

# 基于 Legendre 伪谱法的远程最优拦截初制导方法

谭丽芬, 闫野, 周英, 唐国金

(国防科学技术大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 考虑  $J_2$  摄动, 研究远程最优拦截初制导问题。针对远程拦截飞行时间长特点, 深入分析并改进一种固定时间拦截制导的摄动修正方法, 提出  $J_2$  摄动远程脉冲最优拦截策略。基于一种求解最优控制问题的新方法——Legendre 伪谱法 (Legendre pseudospectral method, LPM), 研究有限推力远程最优拦截初制导问题, 给出有限推力远程最优拦截初制导方法。以小倾角大椭圆轨道机动飞行器为对象, 进行优化计算。仿真结果说明了本文的最优初制导方法的精度和计算效率。

**关键词:** 远程最优拦截; 有限推力初制导; Legendre 伪谱法; 椭圆轨道机动飞行器

**中图分类号:** V 448.23

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.3969/j.issn.1001-506X.2011.06.27

## Initial guidance algorithm for long-range optimal intercept problem based on Legendre pseudospectral method

TAN Li-fen, YAN Ye, ZHOU Ying, TANG Guo-jin

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Considering the earth's oblateness effect of  $J_2$  perturbation, the optimal initial guidance of long-range intercept problem is researched. With the characteristic of long flight time, a disturbed modifying method of fixed-time interception is analyzed and improved, and the impulsive strategy of optimal long-range interception is put forward. The initial guidance algorithm of finite-thrust optimal interception is also studied via an optimal control method—Legendre pseudospectral method (LPM). The precision and efficiency of this initial guidance method are demonstrated by applying it to a high eccentric orbit (HEO) vehicle with small inclination.

**Keywords:** optimal intercept of long-range; finite-thrust initial guidance; Legendre pseudospectral method (LPM); elliptic orbit maneuver vehicle

## 0 引言

2005 年初, 美国“深度撞击”探测器<sup>[1-2]</sup>对 tempel\_1 彗星成功实施动能直接碰撞, 历时 172 天。该任务与空间拦截技术相类似。近年来, 空间动能拦截逐渐成为各国研究热点, 空间动能拦截中的轨道转移与高精度制导技术作为所有空间任务的重要核心技术更是备受关注。国内外在远程最优轨道转移与制导方面的研究成果很多。基于冲量假设, 文献[3]研究了固定时间多脉冲最优转移问题; 文献[4]针对共面圆轨道远程交会问题, 给出了快速确定多圈 Lambert 制导问题最优解的新方法; 文献[5]对交会对接远程调相段的多脉冲多圈 Lambert 轨道转移方案进行了研究。工程实际中, 多数推力发动机不再适用冲量假设, 应属于有限推力范畴。文献[6]研究了连续推力共面最优轨道机动规避问题。文献[7-9]采用直接配置与非线性规划方法研究

了有限推力最优轨道转移问题。这些研究的本质是采用各种优化方法求解最优控制问题, 目前主要的优化方法有直接法与间接法。间接法根据庞特里亚金极小值原理求解最优控制问题。间接法对优化初值依赖性太大, 而且共轭优化变量的物理意义不明确, 使得初值猜测难度较大。直接法通过参数化, 将最优控制问题转化为 NLP (nonlinear programming) 问题。直接法主要包括打靶法 (离散控制变量) 和配点法 (同时离散控制与状态变量) 两种方法。打靶法对控制变量初值选取较敏感, 容易陷入局部最优; 配点法将节点状态也作为优化变量。一般的直接配点法采用分段多项式来近似状态变量与控制变量, 设计变量数目大, 难以给定合适的优化初值。Legendre 伪谱法 (Legendre pseudospectral method, LPM) 是最近发展的一种基于全局插值多项式的直接配点法, 较一般的直接配点法, 该方法可用较少的节点获得较高的精度。文献[10-14]分别对 Legendre 伪谱

收稿日期: 2010-04-07; 修回日期: 2011-02-07。

基金项目: 国家高技术研究发展计划 (863 计划) 资助课题

作者简介: 谭丽芬 (1981-), 女, 博士研究生, 主要研究方向为航天器飞行动力学、制导与控制。E-mail: luyao9802@sina.com

法、伪谱法研究进展、伪谱法求解最优控制问题、伪谱法在高超声速飞行器再入轨迹优化及有限推力轨道转移中的应用进行了研究。

针对空间高轨目标,考虑  $J_2$  摄动,本文研究小倾角大椭圆轨道机动飞行器<sup>[15]</sup> 远程最优拦截(硬交会)初制导问题。该大椭圆轨道机动飞行器也可执行目标观测、捕获与伴飞等空间任务。本文根据提出的最优脉冲拦截策略,建立并优化求解了脉冲拦截最优控制模型;基于 Legendre 伪谱法,以脉冲拦截结果提供相关初制导初值,建立了有限推力离散最优控制模型,给出了最优拦截初制导策略。

## 1 远程脉冲最优拦截策略

远程最优拦截实质是固定时间最优轨道转移问题,可用 Lambert 算法求解。基于二体动力学模型的 Lambert 问题已经有成熟算法,本文研究远程拦截问题,飞行时间比较长,文献[4]对多圈 Lambert 问题进行了深入研究。文献[16-17]也研究了  $J_2$  摄动最优交会问题,但这些方法不能直接用于飞行时间比较长的远程拦截问题。

本节首先提出考虑  $J_2$  摄动的远程固定时间拦截策略,具体步骤描述如下:

**步骤 1** 给定飞行器初始状态  $(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ , 预定拦截时刻  $t_f$ , 预定拦截点  $\mathbf{r}_f^*$ 。计算二体固定时间拦截问题  $(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_f, t_f)$ , 得到  $t_0$  时刻变轨点变轨后的状态  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ ;

**步骤 2** 由  $t_0$  时刻  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ , 采用  $J_2$  动力学模型积分轨道到预定拦截时刻  $t_f$ , 得到状态  $\mathbf{r}_f$ , 计算脱靶矢量  $\mathbf{L}_m = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_f^*$ 。判断脱靶量是否满足精度要求,若满足转步骤 5, 否则转步骤 3;

**步骤 3** 以  $\mathbf{r}_f^* - \mathbf{L}_m$  作为虚拟拦截点,解二体 Lambert 问题  $(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{r}_f^* - \mathbf{L}_m, t_f)$ , 得到需要速度  $\mathbf{v}'_0$ ;

**步骤 4** 以  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}'_0)$  为  $t_0$  时刻状态,采用  $J_2$  动力学模型积分轨道到预定拦截时刻  $t_f$ , 得到状态  $\mathbf{r}'_f$ , 计算脱靶矢量  $\mathbf{L}'_m = \mathbf{r}'_f - \mathbf{r}_f^*$ 。判断脱靶量是否满足精度要求,若满足转步骤 5, 否则  $\mathbf{L}_m = \mathbf{L}'_m$ , 转步骤 3;

**步骤 5** 迭代结束。

若飞行时间较短,精度要求较低问题,可以按上述方法进行初制导<sup>[17]</sup>。

因方法误差,仅依赖该方法很难满足远程飞行初制导精度要求。脱靶矢量  $\mathbf{L}'_m$  由以虚拟拦截点为预定拦截点的二体 Lambert 解  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}'_0)$  轨道积分到  $t_f$  时刻得到。 $\mathbf{L}_m$  由初始状态  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$  轨道积分到预定拦截时刻得到。 $|\mathbf{L}'_m|$  与  $|\mathbf{L}_m|$  的差别就是方法误差。显然,自由飞行时间越长,上述方法的方法误差就越大。

上述远程固定时间拦截策略得到解的精度相对较低,暂且称之为粗略解。接下来建立以变轨时刻为优化变量,以变轨脉冲大小为性能指标的最优控制模型,并优化得到所研究远程拦截问题的最优粗略解。

保持最优粗略解的变轨时刻与变轨位置不变,以脱靶

量为性能指标,变轨脉冲为优化变量,建立第二个最优控制模型,即

$$\begin{cases} J = \min |\mathbf{L}'_m| \\ \text{s. t.} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\mu\mathbf{r}/r^3 + \mathbf{a}_{J_2} \end{bmatrix} \\ \Psi(\mathbf{x}(t_0), t_0; \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f^*) = 0 \\ C(\mathbf{x}(t), t) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}(t)$  为状态量  $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))^T$ ;  $\Psi$  为边界约束;  $C$  为转移轨道地球碰撞等不等式约束。

工程实际中,发动机的推力有限,对于小推力发动机和中等推力水平发动机应作为有限推力情况考虑。根据对称性有

$$\begin{cases} t^b = t - m \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{2F} \\ t^f = t + m \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{2F} \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\Delta\mathbf{v}$  为脉冲矢量;  $t$  为脉冲施加时刻;  $t^b, t^f$  分别为有限推力发动机开机、关机时刻;  $F$  为发动机推力大小;  $m$  为  $t$  时刻飞行器质量。该有限推力解可作为 Legendre 伪谱法的初值。

## 2 基于 LPM 的远程最优拦截初制导

Legendre 伪谱法通过将状态变量与控制变量在一系列插值点离散,在离散节点构造 Lagrange 插值多项式逼近状态变量与控制变量,并通过对全局插值 Lagrange 多项式求导来近似状态量对时间的导数等约束离散方法得到离散最优控制模型<sup>[10-13]</sup>。

### 2.1 区间变换

连续最优控制问题推力时间区间为  $[t_{ll}, t_{rr}]$ , 而伪谱法通过定义在  $[-1, 1]$  上的 Lagrange 多项式描述状态量与控制量。设  $t \in [t_{ll}, t_{rr}]$ , 对应区间变换后的  $\tau \in [-1, 1]$ , 则有

$$\tau = \frac{2t}{t_{rr} - t_{ll}} - \frac{t_{rr} + t_{ll}}{t_{rr} - t_{ll}} \quad (3)$$

$$t = \frac{t_{rr} - t_{ll}}{2}\tau + \frac{t_{rr} + t_{ll}}{2} \quad (4)$$

### 2.2 全局插值多项式与控制变量

$N$  阶 Legendre 正交多项式  $L_N(\tau)$  为

$$L_N(\tau) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N [(\tau^2 - 1)^N]}{d\tau^N} \quad (5)$$

式中,  $\tau \in (\tau_0 = -1, \tau_N = 1)$ ;  $N = 0, 1, 2, \dots$ 。

$\dot{L}_N(\tau)$  的  $N-1$  个零点  $\tau_m (m = 1, 2, \dots, N-1)$  又称为 Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) 配置点。这些配置点分布在  $(-1, 1)$  区间。对于  $N$  阶 Legendre 正交多项式, Legendre 伪谱法在区间  $[-1, 1]$  有  $N-1$  个 LGL 配置点  $\tau_m, \tau_0 = -1$  与  $\tau_N = 1$  共  $N+1$  个 LGL 点, 又称为插值点。基于这  $N+1$  个插值点, 可得到 Lagrange 插值多项式。

定义 Lagrange 多项式  $\phi_i(\tau)$  为

$$\phi_l(\tau) = \frac{1}{N(N+1)L_N(\tau_l)} \frac{(\tau^2 - 1)\dot{L}_N(\tau)}{\tau - \tau_l} \quad (6)$$

式中,  $l=0, 1, 2, \dots, N$ 。Lagrange 多项式  $\phi_l(\tau)$  为

$$\phi_l(\tau_k) = \delta_{lk} = \begin{cases} 1, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases} \quad (7)$$

采用以上  $N+1$  个 Lagrange 插值多项式  $\phi_l(\tau)$  为基函数可得到离散的状态变量与控制变量, 以拟合连续的状态变量  $\mathbf{x}(t)$  与控制变量  $\mathbf{u}(t)$ 。

令  $\mathbf{a}_l = \mathbf{x}(\tau_l)$ ,  $\mathbf{b}_l = \mathbf{u}(\tau_l)$ , 将  $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{u}(t)$  在插值点  $\tau_l$  离散化, 可得

$$\mathbf{x}^N(\tau) = \sum_{l=0}^N \mathbf{a}_l \phi_l(\tau) = \sum_{l=0}^N \mathbf{x}(\tau_l) \phi_l(\tau) \quad (8)$$

$$\mathbf{u}^N(\tau) = \sum_{l=0}^N \mathbf{b}_l \phi_l(\tau) = \sum_{l=0}^N \mathbf{u}(\tau_l) \phi_l(\tau) \quad (9)$$

采用此拟合方法, 可使各插值点离散状态量与离散控制量取值与连续值精确相等。由此, 最优控制转换为非线性规划问题, 即寻找  $\mathbf{x}^N(\tau)$  在  $N+1$  个插值点取值  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N)^T$  与控制量  $\mathbf{u}^N(\tau)$  在  $N+1$  个插值点的取值  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_N)^T$  使性能指标最优。

### 2.3 状态方程与约束条件

插值点  $\tau_k (k=0, 1, 1, \dots, N)$  的状态  $\mathbf{x}(\tau_k)$  可用  $\mathbf{x}^N(\tau_k)$  拟合, 即有

$$\mathbf{x}^N(\tau_k) = \mathbf{x}(\tau_k) \quad (10)$$

对上式求时间导数, 可得到插值函数  $\mathbf{x}^N(\tau)$  在插值点  $\tau_k$  处的导数为

$$\dot{\mathbf{x}}^N(\tau_k) = \sum_{l=0}^N \mathbf{D}_{kl} \mathbf{x}(\tau_l) \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{D}_{kl} = \dot{\phi}_l(\tau_k)$ ,  $l=0, 1, 2, \dots, N$ 。  $\mathbf{D}_{kl}$  是只与  $N$  有关的  $(N+1) \times (N+1)$  矩阵, 具体可描述为

$$\mathbf{D}_{kl} = \begin{cases} \frac{L_N(\tau_k)}{L_N(\tau_l)} \frac{1}{\tau_k - \tau_l}, & k \neq l \\ -\frac{N(N+1)}{4}, & k = l = 0 \\ \frac{N(N+1)}{4}, & k = l = N \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (12)$$

原状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (13)$$

在时间进行区间映射后, 离散的状态方程可描述为

$$\sum_{l=0}^N \mathbf{D}_{kl} \mathbf{x}(\tau_l) - \frac{t_{rr} - t_{ll}}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}^N(\tau_k), \mathbf{u}^N(\tau_k), \tau_k) = 0 \quad (14)$$

离散后的边界约束及路径约束可描述为

$$\Psi(\mathbf{x}(\tau_{ll}), \tau_{ll}; \mathbf{x}(\tau_{rr}), \tau_{rr}) = 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_j(\mathbf{x}^N(\tau_k), \mathbf{u}^N(\tau_k)) \leq 0 \quad (16)$$

式中,  $j=0, 1, \dots, c; k=0, 1, \dots, N$ 。

### 2.4 性能指标

用 Gauss-Lobatto 积分公式近似性能指标  $J^N$  的积分项, 即

$$\int_{-1}^1 g(\mathbf{x}^N(\tau), \mathbf{u}^N(\tau)) d\tau \approx \sum_{k=0}^N g(\mathbf{x}^N(\tau_k), \mathbf{u}^N(\tau_k)) \omega_k \quad (17)$$

式中,  $\omega_k$  为 Gauss 权重, 满足

$$\omega_k = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{[L_N(\tau_k)]^2}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (18)$$

离散后的性能指标  $J^N$  可写为

$$J^N = h(\mathbf{x}^N(1)) + \int_{-1}^1 g(\mathbf{x}^N(\tau), \mathbf{u}^N(\tau)) d\tau \approx h(\mathbf{a}_N) + \frac{t_{rr} - t_{ll}}{2} \sum_{k=0}^N \omega_k f(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k, \tau_k) \quad (19)$$

### 2.5 有限推力最优控制模型与优化策略

有限推力连续最优控制模型为

$$\begin{cases} J = \min (t_{rr} - t_{ll}) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \Psi_0[\mathbf{x}(t_0), t_0] = 0 \\ \Psi_f[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{r}_f^*, t_f] = 0 \\ |\alpha_g| \leq 180^\circ \\ t_0 \leq t_{ll} < t_{rr} \leq t_f \end{cases} \quad (20)$$

式中,  $\alpha_g$  为推力攻角, 即速度矢量与控制矢量的夹角。

采用 Legendre 伪谱法得到的参数化 NLP 问题以插值点处的控制变量和状态变量为优化变量, 采用式 (21) 中的性能指标函数, 并满足式 (21) 中的等式约束与不等式约束。

$$\begin{cases} J = \min (t_{rr} - t_{ll}) \\ \sum_{l=0}^N \mathbf{D}_{kl} \mathbf{x}(\tau_l) = \frac{t_{rr} - t_{ll}}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}^N(\tau_k), \mathbf{u}^N(\tau_k), \tau_k) \\ \Psi_l[\mathbf{x}(\tau_{ll}), \tau_{ll}] = 0 \\ \Psi_r[\mathbf{x}(\tau_{rr}), \tau_{rr}] = 0 \\ |\alpha_g| \leq 180^\circ \\ t_0 \leq t_{ll} < t_{rr} \leq t_f \end{cases} \quad (21)$$

实际应用 LPM 时, 若插值点数增加, 设计变量急剧增加, 若取  $M$  个插值点, 则设计变量数目为  $9M+2$ 。出于优化效率考虑, 开始可以取较少插值点, 基于脉冲精确初制导解转换的有限推力解作为初值, 进行优化。若有必要, 随后再增加插值点数目, 进行更精确的计算。

### 3 仿真与分析

小倾角大椭圆轨道机动飞行器  $t_0 = 0$  s 时刻轨道根数如表 1 所示。

表 1 小倾角大椭圆轨道机动飞行器轨道根数

$a/\text{km}$	$e$	$i/(\text{°})$	$\Omega/(\text{°})$	$\omega/(\text{°})$	$f/(\text{°})$
26 792.199	0.575	0	0	1.963	359.974

给定预定拦截时刻  $t_f = 191\,470$  s, 预定拦截位置  $\mathbf{R}_f = (-42\,164\,199.960 \text{ m}, 1\,831.085 \text{ m}, 95.963 \text{ m})^T$ 。飞行器初始质量  $m_0 = 800$  kg, 发动机比冲  $I_s = 260$  s, 常推力发动机推力为 200 N。考虑  $J_2$  摄动, 脉冲最优拦截结果如表 2 所示。

表 2 远程最优拦截脉冲解(地心惯性系)

参数	$t/s$	$X/km$	$Y/km$	$Z/km$	$\Delta V_x/(m/s)$	$\Delta V_y/(m/s)$	$\Delta V_z/(m/s)$	脱靶量/m
粗略解	24 255.706	-41 288.384	-6 348.081	0	17.934	62.183	-0.030	1 679.738
精确解	24 255.706	-41 288.384	-6 348.081	0	17.463	62.032	-0.031	0.503

采用 5 个插值点,把有限推力弧段划分为 4 个推力区间,每个区间推力大小相同,推力方向发生调整,LPM 仿真

结果如表 3、图 1 所示。此外图 1 还对不同数目插值点的有限推力初制导结果进行了比较。

表 3 基于 LPM 的远程拦截最优初制导仿真结果<sup>1)</sup>

参数	$t_k/s$	$X/km$	$Y/km$	$Z/km$	$V_x/(km/s)$	$V_y/(km/s)$	$V_z/(km/s)$
插值点 1	24 108.677	-41 377.406	-6 060.808	0	0.589	-1.956	0
插值点 2	24 153.615	-41 350.589	-6 148.475	0.078	0.604	-1.945	0.003
插值点 3	24 238.802	-41 297.988	-6 313.206	0.501	0.630	-1.922	0.006
插值点 4	24 323.988	-41 243.324	-6 475.904	0.939	0.653	-1.898	0.004
插值点 5	24 368.927	-41 213.699	-6 560.906	1.032	0.665	-1.885	0.000 3

注:1)消耗燃料质量为 21.184 kg,预定拦截时刻脱靶量为 6 m。

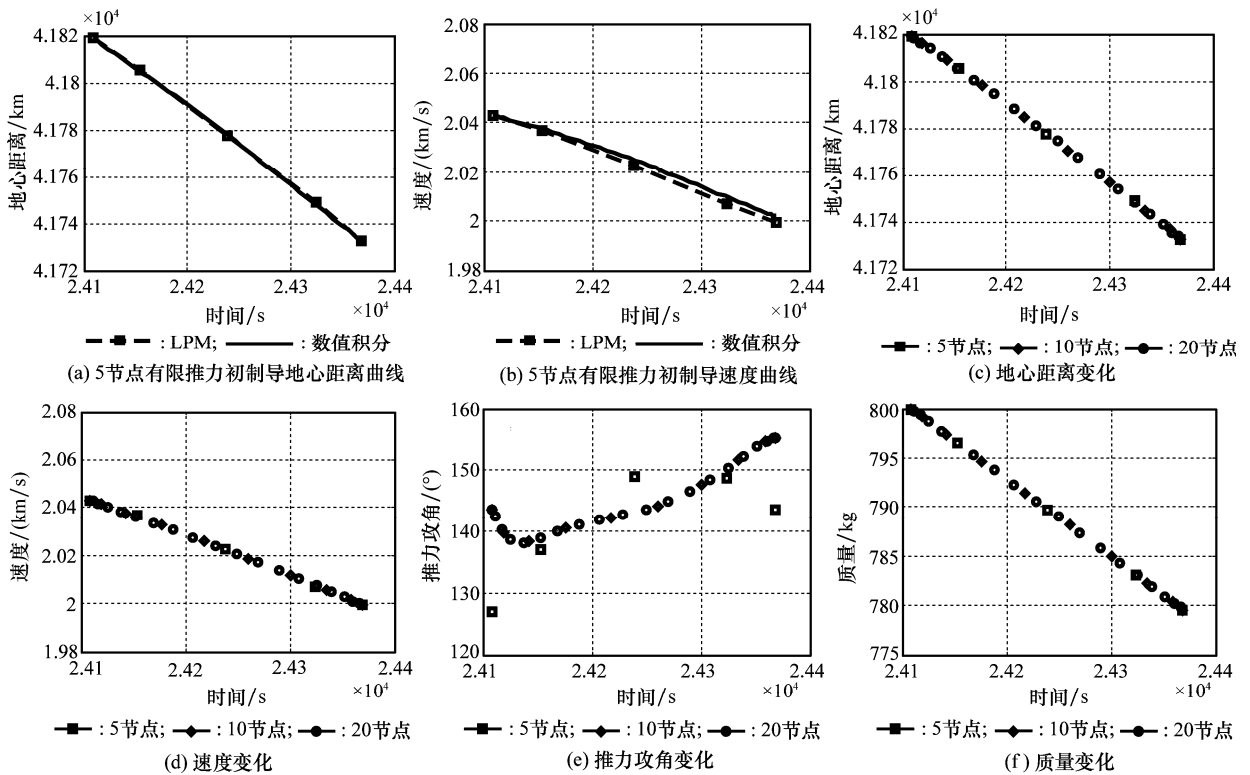


图 1 不同数目插值点对应的有限推力初制导结果

图 1(a)和图 1(b)给出了 5 节点 LPM 制导仿真结果,并采用数值积分(根据初始状态和优化得到的插值点控制量,直接积分状态方程)对其进行了验证。图 1(c)~图 1(f)给出了不同节点的 LPM 制导仿真结果。可以看出,推力弧段中取 5、10 与 20 个插值点得到的各类曲线比较吻合。5、10 与 20 个插值点情况的 LPM 初制导推力攻角曲线变化都比较平缓,且满足攻角约束,其中 10 个插值点与 20 个插值点的攻角曲线基本一致。因此,对于本算例,5 个插值点基本满足要求,10 个插值点是比较理想的选择,其对应的攻角变化幅度稍小于 5 个插值点情况,其对应的优化计算量小于 20 个插值点情况。由此可知,并不是插值点取得越多越

好,而是有一个合适的取值,以免增加不必要的计算量。

图 1(a)和图 1(b)曲线采用数值积分对 LPM 计算精度进行验证,验证结果说明,LPM 得到的推力弧段的轨道与数值积分结果基本吻合,说明了 LPM 方法具有高精度。基于 LPM 得到的 5 个插值点的状态量与控制量,采用基于 Hermite 插值多项式的一般直接配点法与数值积分动力学方程法计算推力弧段的状态。由计算可知,要达到同样的仿真计算精度,一般直接配点方法需要更多的插值点,这样将引起计算量迅速增长,更何况一般直接配点法对设计变量初值相对更敏感。因此,从初值选取与计算量两个角度来看,LPM 方法优于一般直接配点法。

## 4 结 论

本文研究了  $J_2$  摄动远程最优拦截初制导问题。提出了远程脉冲最优拦截策略,建立了相应的最优控制模型,通过优化计算得到了最优脉冲拦截解。根据对称性,以最优脉冲解为 LPM 提供发动机开、关机时刻初值信息,基于 LPM 求解了有限推力远程拦截初制导问题。采用不同数目插值点 LPM 优化方案,进行了优化计算。仿真结果表明,本文的 LPM 优化策略可以快速有效地求解远程最优拦截初制导问题。

## 参考文献:

- [1] Kubitschek D G. Impactor spacecraft targeting for the deep impact mission to comet tempel-1[R]. USA: American Astronomical Society, 2003.
- [2] 林来兴. 从深度撞击探测器看空间拦截技术的发展[J]. 航天控制, 2006, 1(24): 92-96. (Lin L X. Survey on space-interception technology from deep impact mission to comet tempel-1[J]. *Aerospace Control*, 2006, 1(24): 92-96.)
- [3] Prussing J E, Chiu J H. Optimal multiple-impulse time-fixed rendezvous between circular orbits[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1986, 9(1): 17-22.
- [4] Shen H J, Tsiotras P. Optimal two-impulse rendezvous using multiple-revolution lambert solutions[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(1): 50-61.
- [5] Luo Y Z, Tang G J, Lei Y J, et al. Optimization of multiple-impulse multiple-revolution rendezvous phasing maneuvers[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2007, 30(4): 946-952.
- [6] Widhalm J W, Heise S A. Optimal in-plane orbital evasive maneuvers using continuous low thrust propulsion[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1991, 14(6): 1323-1326.
- [7] Enright P J, Conway B A. Optimal finite-thrust spacecraft trajectories using collocation and nonlinear programming[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1991, 14(5): 981-985.
- [8] Herman A L, Conway B A. Direct optimization using collocation based on high-order Gauss-Lobatto quadrature rules[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1996, 19(3): 592-599.
- [9] Benson A, Thorvaldsen T, Rao V. Costate direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2006, 29(6): 1435-1440.
- [10] Fahroo F. Costate estimation by a Legendre pseudospectral method[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, 24(2): 270-277.
- [11] Huntington G T. Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of technology, 2007.
- [12] Ross I M, Fahroo F. Pseudospectral knotting methods for solving optimal control problem[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2004, 27(3): 397-405.
- [13] 雍恩米, 唐国金, 陈磊. 基于 Gauss 伪谱方法的高超声速飞行器再入轨迹快速优化[J]. 宇航学报, 2008, 26(6): 1766-1772. (Yong E M, Tang G J, Chen L. Rapid trajectory optimization for hypersonic reentry vehicle via Gauss pseudospectral method[J]. *Journal of Astronautics*, 2008, 26(6): 1766-1772.)
- [14] 涂良辉, 袁建平, 罗建军. 基于伪光谱方法的有限推力轨道转移优化设计[J]. 宇航学报, 2008, 29(4): 1189-1193. (Tu L H, Yuan J P, Luo J J. Optimal design of orbital transfer with finite thrust based on legendre pseudospectral method[J]. *Journal of Astronautics*, 2008, 29(4): 1189-1193.)
- [15] 谭丽芬, 闫野, 周英, 等. 对 GEO 卫星照相的 HEO 卫星变轨策略研究[J]. 航天控制, 2009, 27(4): 19-22. (Tan L F, Yan Y, Zhou Y, et al. Research on orbit transfer of high eccentric orbit of optical imaging satellite for GEO satellite[J]. *Aerospace Control*, 2009, 27(4): 19-22.)
- [16] Chang Y, Zhou J. Orbit correction method for two-impulse rendezvous between non-coplanar elliptical orbits considering the  $J_2$  perturbation[J]. *Journal of Astronautics*, 2008, 29(4): 1172-1176.
- [17] 周须峰, 唐硕. 固定时间拦截变轨段制导的摄动修正方法[J]. 飞行力学, 2006, 24(4): 46-49. (Zhou X F, Tang S. Disturbed modify method of fixed-time interception's guidance in orbit-change stage[J]. *Flight Dynamics*, 2006, 24(4): 46-49.)
- [18] 王华, 唐国金. 用非线性规划求解有限推力最优交会[J]. 国防科技大学学报, 2003, 25(5): 9-13. (Wang H, Tang G J. Optimal finite-thrust rendezvous using nonlinear programming[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2003, 25(5): 9-13.)