

Bayes 方法应用中验前分布选择的一致性 与可信性原则

刘琦, 武小悦

(国防科学技术大学信息系统与管理学院, 湖南长沙 410073)

摘要: Bayes 方法已在装备的参数估计与决策分析中得到了广泛应用。现有的研究主要集中于验前分布的构造与方法的工程应用, 而对验前信息之间的一致性、验前信息的可信性研究较少。给出了验前信息一致性的定义与检验方法, 建立了验前可信性分析的假设检验模型。以此为基础, 建立了基于一致性与可信性的验前分布融合模型。最后, 以装备可靠性分析为例, 对一致性、可信性的计算过程进行说明。

关键词: Bayes 方法; 一致性; 可信性; 融合; 装备

中图分类号: TP 114

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2010.11.22

Principles of consistency and reliability for prior distributions selection in Bayesian method application

LIU Qi, WU Xiao-yue

(Coll. of Information Systems and Management, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Bayesian method has been widely used in equipment parameter evaluation and decision making. However, existing studies focus on the structure of prior distribution and the engineering applications of the method, and there are few discourses on the analysis of consistency among prior distributions and the reliability of prior informations. The definition and testing methods for consistency analysis are given, the hypothesis testing model of prior reliability is built. Based on an analysis of consistency and prior reliability, a prior information fusion model is constructed. For an equipment reliability analysis example, the calculation process of consistency and prior reliability is exhibited.

Keywords: Bayes method; consistency; reliability; fusion; equipment

0 引言

随着装备复杂化与军事需求的发展, 装备现场试验的样本量不断减小, 运用 Bayes 方法, 融合装备的各类信息, 完成装备的试验与评价 (如导弹系统的可靠性、精度分析等), 已得到了广泛的工程应用, 并出版了大量专著^[1-3], 并且在国军标中得到初步体现, 如 GJB 3868-99《潜舰导弹定型试验规程》。现有的研究表明验前分布的确定是非常重要的, 它对验后估计具有明显的影响^[4]。

目前对验前信息的分析, 国内外的专家关注的是验前信息的获取、融合与验前分布的计算。在验前信息的融合中, 当前的融合方法主要是基于分布加权的验前信息融合。如蔡洪^[5]对基于可信度的验前信息融合方法进行了研究。满军^[6]在考虑验前信息可信度的条件下, 对基于一致性检

验的 Bayes 加权融合方法进行了研究。柴建^[7]对加权融合估计中权重确定的极大似然方法进行了研究。冯静等^[8]采用模糊逻辑融合算子来描述多源验前信息之间的冗余性和互补性, 确定融合验前分布的非线性加权形式。刘晗等^[9]基于继承因子对验前分布的线性加权方法进行了论述。对于多阶段试验信息的融合, 段晓君等^[10]对基于复合等效可信度加权的 Bayes 融合方法进行了论述。从验前分布对未知参数描述的力度看, 不同的验前分布所提供的信息质量是不同的^[11], 甚至有时运用不同的验前分布进行统计推断, 可能得出完全相反的结论。从文献检索情况看, 现有验前信息融合方法, 关注的焦点在于各验前分布权重的计算, 而没有考虑到多个验前信息之间的一致性以及验前分布本身的可信性。

本文首先给出多源验前信息之间一致性的定义与计算

收稿日期: 2009-03-27; 修回日期: 2009-06-30。

基金项目: 国家自然科学基金(70971133)资助课题

作者简介: 刘琦(1974-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为系统评估与决策分析。E-mail: liuqigkd@yahoo.com.cn

方法,然后对验前分布可信性分析的假设检验方法进行论述。在此基础上,给出了基于验前可信度的加权融合方法。最后以装备可靠性分析为例进行了示例分析。

1 验前信息一致性的定义与检验

《辞海》(1989 年版)给出一致的定义为:趋向相同。《新牛津美语大词典》将一致性(consistency)定义为:conformity in the application of something, typically that which is necessary for the sake of logic, accuracy, or fairness。可见,一致性描述了不同描述形式之间相符合的程度。结合多源信息融合的要求,本文将验前分布的一致性定义为:不同验前分布之间相重合的程度。

设对于未知参数 θ ,得出其不同来源的验前分布分别为 $\pi_1(\theta)$ 、 $\pi_2(\theta)$ 与 $\pi_3(\theta)$,如图 1 所示。从图中可见 $\pi_1(\theta)$ 与 $\pi_3(\theta)$ 之间的差异较大,如果分别运用两种分布作为验前分布进行 θ 的统计推断时,可能得出完全不同的结果。 $\pi_3(\theta)$ 与 $\pi_2(\theta)$ 相比,虽然 $\pi_3(\theta)$ 的方差较小,但从描述参数的角度看,两者之间的差异远小于 $\pi_1(\theta)$ 与 $\pi_3(\theta)$ 之间的差异。因此,可将多个验前分布之间的一致性定义为:多个验前分布所共同包围的区间的概率值,记为 C 。用公式表示为

$$C = \int_{\Theta} \text{Min}(\pi_i(\theta), i = 1, 2, \dots, n) d\theta \quad (1)$$

式中, Θ 为 θ 的取值范围, $\pi_i(\theta)$ 为 θ 的第 i 个验前分布 ($i = 1, 2, \dots, n$)。

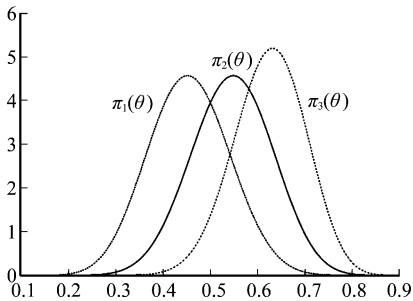


图 1 验前分布一致性示意图

从上述定义可见: C 越大表示验前分布的一致程度越高,基于不同验前分布得出的 θ 的验后推断的差异越小; C 越小表明各验前分布之间的差异越大,有可能导致基于不同验前分布得出的 θ 的验后推断有显著性的差异。

在验前信息的融合过程中,验前分布的一致性越小,说明对于未知参数 θ 的认知程度差异越大,此时对验前分布进行融合,进而进行统计推断是没有意义的,甚至可能得出错误的结果。如图 1 所示,若选择 $\pi_1(\theta)$ 和 $\pi_3(\theta)$ 作为 θ 的验前分布,从图可见,这个验前分布都认为 θ 的验前分布是单峰的,而用简单的线性加权融合,可能得出 θ 的验前分布是双峰甚至是多峰的。而用 D-S 证据理论^[12]融合,突出的是两个分布相交部分的概率,则可能造成验前信息的损失。因此,需在进行验前信息融合之前,进行验前信息的一致性检验。

验前信息一致性检验的假设如下:

H_0 : 多源验前信息是一致的;

H_1 : $\pi_i(\theta)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 中至少有两个分布不一致。

对于给定的一致性要求 C_R ($0 < C_R < 1$),根据式(1)计算 C ,并作如下判断:

(1) 若 $C_R \geq C$,则认为 H_0 成立;

(2) 若 $C_R < C$,则认为 H_0 不成立。

当 H_0 不成立时,可进一步对每个 $\pi_i(\theta)$ 进行验证,确保 $\pi_i(\theta)$ 的正确性,否则对有误的 $\pi_i(\theta)$ 进行更改,重新进行上述检验。在各 $\pi_i(\theta)$ 不可更改的基础上,进行下述两两比较检验(称为多重比较)。

H_0^{ij} : $\pi_i(\theta)$ 与 $\pi_j(\theta)$ 一致

H_1^{ij} : $\pi_i(\theta)$ 与 $\pi_j(\theta)$ 不一致

上述假设中 $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$ 。

通过上述假设,对 $\pi_i(\theta)$ 与 $\pi_j(\theta)$ 进行两两比较分析,对差异比较大的验前分布,分析差异比较大的原因,剔除不合理或者不正确的验前分布。

通过多次进行上述的一致性检验与多重比较,即可选择或者重新构造出一致性较强,且比较科学合理的验前分布。

2 验前可信度的定义与计算

验前分布的一致性分析,仅给出了验前分布之间的对比分析,然而验前分布能否准确地描述未知参数 θ ,这就是验前信息的可信性问题。

从统计学的角度,可信度或信度是指测量数据和结论的可靠性程度,也就是说测量工具能否稳定地测量到它要测量的事项的程度^[13]。

由于 Bayes 方法中将待估计的未知参数表示为随机变量,并且有一定的分布,因此将上述定义进行扩展,在 Bayes 分析中,将验前可信度可定义为:验前可信度为验前信息准确地描述待估计参数的分布的程度,记为 R 。

从上述定义可见,验前可信度描述了验前信息与未知参数分布的一致程度,且不难得出这样的结论:验前可信度越高,利用验前信息进行 Bayes 统计推断时,得出的推断结果越可信。

验前信息通常包括验前子样与验前分布两种情况,前者主要是由类似系统、相关型号装备的历史试验数据等组成,后者主要是由专家信息、可靠性增长的统计推断等途径得出。因此对于验前可信度的计算可分为验前子样与验前分布两种情况分别进行。

以验前子样为基础的验前可信度,张金槐等给出了基于非参数检验的计算方法^[2],在此不再赘述。下面仅给出基于验前分布的验前可信度计算方法。

记 $\pi_0(\theta)$ 为关于未知参数 θ 的验前分布, x 为现场试验结果。则由信仰推断方法^[14],可得在获得 x 的条件下 θ 的信仰分布 $g(\theta|x)$ 。 $\pi_0(\theta)$ 与 $g(\theta|x)$ 之间的关系如图 2 所示。

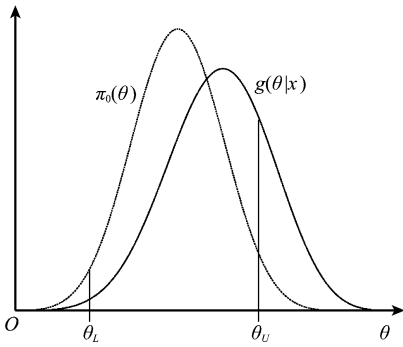


图 2 基于验前分布的可信度计算

构造如下假设

$$H_0 : \pi_0(\theta) \text{ 与 } g(\theta | x) \text{ 分布相同}$$

$$H_1 : \pi_0(\theta) \text{ 与 } g(\theta | x) \text{ 分布不同}$$

记 A 为采纳 H_0 的事件, \bar{A} 为拒绝 H_0 (即采纳 H_1) 的事件。在上述假设条件下, 验前可信度可表示为

$$R = P(H_0 | A) \tag{2}$$

式(2)表示在采纳 H_0 的条件下, H_0 成立的概率。

以 $\pi_0(\theta)$ 为基础, 可得 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ (α 为给定的犯 I 类错误的概率) 的置信区间 $C_{\pi_0} = [\theta_L, \theta_U]$ 。这样, 在 H_0 成立的条件下, 有式(3)成立

$$P(A | H_0) = 1 - \alpha, P(\bar{A} | H_0) = \alpha \tag{3}$$

根据上述计算过程, 可得犯第 II 类错误的概率(采伪概率)为

$$\beta = P(A | H_1) = \int_{C_{\pi_0}} g(\theta | x) d\theta \tag{4}$$

结合 Bayes 公式, 可得验前可信度

$$R = P(H_0 | A) = \frac{P(A | H_0)P(H_0)}{P(A | H_0)P(H_0) + P(A | H_1)(1 - P(H_0))} \tag{5}$$

式(5)中, $P(A | H_1) = \beta$ 为犯第二类错误的概率(采伪概率), $P(H_0)$ 为接收原假设 H_0 的验前概率。

进一步, 验前可信度表示为

$$R = P(H_0 | A) = \frac{(1 - \alpha)P(H_0)}{(1 - \alpha)P(H_0) + \beta(1 - P(H_0))} \tag{6}$$

由式(6)可见, 计算验前可信度, 需得到 $P(H_0)$ 。当对假设 H_0 和 H_1 的验前信息一无所知时, 可假设 $P(H_0) = 0.5$ 。事实上, 通过对验前信息的 VV&A 等分析, 可得出 $P(H_0)$ 的取值, 通常情况下有 $P(H_0) > 0.5$ 。

3 验前分布的加权融合方法

从上述两节可见, 验前信息的一致性描述了不同验前分布之间差异的程度, 验前可信度以统计分析为基础描述了验前信息描述未知参数的可信程度。但从分析过程看, 两者的计算是以统计学知识为基础的, 具有一定的采伪或者错判的概率。因此对于验前分布的融合还要考虑信息本身的来源, 对验前信息的重要度进行分析。下面以验前信息的重要度和可信度为基础, 给出验前信息融合的加权模型。

记有不同来源的验前分布分别为 $\pi_i(\theta)$, 各验前信息的可信度分别为 R_i , 重要度分别为 W_i , 其中 $i=1, 2, \dots, n$ 。则融合后的验前分布为

$$\pi_r(\theta) = \sum_{i=1}^n W_i R_i \pi_i(\theta) / \sum_{i=1}^n W_i R_i \tag{7}$$

在获得不同来源的验前分布后, 首先对各验前分布的可信性进行分析, 选择可信性高的验前分布, 而剔除可信度低的验前分布。然后再对验前分布的一致性进行检验, 选择一致程度高的验前分布, 如果对验前分布有所调整, 仍需分析其可信性。在可信和一致的基础上, 由式(7)完成验前分布的融合。

4 案例分析

在可靠性评估中, 指数分布是一类非常重要的分布, 下面以指数分布验前信息的一致性与可信性分析为例, 说明验前分布的融合过程。

设某装备的寿命服从指数分布, 现场试验为无替换定时截尾试验, 试验结果如表 1 所示^[15]。

表 1 某装备定时试验结果										天
机号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
寿命	2	—	51	—	33	27	14	24	4	—
截尾	81	72	70	60	41	31	31	30	29	21

假设经过对验前信息的分析, 得到该装备失效率 λ 的三个验前分布均为 Gamma 分布, 分别为

$$\pi_1(\lambda) = G(39, 1\ 800)$$

$$\pi_2(\lambda) = G(40, 800)$$

$$\pi_3(\lambda) = G(32, 1\ 316)$$

三个验前分布的权重分别为 0.5, 0.2, 0.3。三个验前分布为参数 θ 的验前分布的验前概率分别为: 0.9, 0.5, 0.8。

由上述数据可得总试验时间为: $T=308$, 失效次数为 $r=7$ 。由定时截尾试验指数分布的性质, 有

$$2\lambda T \sim \chi^2(2r + 2) \tag{8}$$

在获得 T 的条件下, 将 λ 作为随机变量, 根据随机变量函数的分布的计算, 可得 λ 的信仰分布为

$$g(\lambda | T) = \frac{1}{2^{r+1} \Gamma(r + 1)} (2T)r + 1\lambda^r \exp(-\lambda T) \tag{9}$$

信仰分布与验前分布的图形如图 3 所示。各验前分布的一致程度如表 2 所示。

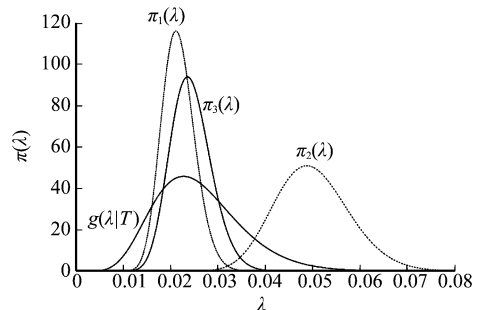


图 3 验前分布与信仰分布图

表 2 各验前分布的一致程度

验前分布	一致程度
$\pi_1(\lambda), \pi_2(\lambda), \pi_3(\lambda)$	0.009 0
$\pi_1(\lambda), \pi_2(\lambda)$	0.009 0
$\pi_2(\lambda), \pi_3(\lambda)$	0.030 9
$\pi_1(\lambda), \pi_3(\lambda)$	0.732 4

从上述分析结果可见, 验前分布 $\pi_1(\lambda), \pi_2(\lambda), \pi_3(\lambda)$ 三者之间的一致较差, 这说明这三者是难以同时作为 λ 的验前分布的。而且从进一步分析以及图形可见, $\pi_2(\lambda)$ 与其他两者之间的一致性较差。因此, 在验前分析中, 需进一步对 $\pi_2(\lambda)$ 的正确性进行分析。另外, 对比 $\pi_2(\lambda)$ 与 $g(\lambda|T)$, 可见两者之间的吻合程度较低。所以, 在此将其剔除。

为了计算各验前分布的可信度, 选择置信水平 $1-\alpha=0.9$, 置信区间选择等尾置信区间。各验前分布可信性的计算结果如表 3 所示。

表 3 各验前分布的可信性计算

验前分布	置信区间	β	$P(H_0)$	验前可信度
$\pi_1(\lambda)$	[0.016 3, 0.027 7]	0.483 0	0.9	0.943 7
$\pi_2(\lambda)$	[0.037 7, 0.063 7]	0.106 9	0.5	0.893 8
$\pi_3(\lambda)$	[0.017 7, 0.031 8]	0.576 1	0.8	0.862 0

根据上述分析结果, 选择 $\pi_1(\lambda), \pi_3(\lambda)$ 作为 λ 的验前分布的, 根据式(7)进行融合, 可得融合后的验前分布为

$$\pi(\lambda) = \frac{0.943\ 7 \times 0.5 \times \pi_1(\lambda) + 0.893\ 8 \times 0.3 \times \pi_3(\lambda)}{0.943\ 7 \times 0.5 + 0.893\ 8 \times 0.3} = 0.637\ 6\pi_1(\lambda) + 0.362\ 4\pi_3(\lambda)$$

5 结束语

本文以验前分布的一致性和可信性为基础, 对验前分布的融合方法进行研究。从研究的情况看, 验前信息的一致性反映了各验前分布之间的一致程度, 可信度反映了验

前分布与现场试验结果之间的一致程度。两者从不同的方面对验前分布的正确性进行分析, 在验前分布的融合中, 两者缺一不可。

参考文献:

- [1] Thomas L, Hsu S J J. *Bayesian methods: an analysis for statisticians and interdisciplinary researchers* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [2] 张金槐, 刘琦, 冯静. Bayes 试验分析方法[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2007.
- [3] 武小悦, 刘琦. 装备试验与评价[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
- [4] Maisch M, Wacker M, Bertsche B. Analysis of the staircase method considering the Bayes theorem [C] // *Reliability and Maintainability Symposium*, 2005.
- [5] 蔡洪, 张士峰, 张金槐. Bayes 试验分析与评估[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2004.
- [6] 满军, 张湘平. 基于可信度的 Bayes 融合方法在可靠性评估中的应用[J]. 电子质量, 2005(5): 29-30.
- [7] 柴建, 师义民, 魏洁琼. 多源验前信息下先验分布的融合方法[J]. 科学技术与工程, 2005, 20(5): 1479-1481.
- [8] 冯静, 周经伦. 基于 Bayes-模糊逻辑算子的小子样可靠性信息融合方法[J]. 航空动力学报, 2008, 23(9): 1633-1636.
- [9] 刘晗, 鄂波. 融合多源验前信息的成选型产品可靠性 Bayes 评估[J]. 弹箭与制导学报, 2007, 27(2): 338-341.
- [10] 段晓君, 王刚. 基于复合等效可信度加权的 Bayes 融合评估方法[J]. 国防科技大学学报, 2008, 30(3): 90-94.
- [11] Prasanth R, Smith R, Mehra R, et al. Quality of information metrics for autonomous decision making[R]. A0343882, 2003.
- [12] Challa S, Koks D. An introduction to Bayesian and Dempster-Shafer data fusion[R]. ADA417895, 2003.
- [13] Gilbert A C, Jr Dawn I. *Marketing research: methodological foundations* [M]. 9th ed. Thomson Learning, 2007.
- [14] 杨军, 赵宇, 于丹. 基于信仰推断的电子设备可靠性增长数据分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2008, 34(9): 995-998.
- [15] 周源泉, 翁朝曦. 可靠性评定[M]. 北京: 科学出版社, 1990.