

文章编号: 1000-6893(1999)03-0268-04

# 粘弹阻尼结构模态灵敏度分析的模态展开方法

童 昕

(华侨大学 机电工程系, 福建 泉州 362011)

## MODAL SUPERPOSITION METHOD FOR MODAL SENSITIVITY ANALYSIS OF VISCOELASTICALLY DAMPED STRUCTURES

TONG Xin

(Department of Mech. & Elect. Eng., Huaqiao University, Quanzhou 362011, China)

**摘 要:** 建立了粘弹阻尼结构的模态灵敏度分析的模态展开方法, 其形式较为简单, 与粘性阻尼结构灵敏度分析的模态展开法相类似, 计算较为简便。并对有限自由度的离散粘弹阻尼结构的算例进行了振动模态灵敏度分析。

**关键词:** 粘弹性; 模态分析; 灵敏度

**中图分类号:** V214.4; O343 **文献标识码:** A

**Abstract:** A modal superposition method for modal sensitivity analysis of viscoelastically damped structures is established based on a simplified form of modal analysis of viscoelastically damped structures, in which the modal sensitivity can be calculated using the modes obtained. Its form is simple and similar to the form of the modal superposition for modal sensitivity analysis of linear viscously damped structures, so the calculation is much simpler. The method proposed lays the foundation of dynamic design and structure modification of viscoelastically damped structures. An example of sensitivity analysis of the vibrating modes of a limited freedom discrete viscoelastically damped structure is given. The example demonstrates that the contribution of creeping modes to the sensitivity analysis of eigenvectors of vibrating modes is small and the calculation has a good accuracy when the sensitivity of eigenvectors of many vibrating modes is calculated.

**Key word:** viscoelasticity; modal analysis; sensitivity

粘弹阻尼结构的模态灵敏度分析是粘弹阻尼结构的动态设计和结构动力修改的重要基础。粘弹阻尼结构由于存在粘弹性, 其动力学方程较为复杂, 为其模态灵敏度分析带来困难, 关于粘弹阻尼结构的模态灵敏度分析鲜见报道。

无阻尼结构模态灵敏度分析的模态展开法<sup>[1]</sup>, 利用已计算得到的模态计算模态灵敏度, 因而计算较为简便, 特别是计算多个模态的灵敏度时, 模态展开法具有突出的优越性<sup>[2]</sup>。文献[3]提出了粘弹阻尼结构的模态分析的简单形式, 本文在此基础上, 建立粘弹阻尼结构的模态灵敏度分析的模态展开方法。并对有限自由度的离散粘弹阻尼结构的算例进行振动模态的灵敏度分析。

### 1 粘弹阻尼结构模态灵敏度分析

文献[3]对粘弹阻尼结构进行模态分析, 其结果为

$$H(s) = \sum_{i=1}^{2N+Kr} \frac{U_i U_i^T}{s - \lambda_i} \quad (1)$$

其中:  $N$  为结构的自由度数;  $K$  为标准形式的松弛函数  $G(t)$  中多项式的项数;  $r$  为粘弹性刚度阵的秩;  $K, U$  为满足如下特征值方程及归一化条件的特征值和特征向量<sup>[3]</sup>,

$$(\hat{K}M + K_e + G^*(K)K_v)U = 0 \quad (2)$$

$$U^T \frac{\partial}{\partial s} (s^2 M + K_e + G^*(s)K_v) \hat{u}_{s=\lambda_i} U = 1 \quad (3)$$

式中:  $M, K_e, K_v$  分别为质量阵、弹性刚度阵和粘弹性刚度阵;  $G^*(s) = sL(G(t))$ ,  $G(t)$  为粘弹材料标准形式的松弛函数。

本文假设粘弹结构的特征值为非重根。为方便, 令:  $J = 2N + Kr$ , 并假设

$$Z(s) = s^2 M + K_e + G^*(s)K_v \quad (4)$$

则特征值方程(2)和归一化条件式(3)分别写为

$$Z(K)U = 0 \quad (5)$$

$$U^T \left. \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \right|_{s=\lambda_i} U = 1 \quad (6)$$

首先建立若干基本关系式。传递函数矩阵  $H(s)$  与  $Z(s)$  互逆, 考虑式(1)的传递函数矩阵表

达式, 有如下关系

$$Z(s) \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{s - K} = I \quad (7)$$

考虑  $s$  在  $K$  的微小  $E$  邻域内, 将上式展开为  $E$  的幂级数。取  $s = K + E$ , 代入式(7)中,

$$Z(K + E) \left( \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{K + E - K} + \frac{U U^T}{E} \right) = I \quad (8)$$

$E$  很小时, 上式展开为

$$\left[ Z(K) + E \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \Big|_{s=K} + \frac{1}{2} E^2 \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} + \dots \right] \times \left[ \frac{U U^T}{E} + \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{K - K} \left( 1 - E \frac{1}{K - K} + \dots \right) \right] = I \quad (9)$$

则有:

$$\left. \begin{aligned} E^{-1} \quad & Z(K) U U^T = 0 \\ E^0 \quad & I - \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \Big|_{s=K} U U^T = Z(K) \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{K - K} \\ E^1 \quad & \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \Big|_{s=K} \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{K - K} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} \times \\ & U U^T = Z(K) \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{(K - K)^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(10)中第一个式子自动满足特征值方程(5)。

下面利用式(10)中的关系式建立粘弹阻尼结构的模态灵敏度分析方法。假设结构某参数为  $y$ , 各结构矩阵  $M, K_e$  和  $K_v$  为  $y$  的函数, 由式(4), 矩阵  $Z(s)$  也是  $y$  的函数。将特征值方程(5)和归一化条件式(6)对结构参数  $y$  求偏导

$$\frac{\partial Z(s)}{\partial y} \Big|_{s=K} U + \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \Big|_{s=K} \frac{\partial K}{\partial y} U + Z(K) \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} 2U^T \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \Big|_{s=K} \frac{\partial U}{\partial y} + U^T \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} U + \\ U^T \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} \frac{\partial K}{\partial y} U = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

将式(11)两端左乘  $U^T$ , 并由特征值方程(5)及归一化条件式(6), 有

$$\frac{\partial K}{\partial y} = - U^T \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \Big|_{s=K} U \quad (13)$$

得到特征值  $K$  对结构参数  $y$  的灵敏度。

下面导出特征向量  $U$  对结构参数  $y$  的灵敏度。将式(13)代回到式(11)及式(12), 并整理有

$$\left( I - \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \Big|_{s=K} U U^T \right) \frac{\partial Z(s)}{\partial y} \Big|_{s=K} U + Z(K) \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 2U^T \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \Big|_{s=K} \frac{\partial U}{\partial y} + U^T \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} U - \\ U^T \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} U U^T \frac{\partial Z(s)}{\partial y} \Big|_{s=K} U = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

将式(10)中的第2个式子代入到式(14)中, 有

$$Z(K) \left( \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{K - K} \frac{\partial Z(s)}{\partial y} \Big|_{s=K} U + \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0 \quad (16)$$

显然, 上式中括号内的项满足特征值方程, 必是特征值方程的特征向量, 它可以表示为:

$$\sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{K - K} \frac{\partial Z(s)}{\partial y} \Big|_{s=K} U + \frac{\partial U}{\partial y} = A U \quad (17)$$

则得到特征向量  $U$  对结构参数  $y$  灵敏度的表达式

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A U - \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{K - K} \frac{\partial Z(s)}{\partial y} \Big|_{s=K} U \quad (18)$$

该表达式中包含有未知参量  $A$ , 下面确定未知参量  $A$ 。将上式代入到式(15), 有

$$\begin{aligned} 2U^T \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \Big|_{s=K} \left( A U - \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{K - K} \frac{\partial Z(s)}{\partial y} \Big|_{s=K} U \right) + \\ U^T \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} U - U^T \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} U U^T \times \\ \frac{\partial Z(s)}{\partial y} \Big|_{s=K} U = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

考虑到归一化条件式(6), 进一步整理为

$$\begin{aligned} 2A + U^T \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} U - 2U^T \left( \frac{\partial Z(s)}{\partial s} \Big|_{s=K} \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{K - K} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} U U^T \right) \frac{\partial Z(s)}{\partial y} \Big|_{s=K} U = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

将式(10)的第3个式子代入到上式中, 并考虑到特征值方程(5), 则上式左端第3项为零。因此, 得到未知参量  $A$  的表达式

$$A = - \frac{1}{2} U^T \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} U \quad (21)$$

将表达式(21)代回到式(18)中, 得到特征向量  $U$  对结构参数  $y$  的灵敏度

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{2} U U^T \frac{\partial^2 Z(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=K} U - \\ \sum_{j=1}^J \frac{U U^T}{K - K} \frac{\partial Z(s)}{\partial y} \Big|_{s=K} U \end{aligned} \quad (22)$$

式中:右端第1项为U的相关项;第2项为其它阶模态相关项的叠加。

至此,建立了粘弹阻尼结构模态灵敏度分析的模态展开形式式(13)、式(22)。由式(13)和式(22)可以看到,它们的形式与粘性阻尼结构的模态灵敏度分析的模态展开形式<sup>[4]</sup>相类似,较为简单,因而计算较为简便。由以上推导可以看出,式(13)和式(22)为模态灵敏度分析的模态展开的精确表达式。计算特征向量灵敏度时,如取全部模态,计算结果为精确解。

粘弹阻尼结构的模态中包含有振动模态和蠕变模态,其中蠕变模态代表指数衰减运动,其对响应的贡献按指数迅速衰减,振动模态代表衰减振动,是振动的主要模态<sup>[4]</sup>。在计算第*i*阶振动模态的特征向量灵敏度时,式(22)中其它阶模态的叠加项中,分母为第*i*阶振动模态特征值与第*j*阶模态特征值之差。蠕变模态的特征值是负实数,其量级较大,通常接近于粘弹材料的松弛因子<sup>[5]</sup>,是蠕变模态叠加项中分母的实部的主要成分,其量级比振动模态叠加项中分母的实部大许多。蠕变模态叠加项中分母的虚部为第*i*阶振动模态特征值的虚部,其量级与第*i*阶振动模态邻近的振动模态的叠加项中分母的虚部的量级相当。所以蠕变模态叠加项中分母的模,要比第*i*阶振动模态邻近的振动模态的叠加项中分母的模大许多,导致蠕变模态的贡献相对第*i*阶振动模态邻近的振动模态的贡献较微弱。

为验证本文建立的灵敏度分析方法的计算精度,本文做了如下算例。

## 2 振动模态灵敏度计算算例

为表明计算特征向量灵敏度时,模态截留对

计算精度的影响,本文对图1所示的12自由度的离散系统进行了算例分析。其中: $G(t)$ 为粘弹材料的松弛函数, $G(t) = 4.0 \times 10^3 + 49.8 \times 10^3 e^{-1685.6t} + 1196.2 \times 10^3 e^{-148314.4t}$ ,结构的其他参数见表1。该结构共有12对共轭的振动模态。

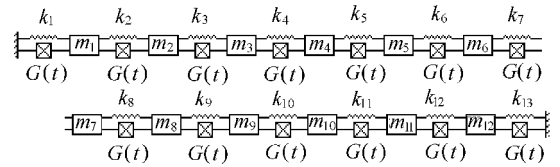


图1 算例结构示意图

本文分别取全部模态、全部振动模态(忽略蠕变模态)、前5对共轭振动模态计算对 $k_{13}$ 的模态灵敏度,其中取全模态时为精确解。表2分别列出了第1阶模态(第1对共轭模态之一)、第7阶模态(第4对共轭模态之一)的特征向量灵敏度计算结果。第1阶模态、第7阶模态的特征值灵敏度计算结果分别为: $0.18444 \times 10^{-6} + j0.76595 \times 10^{-4}$ 、 $-0.23294 \times 10^{-6} + j0.92533 \times 10^{-5}$ 。由表2中可以看出,蠕变模态对振动模态的特征向量灵敏度计算结果影响很小,表明蠕变模态对振动模态特征向量灵敏度的贡献较微弱;当取前5对共轭振动模态计算特征向量灵敏度时,前4对共轭振动模态的特征向量灵敏度计算结果与取全部模态的计算结果比较,有较好的精度,这一点与无阻尼结构类似:模态展开法计算特征向量灵敏度时,计算多个模态的特征向量灵敏度,可以有较好的精度。

表1 图1所示结构参数

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$m_i/\text{kg}$	32.0	16.0	8.0	4.0	2.0	1.0	1.0	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0	-
$k_i/10^3 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	1.0	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0	64.0	32.0	16.0	8.0	4.0	2.0	1.0

表2 图1所示结构振动模态特征向量灵敏度计算结果

取全部模态	第1阶振动模态		第7阶振动模态		
	忽略蠕变模态	取10阶振动模态	取全部模态	忽略蠕变模态	取10阶振动模态
0.82425E-08 - j0.85457E-08	0.82425E-08 - j0.85457E-08	0.82411E-08 - j0.85444E-08	0.74183E-09 - j0.71926E-09	0.74183E-09 - j0.71926E-09	0.74118E-09 - j0.71868E-09
0.51043E-08 - j0.52860E-08	0.51043E-08 - j0.52860E-08	0.51251E-08 - j0.53066E-08	- 0.88661E-09 + j0.90127E-09	- 0.88661E-09 + j0.90127E-09	- 0.87684E-09 + j0.89223E-09
0.14099E-08 - j0.15202E-08	0.14099E-08 - j0.15202E-08	0.13555E-08 - j0.14661E-08	- 0.14593E-08 + j0.14386E-08	- 0.14593E-08 + j0.14386E-08	- 0.14849E-08 + j0.14627E-08

续表 2

第 1 阶振动模态			第 7 阶振动模态		
取全部模态	忽略蠕变模态	取 10 阶振动模态	取全部模态	忽略蠕变模态	取 10 阶振动模态
- 0.95368E- 09 + j0.87340E- 09	- 0.95368E- 09 + j0.87340E- 09	- 0.99177E- 09 + j0.91125E- 09	- 0.14763E- 08 + j0.14426E- 08	- 0.14763E- 08 + j0.14426E- 08	- 0.14939E- 08 + j0.14591E- 08
- 0.22576E- 08 + j0.21900E- 08	- 0.22576E- 08 + j0.21900E- 08	- 0.22768E- 08 + j0.22090E- 08	- 0.14004E- 08 + j0.13645E- 08	- 0.14004E- 08 + j0.13645E- 08	- 0.14090E- 08 + j0.13725E- 08
- 0.29438E- 08 + j0.28818E- 08	- 0.29438E- 08 + j0.28818E- 08	- 0.29518E- 08 + j0.28897E- 08	- 0.13400E- 08 + j0.13044E- 08	- 0.13400E- 08 + j0.13044E- 08	- 0.13434E- 08 + j0.13075E- 08
- 0.32923E- 08 + j0.32329E- 08	- 0.32923E- 08 + j0.32329E- 08	- 0.32945E- 08 + j0.32351E- 08	- 0.13044E- 08 + j0.12693E- 08	- 0.13044E- 08 + j0.12693E- 08	- 0.13051E- 08 + j0.12700E- 08
- 0.40019E- 08 + j0.39480E- 08	- 0.40019E- 08 + j0.39480E- 08	- 0.39923E- 08 + j0.39385E- 08	- 0.12222E- 08 + j0.11889E- 08	- 0.12222E- 08 + j0.11889E- 08	- 0.12174E- 08 + j0.11844E- 08
- 0.54752E- 08 + j0.54333E- 08	- 0.54752E- 08 + j0.54333E- 08	- 0.54426E- 08 + j0.54009E- 08	- 0.10148E- 08 + j0.98718E- 09	- 0.10148E- 08 + j0.98718E- 09	- 0.99935E- 09 + j0.97280E- 09
- 0.86191E- 08 + j0.86066E- 08	- 0.86191E- 08 + j0.86066E- 08	- 0.85561E- 08 + j0.85439E- 08	- 0.44006E- 09 + j0.43102E- 09	- 0.44006E- 09 + j0.43102E- 09	- 0.41103E- 09 + j0.40369E- 09
- 0.15580E- 07 + j0.15655E- 07	- 0.15581E- 07 + j0.15655E- 07	- 0.15603E- 07 + j0.15677E- 07	0.11501E- 08 - j0.11197E- 08	0.11501E- 08 - j0.11196E- 08	0.11398E- 08 - j0.11101E- 08
- 0.31148E- 07 + j0.31558E- 07	- 0.31147E- 07 + j0.31558E- 07	- 0.31146E- 07 + j0.31556E- 07	0.32009E- 08 - j0.32369E- 08	0.32009E- 08 - j0.32369E- 08	0.32016E- 08 - j0.32375E- 08

参 考 文 献

[1] Fox R L, Kapoor. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors[J]. AIAA Journal, 1968, 6(2): 2426.  
 [2] Sutter T R, et al. Comparison of several methods for calculating vibration mode shape derivatives[J]. AIAA Journal, 1988, 26(11): 1506~1511.  
 [3] TONG Xin, GU Cong-xian. Experimental modal analysis of viscoelastically damped structures[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 1998, 11(1): 8~14.  
 [4] 余少华, 刘瑞岩. 结构振动模态参数的灵敏度分析及优化

[A]. 见: 中国振动工程学会模态分析与试验学会编. 全国第五届模态分析与试验学术交流会议论文集[C]. 1988. 917~925.

[5] 陈前, 朱德懋. 弹性-粘弹性复合结构模态理论[J]. 固体力学学报, 1990, 11(1): 22~33.

作者简介:



童 昕, 34 岁, 副教授, 博士, 研究专长: 结构动力分析及设计. 联系电话: 0595- 2692507

第九届航空发动机结构强度振动学术会议在福建举行

中国航空学会第九届航空发动机结构强度振动学术会议于 1998 年 10 月 14 日至 17 日在福建武夷山召开。出席会议的有 23 个单位的领导、专家、教授及其他科技工作者 75 人。

开幕式由北京航空航天大学李琳教授主持。航空发动机结构强度振动专业委员会主任聂景旭教授致开幕词。

本届学术会议共收到论文 85 篇, 其中 84 篇收入了论文集。大会报告有: 智能材料结构研究、金属橡胶的研究与应用、PW4000 发动机的发展及从国外几起重大故障谈提高发动机可靠性的重要意义。在四个分组会上共交流了论文 68 篇。论文涉及航空发动机结构强度振动及相关的各个方面, 包括 CAD、并行工程、疲劳蠕变断裂及寿命分析、疲劳蠕变断裂及寿命分析、载荷谱、试车和试验技术、动力特性分析、故障诊断、可靠性等, 尤其是对定向结晶、单晶、粉末冶金等新型材料和技术应用于发动机构件上, 有关其本构关系、蠕变/疲劳寿命分析方法的研究论文占有相当数量, 经会议评选, 其中有 6 篇被评为优秀论文。

会议决定, 第十届航空发动机结构强度振动学术会议于 2000 年举行, 委托南京航空航天大学承办。

(李铁柏)