+\boldsymbol{\Delta}'_{23}(\omega+\omega_{ieU}))\sin(\omega t)\\
\varepsilon_N^n=&\\
&(\boldsymbol{\Delta}'_{11}\omega_{ieN}\sin(\omega t)+\boldsymbol{\Delta}'_{12}\omega_{ieN}\cos(\omega t)+\boldsymbol{\Delta}'_{13}(\omega+\omega_{ieU}))\sin(\omega t)+\\
&(\boldsymbol{\Delta}'_{21}\omega_{ieN}\sin(\omega t)+\boldsymbol{\Delta}'_{22}\omega_{ieN}\cos(\omega t)+\boldsymbol{\Delta}'_{23}(\omega+\omega_{ieU}))\cos(\omega t)\\
\varepsilon_U^n=&\boldsymbol{\Delta}'_{31}\omega_{ieN}\sin(\omega t)+\boldsymbol{\Delta}'_{32}\omega_{ieN}\cos(\omega t)+\boldsymbol{\Delta}'_{33}(\omega+\omega_{ieU})
\end{aligned} \tag{16}$$

将上面数学平台的角速度误差项在时间 $T=2\pi/|\omega|$ 内积分，则得到转动一周后数学平台的累积误差角度

$$\int_0^T\boldsymbol{\varepsilon}^n\cdot\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\Delta}'_{12}-\boldsymbol{\Delta}'_{21})\boldsymbol{\omega}_{ieN}T/2\\(\boldsymbol{\Delta}'_{11}+\boldsymbol{\Delta}'_{22})\boldsymbol{\omega}_{ieN}T/2\\\boldsymbol{\Delta}'_{33}2\pi\cdot\mathrm{sign}(\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\Delta}'_{33}\boldsymbol{\omega}_{ieU}T\end{pmatrix} \tag{17}$$

式中，$\mathrm{sign}(\omega)$ 为符号函数，表达式为

$$\mathrm{sign}(\boldsymbol{\omega})=\begin{cases}+1,\ \boldsymbol{\omega}>0\\-1,\ \boldsymbol{\omega}<0\end{cases}$$

式(17)所含有 $\boldsymbol{\Delta}'$ 的项可以根据 $\boldsymbol{\Delta}'=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\Delta C}_g^b\cdot\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$ 求得为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}'_{12}-\boldsymbol{\Delta}'_{21}=&(\eta_{yz}+\eta_{xz})(\boldsymbol{M}_{12}\boldsymbol{M}_{21}-\boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{M}_{22})+\\
&(\eta_{xy}+\eta_{zy})(\boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{M}_{23}-\boldsymbol{M}_{13}\boldsymbol{M}_{21})+\\
&(\eta_{zx}+\eta_{yx})(\boldsymbol{M}_{13}\boldsymbol{M}_{22}-\boldsymbol{M}_{12}\boldsymbol{M}_{23})\\
\boldsymbol{\Delta}'_{11}+\boldsymbol{\Delta}'_{22}=&(\eta_{yz}-\eta_{xz})(\boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{M}_{12}+\boldsymbol{M}_{21}\boldsymbol{M}_{22})+\\
&(\eta_{xy}-\eta_{zy})(\boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{M}_{13}+\boldsymbol{M}_{21}\boldsymbol{M}_{23})+\\
&(\eta_{zx}-\eta_{yx})(\boldsymbol{M}_{12}\boldsymbol{M}_{13}+\boldsymbol{M}_{22}\boldsymbol{M}_{23})\\
\boldsymbol{\Delta}'_{33}=&(\eta_{yz}-\eta_{xz})\boldsymbol{M}_{31}\boldsymbol{M}_{32}+(\eta_{xy}-\eta_{zy})\boldsymbol{M}_{31}\boldsymbol{M}_{33}+\\
&(\eta_{zx}-\eta_{yx})\boldsymbol{M}_{32}\boldsymbol{M}_{33}
\end{aligned} \tag{18}$$

3　安装误差在系统中的误差效应及补偿条件分析

3.1　一般情况下陀螺安装误差效应及自动补偿分析

从式(17)可以看出，在一般情况下，IMU 转动一周后，由安装误差引起的数学平台的角度误差的中，包含着两类误差项部分，下面分别予以讨论。

第一类误差项是安装误差与转动角速度直接耦合所产生的误差项。其中式(17)第三个分量中的 $\boldsymbol{\Delta}'_{33}2\pi\cdot\mathrm{sign}(\omega)$ 为此类误差。从这一项的表达式可见，如果转轴连续向某一个方向以角速度 ω 转动，即 $\mathrm{sign}(\omega)$ 取一个固定值+1 或者−1，那么在转轴方向上将产生角速度常值漂移，这将会造成持续增长的导航误差。例如安装误差 $\boldsymbol{\Delta}'_{33}$ 为 10^{-6} rad，若以 6°/s 的角速度向一个方向转动 24 h，将造成 0.5°(30′)左右的数学平台角度误差，这对于高精度惯导系统来说是不可容忍的。显然通过 IMU 反转使 $\mathrm{sign}(\boldsymbol{\omega})$ 反号可以消除此第一类误差项，因此无论是单轴还是多轴的旋转系统，IMU 都要应该正转一段时间，再反转相同角度，以防止转轴方向上的安装误差和转位运动耦合而引起的较大的导航误差。

第二类误差项是安装误差与地球自转角速度直接耦合所产生的误差项。其中式(17)中除了第一类误差项之外的误差项均为此类误差，它们的表达式与地球自转 ω_{ieN}、ω_{ieU} 相关。注意到式(10)前面所假设的 IMU 转动方式，可以看出，之所以式(17)中会出现安装误差与地球自转的耦合项，是因为 IMU 是相对于地理坐标系而转动的，而地理坐标系随着地球自转以角速度 ω_{ie} 转动相对于惯性空间转动，最终导致安装误差与地球自转产生了耦合。

从式(17)可以看出，第二类误差项包含了所有的安装误差角度 η_{xz}、η_{yz}、η_{xy}、η_{zy}、η_{yx} 和 η_{zx}，因此只有一个转轴的单轴旋转式系统是不能够自动补偿安装误差引起的导航误差。而对于双轴转动的情况下，系统也不能自动抵消安装误差引起的导航误差，这是因为从式(17)的表达式来看，转过一周后数学平台的角度误差 $\int_0^T\boldsymbol{\varepsilon}^n\cdot\mathrm{d}t$ 的三个分量中没有一个为零，绕另一个轴的每次转动只能造成其中两个分量的符号反向(类似于单轴转动只能补偿两个陀螺常值漂移的情况)，这将造成不管怎么转动，每次转动总有一项是无法补偿的，最终使旋转系统不能够自动补偿安装误差引起的导航误差。

为了彻底消除第二类误差源，在旋转式系统中，必须使 IMU 的旋转是相对于惯性空间(例如地心坐标系)进行漂移误差调制，这样才能够从根本上去掉地球自转与安装误差之间的耦合。而要使 IMU 相对于惯性空间旋转，则必须采用三个或者以上的转轴才能够实现。

上面讨论了普遍情况下的安装误差效应自动补偿条件，至少要采用三轴系统才能无完全消除其误差效应。然而在实际的系统制造设计时，可以使系统满足某些条件，从而使单轴或者双轴系统也能够在一定程度上减小或者消除这些误差。

3.2　转动轴与 IMU 本体坐标系轴近似重合情况下的自动补偿分析

在通常的情况下，可以令三个陀螺的敏感轴方向近似正交安装，并使初始时刻陀螺敏感轴方向与系统转轴方向近似一致，从而使 IMU 转动时的转轴和 IMU 本体坐标系的坐标轴近似重合，此时上文中初始时刻 IMU 姿态矩阵式(9)可用初始航向角 θ_0 表示为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{11}&\boldsymbol{M}_{12}&\boldsymbol{M}_{13}\\\boldsymbol{M}_{21}&\boldsymbol{M}_{22}&\boldsymbol{M}_{23}\\\boldsymbol{M}_{31}&\boldsymbol{M}_{32}&\boldsymbol{M}_{33}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}\cos\theta_0&-\sin\theta_0&0\\\sin\theta_0&\cos\theta_0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{19}$$

将式(19)的矩阵元代入式(18)后，再将得到的结果代入到式(17)得

$$\int_0^T\boldsymbol{\varepsilon}^n\cdot\mathrm{d}t\approx\begin{pmatrix}-(\eta_{xz}+\eta_{yz})\omega_{ieN}T/2\\0\\0\end{pmatrix} \tag{20}$$

由式(20)可见,当 IMU 转动轴与 IMU 本体坐标系重合时,单轴转动抵消了部分安装误差所引起的导航误差,安装误差矩阵中 η_{xz} 和 η_{yz} 在载体运动下引起的导航误差依然存在。由于上式的三项误差分量只有一项不为零,在这种情况下,多轴旋转系统可以通过合适的转动方案而抵消全部的安装误差引起的导航误差。

例如设 IMU 本体坐标系 Z 轴与转轴之间夹角大小量级为 θ,安装误差角度的大小量级为 $\Delta\theta$,当 θ、$\Delta\theta$(单位为 rad)均为小角度时,可以根据式(17)推导得到式(20)的近似程度为

$$\int_0^T \boldsymbol{\varepsilon}^n \cdot \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} -(\eta_{xz}+\eta_{yz})\omega_{ieN}T/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{ieN}T/2 \\ \omega_{ieN}T/2 \\ 2\pi\cdot(\mathrm{sign}\ (\omega)+\omega_{ieU}/\mid\omega\mid) \end{pmatrix} \cdot o(\sin\theta\cdot\sin\ (\Delta\theta) \tag{21}$$

由此可见,通常情况下,通过正反转结合,使式(21)中的 sign (ω)消失,则式(21)中右边第二项在一定的精度范围内可以略去,说明了式(20)的近似条件是能够在旋转式系统的设计时达到的。并且补偿的效果与 IMU 本体坐标系 Z 轴和转轴之间的夹角正弦的大小有关,夹角越小,补偿效果越好。例如夹角 $\theta=1°$,安装误差角度 $\Delta\theta=2''$,那么从量级上来说,式(21)最后一项产生的误差相当于的陀螺漂移误差为

$$\omega_{ie}\cdot(\sin\theta\cdot\sin\ (\Delta\theta)) \approx 15(°/h)\times 1.69\times 10^{-7} \approx 2.5\times 10^{-6}(°/h) \tag{22}$$

这个量级的漂移误差在一般情况下是可以忽略不计的。

因此当系统转轴和 IMU 本体系的 oz_b 轴重合时,单轴系统能够自动补偿 6 个安装误差角度中的 η_{xy}、η_{zy}、η_{yx}、η_{zx} 引起的导航误差,而 η_{xz}、η_{yz} 无法自动补偿,适当的双轴转动方案则能够补偿全部 6 个安装误差角度引起的导航误差。

通过上面的讨论,似乎得到了一个矛盾的结果:光学陀螺安装误差的补偿结果与系统所定义的 IMU 本体坐标系 $x_by_bz_b$ 有关,也就是说对同一个 IMU 来说,在某一个本体坐标系下可以补偿安装误差,而重新定义另一个本体坐标系的情况下不能自动补偿安装误差。这其实不难理解,因为 IMU 的安装误差角度必须相对于某一个特定的正交坐标系(一般相对于本体坐标系)来讲才有意义,以转轴组成的正交系为参考系与以其他正交的本体坐标系为参照系定义的安装误差大小一般不会相同,当二者不重合时,在转轴坐标系看来,原有的安装误差可以分解为新的安装误差($\boldsymbol{\Delta}'$ 中的非对角元)和标度因数误差($\boldsymbol{\Delta}'$ 中的对角元),转动一周的结果是部分新的安装误差得到了补偿(式(17)中一些 $\boldsymbol{\Delta}'$ 的非对角元不存在),而标度因数误差不能够得到任何补偿(式(17)中 $\boldsymbol{\Delta}'$ 的对角元全部保留),这也符合相对于地理坐标系转动时标度因数误差不能自动补偿的结论[9]。

因此准确地说,应该是当 IMU 转动轴与定义安装误差角度的参考系的坐标轴方向一致时,才能自动补偿安装误差。加速度计的安装误差情况也是一样。这就要求在旋转式系统设计时,转轴方向最好能与惯性元件的敏感轴一致,从而抵消最多的安装误差效应。

3.3 双轴转动情况下正交安装误差的自动补偿分析

根据前面的讨论,在经过惯性测量组合的标定工作以后,得到了敏感轴坐标系 $ox_gy_gz_g$(非正交系)到 IMU 上的本体坐标系 $ox_by_bz_b$(正交系)的变换矩阵 $\boldsymbol{C}_g^{b'}$。因为仍存在剩余的安装误差,此矩阵 $\boldsymbol{C}_g^{b'}$ 把 $ox_gy_gz_g$ 系转化到了一个不准确的本体坐标系 $ox_{b'}y_{b'}z_{b'}$,如果坐标系 $ox_{b'}y_{b'}z_{b'}$ 为正交坐标系,则式(7)中的($\boldsymbol{I}+\Delta\boldsymbol{C}_g^b$)为正交矩阵,此时式(8)中的 6 个安装误差角度转化为 3 个

$$\eta_{yz}=\eta_{xz},\ \eta_{xy}=\eta_{zy},\ \eta_{zx}=\eta_{yx} \tag{23}$$

将式(23)代入式(18)后,再将得到的结果代入到式(17)得

$$\int_0^T \boldsymbol{\varepsilon}^n \cdot \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\Delta}'_{12}-\boldsymbol{\Delta}'_{21})\omega_{ieN}T/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}'_{12}-\boldsymbol{\Delta}'_{21} = {} & 2\eta_{yz}(\boldsymbol{M}_{12}\boldsymbol{M}_{21}-\boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{M}_{22})+ \\ & 2\eta_{xy}(\boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{M}_{23}-\boldsymbol{M}_{13}\boldsymbol{M}_{21})+ \\ & 2\eta_{zx}(\boldsymbol{M}_{13}\boldsymbol{M}_{22}-\boldsymbol{M}_{12}\boldsymbol{M}_{23})\end{aligned} \tag{25}$$

由式(24) 和式(25)可见,在转过一周后,$\int_0^T \boldsymbol{\varepsilon}^n \cdot \mathrm{d}t$ 包含了所有的安装误差角度 η_{yz}、η_{xy}、η_{zx},因此系统不能够自动补偿安装误差引起的导航误差。但$\int_0^T \boldsymbol{\varepsilon}^n \cdot \mathrm{d}t$ 的三个分量中有只有一个不为零,在双轴转动的情况下,恰当的方案可使不为零的那一项符号取反,使一个双轴转动周期内数学平台的误差角度全部为零,从而自动补偿所有安装误差引起的导航误差。

其实式(8)的安装误差矩阵可以分解为反对称矩阵和对称矩阵之和

$$\Delta\boldsymbol{C}_g^b = \begin{pmatrix} 0 & -(\eta_{yz}+\eta_{xz})/2 & (\eta_{xy}+\eta_{zy})/2 \\ (\eta_{yz}+\eta_{xz})/2 & 0 & -(\eta_{zx}+\eta_{yx})/2 \\ -(\eta_{xy}+\eta_{zy})/2 & (\eta_{zx}+\eta_{yx})/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (\eta_{yz}-\eta_{xz})/2 & (\eta_{xy}-\eta_{zy})/2 \\ (\eta_{yz}-\eta_{xz})/2 & 0 & (\eta_{zx}-\eta_{yx})/2 \\ (\eta_{xy}-\eta_{zy})/2 & (\eta_{zx}-\eta_{yx})/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

在式(26)的右边两项中,反对称矩阵是由坐标系的小角度转动产生的,在此称为正交安装误差矩阵;对称矩阵是由坐标轴的不正交产生的,在此称为斜交安装误差矩阵。由此可见,合适的双轴转动方案能够抵消安装误差中的正交安装误差所引起的导航误差,而斜交安装误差引起的导航误差则不能够得到抵消。

对于正交安装误差来说,无论以任何正交系为参照,只是相当于用正交矩阵对其做了一个相似变换,最后依然为

正交安装误差,所以双轴转动下正交安装误差引起的导航误差抵消情况不受安装误差参考系的坐标轴是否与转轴一致的影响。因此对于一个实际的双轴系统来说,对于正交安装误差的标定精度可以适当降低,对于斜角安装误差的估算与标定则要求较高,因为它引起的导航误差不能够被自动补偿。

4 结　论

上面在没有考虑载体角运动的情况下,对光学陀螺旋转式系统中安装误差所引起的误差效应及其自动补偿条件分析。当考虑载体角运动时,若转轴能够隔离载体角运动,则补偿效果没有影响,若转轴不能够完全隔离载体角运动,则补偿效果将会下降或者只能够部分补偿。最终根据本文的分析可以得到以下结论:

(1) 一般情况下,如果 IMU 是相对于地理坐标系转动而进行漂移误差调制的,则无法消除光学陀螺安装误差与地球自转耦合引起的导航误差。而只有采用三轴或者三轴以上的转轴,使 IMU 相对于惯性空间进行转位运动时,才能彻底消除此项导航误差源。

(2) 旋转式系统中,在转动轴与 IMU 本体坐标系轴近似重合、并以本体坐标系为参考系定义安装误差的情况下,若 IMU 相对于地理坐标系进行误差调制,则单轴系统能够自动补偿部分安装误差,双轴系统则能够自动补偿所有安装误差,由此在单轴和双轴系统设计时,光学陀螺的敏感轴方向最好要能够与系统转动轴方向一致。

(3) 在双轴旋转式系统中,若无法满足上述(2)中的条件,则安装误差中只有正交安装误差能够得到自动补偿,而斜交安装误差则不能够得到自动补偿,因此在系统标定工作或者精度分析时,要特别注意斜交安装误差与地球自转耦合对导航精度的影响。

(4) 无论是单轴还是多轴的旋转式导航系统,都要避免转轴向一个方向持续转动,而应采用正转一段时间,再反转相同角度的转位方案,以防止光学陀螺安装误差和转位运动耦合而引起的大的导航误差,这在设计多轴转位方案时必须要加以注意。

上述结论是对安装误差的相关效应进行理论分析得到的。在实际的工程实现中,这些结论或者要求并不需要全部满足,而只是根据系统精度要求和所用陀螺的精度指标进行一定的取舍,下面对此进行一些说明:

对于结论(1)来说,如果系统采用光纤陀螺,由于光纤陀螺的敏感轴方向具有一定的不稳定性,这就相当于产生了一个安装误差,因此为了消除这项误差,取得高的精度,满足战略级的惯性导航要求,采用三轴或者三轴以上的系统方案是必须的,这也是美国研制三轴连续旋转光纤陀螺惯性导航系统[10]的原因所在;而如果系统采用了激光陀螺,由于激光陀螺的敏感轴的稳定性较好,但角度随机游走系数较大,系统采用三轴或者三轴以上转动方案从成本、可靠性、最终效果等方面都需要仔细斟酌,而采用单轴方案(如 WSN-7B 系统)或者双轴方案(如 WSN-7A 系统)则是较为合适。

对于结论(2)来说,光学陀螺敏感轴的方向与系统转动轴方向一致在系统设计上是比较容易满足的,因为它们并不需要严格一致,根据式(22),它们之间的夹角只要减小到一定程度即可满足导航精度的要求。

对于结论(3)来说,在工程实现上,如果最终斜交安装误差与地球自转耦合的影响较小,那么完全可以不加考虑,如果分析后认为影响较大,那么需要进一步在标定工作中对其进行标定,然后在导航软件中进行补偿。

对于结论(4)来说,系统的转位方案都必须满足正反转角度相同的基本要求,这在方案设计上是能够实现的。例如对于单轴系统 WSN-7B,采用了四位置转停方案[5],正反转动的角度均为 270°,从而避免了安装误差和转位运动的耦合。

参考文献:

[1] 赵文芳,赵伟,钱伟行,等. 捷联惯导连续旋转方位轴式初始对准研究[J]. 系统工程与电子技术,2009,31(4):934 - 937.(Zhao W F, Zhao W, Qian W X, et al. Initial alignment of SINS based on the continuous rotation of the azimuth axis [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009,31(4):934 - 937.)

[2] Lahham J I, Wigent D J, Coleman A L. Tuned support structure for structure-borne noise reduction of inertial navigator with dithered ring laser gyros (RLG)[C]// *Proc. of Position Location and Navigation Symposium*, 0 - 7803 - 5872 - 4,2000:419 - 428.

[3] Tucker T, Levison E. The AN/WSN－7B marine gyrocompass/navigator[C]// *Proc. of National Technical Meeting of the Institute of Navigation* (*ION NTM*), 2000,26 - 28,348 - 357.

[4] Lahhan J I, Brazell J R. Acoustic noise reduction in the MK49 Ship's inertial navigation system (SINS)[C]// *Proc. of IEEE PLANS Position Location and Navigation Symposium*, Monterey, 1992:32 - 39.

[5] Levinson E, Majure R. Accuracy enhancement techniques applied to the marine ring laser inertial navigator (MARLIN)[J]. *Navigation*, 1987,34(1):64 - 86.

[6] 袁保伦,饶谷音. 光学陀螺旋转惯导系统原理探讨[J]. 国防科技大学学报,2006,28(6):76 - 80.

[7] Titterton D H, Weston J L. *Strapdown inertial navigation technology* [M]. 2nd ed. Lexington, Massachusetts, USA: Copublished by the American institute of Aeronautics and Astronautics and the Institution of Electrical Engineers, 2004: 342 -344.

[8] 张树侠,孙静. 捷联式惯性导航系统[M]. 北京:国防工业出版社,1992.

[9] 袁保伦. 四频激光陀螺旋转式惯导系统研究[D]. 长沙:国防科学技术大学,2007.

[10] Morrow R B Jr, Heckman D W. High precision IFOG insertion into the strategic submarine navigation system[C]// *Proc. of IEEE PLANS Position Location and Navigation Symposium*, 1998:332 - 338.