

数字信号处理过程中信号截位误差抑制方法研究

郭连平 田书林 王志刚

(电子科技大学自动化工程学院, 成都 611731)

摘 要: 在数字信号处理过程中, 受一些数字算法的计算精度影响, 需要对运算过程中的中间信号实现从高量化精度到低量化精度的转换, 即数据位宽的截断。直接对高量化精度信号进行截位会导致截位得到的低量化精度信号无杂散动态范围(SFDR)的下降。在高量化精度信号中加入 Dither 后再截位可以有效降低直接截位误差中的谐波失真, 明显改善低量化精度信号的动态范围。MATLAB 仿真结果说明了加入 Dither 后截位可有效增加低量化精度信号的 SFDR, 增加量可达到 16dB。

关键词: 精度转换; 截位误差; Dither 信号; 无杂散动态范围

中图分类号: TN911.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2013)05-0544-06

Study on Restraining Signal truncation Error in DSP

GUO Lian-ping TIAN Shu-lin WANG Zhi-gang

(School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731)

Abstract: In DSP, restricted by the calculating precision of some digital algorithms, the digital signal transition from high quantizing precision to low quantizing precision was necessary, i. e. the truncating of bit width of signal. The direct truncating operation on signal of high quantizing precision led to the decline of the spurious free dynamic range (SFDR) of truncated signal. Truncating after adding Dither signal to the signal of high quantizing precision could decline the harmonic distortion of the truncation error efficiently and extend the dynamic range of the truncated signal significantly. The simulation results of MATLAB shown that truncating after adding Dither signal could extend the SFDR of the truncated signal by about 16dB.

Key words: precision transition; truncation error; Dither signal; SFDR

1 引言

目前,实现数字信号处理的主要器件是 FPGA 和 DSP。DSP 中的机器指令在 CPU 的高速缓冲队列中基本是顺序执行,即使有一些并行处理的技术,也是在一定程度上和十分有限的;FPGA 中各个单元的运算是独立的,信号流是并行的,因此处理速度比 DSP 块,实时性高。FPGA 的各种运算一般是基于整型数来完成的,即操作数都是整数,如混频、抽取、滤波等运算。这些操作不可避免的会带来运算结果数据位宽的增加,特别是当经过多级相

同或不同的运算之后,得到的数据位宽相对于原始数据位宽的增加量是十分可观的。当后续处理位宽较低时,需要将前级的高位宽运算结果截取一定的位宽以适应后续处理位宽要求,一般的截位做法是直接截掉最低的某几位。对多位数据进行截位处理,是一个从高量化精度向低量化精度的转换过程,由于量化位数的减少,产生截位误差,导致运算结果出现由谐波失真造成的尖峰,降低了信号的无杂散动态范围(SFDR)。无杂散动态范围最大信号成分的均方根幅度与次最大噪声成分或谐波失真成分的均方根幅度之比,通常以 dBc(相对于载波频率幅度)或 dBFS(相

对于 ADC 的满量程范围)表示。

ADC 的采样过程也可以认为是一个高量化精度到低量化精度的转换过程。Dither 技术^[1-5]主要通过向 ADC 输入信号添加随机噪声的方法降低模拟数字转换芯片 ADC 的量化效应,从而大幅度提高 SFDR 参数。本文主要利用 Dither 技术来抑制截位误差,改善由数据位宽截断引入的谐波失真,即先对截位前的高数据位宽数据添加合适的随机抖动噪声,再进行截位,是一种纯数字的方法,可应用于对于绝大多数的数字处理电路中。

2 截位误差分析

ADC 引入的量化误差以及系统运行的工作字长限制对数据截断处理的误差是数字系统的主要误差源。在多数系统电路结构已经确定的情况下,一般不会轻易或者很困难去减小 ADC 引入的量化误差,因此,数据截断处理误差便成了主要的误差来源。

在数字信号处理过程中,信号处理是以一系列的算法为基础的,这些算法的计算精度决定着最终处理结果的精度。为了得到较高的运算精度,现场可编程逻辑门阵列(FPGA)或者是数字信号处理器(DSP)都要采用多于最终结果比特位数的运算。例如在 FPGA 中,一般采用定点整数运算,即操作数都是整数。要得到运算结果,一般需要经过很多个步骤,这些步骤都会导致其中间运算结果有效位宽的增加,如乘法、数字下变频、滤波及均衡、压缩甚至于最基本的加减运算等,这些步骤得到的中间结果位宽一般高于最终需要的运算结果位宽。例如 ALTERA 公司的大部分 FPGA 芯片内部快速傅里叶变换(FFT)IP core 所能支持的最大位宽为 24 位,如果输入信号经过量化、混频、滤波及加窗等多个操作后,最终运算结果位宽有可能会大于 24 位。这时候,需要截去多余的位数以满足 24 位的要求。而如果所有中间运算结果都采用和最终结果同样的位宽,会对最终结果的精度有很大的影响,这种影响会随着中间运算步骤的增加而加重。

设 $x(n)$ 是经过一系列运算后得到的最终信号,有效位宽为 A 。数据截位之后得到的信号为 $y(n)$,

设有效位数为 B 。在 FPGA 或者 DSP 进行定点整数运算时,最简单同时也最容易实现的数据截位方法是直接丢掉最低的几位。设 $z(n)$ 表示截去的误差信号,位宽为 $A-B$,则有以下的关系:

$$x(n) = y(n) \cdot 2^{A-B} + z(n) \quad (1)$$

设 $x(n)$ 、 $y(n)$ 和 $z(n)$ 的离散傅里叶变换(DFT)分别为 $X(e^{j\omega})$ 、 $Y(e^{j\omega})$ 和 $Z(e^{j\omega})$,根据傅里叶变换的线性性有:

$$X(e^{j\omega}) = 2^{A-B} \sum_{n=0}^{\infty} y(n) e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} z(n) e^{-j\omega n} \quad (2)$$

即有下式成立:

$$X(e^{j\omega}) = 2^{A-B} Y(e^{j\omega}) + Z(e^{j\omega}) \quad (3)$$

式(3)说明,在 $x(n)$ 的相关频谱参数(如 SFDR)一定的情况下,截位得到的信号 $y(n)$ 的频谱质量受到截位误差 $z(n)$ 的影响。

前面提到,对信号 $x(n)$ 直接截去低位的 $A-B$ 位得到 $y(n)$,截去的 $A-B$ 位为误差信号 $z(n)$,则 $x(n)$ 与 $z(n)$ 有如下的关系:

$$z(n) = x(n) \pmod{2^{A-B}} \quad (4)$$

其中, \pmod 为同余运算符,表示取 $x(n)$ 除以 2^{A-B} 得到的余数。设 $x(n) = m \in [0, 2^{A-1}]$,式(4)也可以表示为下式:

$$z(m) = m \pmod{2^{A-B}} \quad (5)$$

式(5)表示取 m 的低 $A-B$ 位,设 $\Delta = 2^{A-B} - 1$,式(5)可表示如图 1。

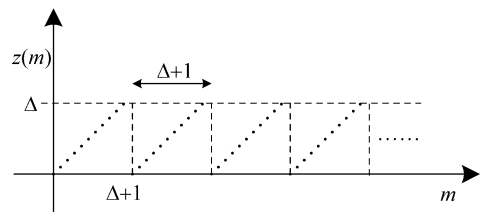


图 1 截位误差函数

Fig. 1 Function of truncation error

仔细分析图 1,不难发现,截位误差函数 $z(m)$ 具有类似 ADC 量化误差的性质,具有周期线性性。不同的是 $z(m)$ 为一周期性的离散线性函数,其周期为 $N = \Delta + 1 = 2^{A-B}$ 。截位误差 $z(m)$ 的这种周期性反应在频谱上会产生很多的谐波,必然导致截位后信号频谱质量下降。

3 Dither 基本原理

Dither 信号是一种随机抖动信号,与 ADC 的模拟输入信号完全独立。由于 ADC 无论是相干采样,或是量化噪声、差分非线性误差的周期性所带来的谐波,都是由于采样、量化及其输入波形之间存在某种固定关系所造成的, Dither 信号的作用正是用以打乱这种相对固定的关系。在 ADC 的输入信号中加入 Dither 信号,并在其输出端利用数字方法对加入的噪声进行去除,在这个过程中实现 ADC 参数 SFDR 的改善。其原理如图 2 所示。所引入的 Dither 信号,从幅度上可以划分为大幅度和小幅度 Dither,从频率上可以分为宽带 Dither 和窄带 Dither。Dither 的种类不同,其应用场合也会有所不同。

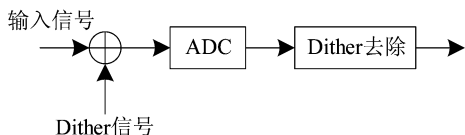


图 2 Dither 原理

Fig. 2 Principle of Dither

图 2 所示的 Dither 原理涉及到 DAC 及相关模拟电路的设计,对于已经设计并制作好的数字电路不容易实现。需要采用一种纯数字的噪声加扰的方法来实现本文中讨论的截位误差抑制,即数字 Dither。

4 利用数字 Dither 抑制截位误差

与 ADC 的量化原理类似,高数据位宽的截位是一个高量化精度向低量化精度转换的过程。转换过程中,由于量化阶的减少,描述相邻两个样点之间信号细节的信息也随之减少,导致高量化精度信号多个采样点代表的连续变化信息变为一级没有变化的阶梯,导致明显的谐波失真,降低转换后信号的 SFDR。

在 $x(n) = m \in [0, 2^{A-1}]$ 范围内,截位误差信号 $z(m)$ 是以 N 为周期的离散锯齿波函数,并且当 $m \in [0, N-1]$, $z(m) = m$ 。由此可以求出 N 点 $z(m)$ 的傅里叶级数展开式:

$$z(m) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\omega_0 m} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)m} \quad (6)$$

其中傅里叶级数系数 a_k 的值为:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} z(m) e^{-jk\omega_0 m} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} m e^{-jk(2\pi/N)m} \\ &= \frac{\cos(2\pi k/N) - 1 + j\sin(2\pi k/N)}{2[1 - \cos(2\pi k/N)]} \\ &= \frac{j e^{jk/N}}{2\sin(\pi k/N)} \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)可得周期信号 $z(m)$ 傅里叶变换在一个周期内的表达式为:

$$Z(e^{j\omega}) = j\pi \sum_{k=0}^{N-1} \frac{e^{jk/N}}{\sin(\pi k/N)} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \quad (8)$$

k 值较小时,幅频特性函数表达如下式:

$$|Z(e^{j\omega})| = \sum_k \frac{N}{k} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \quad (9)$$

从式(9)可以看出,谐波幅度分布与 k 存在近似反比例的关系,衰减较慢。为了快速衰减截断误差中的谐波幅度,将对截取前信号 $x(n)$ 中加入 $A-B$ 位的随机噪声,即 Dither 信号,再进行截取。Dither 信号的位宽主要有以下两方面的考虑:(1)幅度过大会抬高 $y(n)$ 的噪底;(2)幅度过小不足以改变 $y(n)$ 的阶梯性。加入 $A-B$ 位 Dither 信号既不会对 $y(n)$ 的噪底造成影响,又能够较好的改变 $y(n)$ 的阶梯性。

由于 Dither 信号是一个统计信号,截位误差需要用数学期望值来表示。设加入的 Dither 信号为 d ,且 $d \in [0, 2^{A-B} - 1] \cap Z$, Z 为整数集合,即 d 是一个离散型随机变量。设新的截位误差为 $z'(m)$,则 $z'(m)$ 可表示为:

$$\begin{aligned} z'(m) &= E[z(m + d)] \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} z(m + l) p(l) \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $N = 2^{A-B}$, $p(l)$ 表示随机变量 d 的分布律函数,即

$$p(l) = P\{d=l\} \quad (11)$$

式(10)可以看做信号 $z(m)$ 与随机噪声 d 分布律函数 $p(l)$ 的互相关函数,其频谱表达式为:

$$Z'(e^{j\omega}) = Z(e^{j\omega}) P(e^{j\omega}) \quad (12)$$

接下来分别介绍常见的高斯分布 Dither 和均匀分布 Dither 对截位误差的抑制。

4.1 高斯分布 Dither 抑制截位误差

当 Dither 信号为离散高斯分布信号时,首先需要解出式(11)中的分布律函数 $p(l)$ 。

设连续型随机变量 $d(t)$ 服从均值为 μ , 方差为 σ^2 的高斯分布, 即 $d(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。假设 $d(t)$ 和 d 存在如下的关系:

$$d = \lfloor d(t) \rfloor \quad (13)$$

$\lfloor d(t) \rfloor$ 表示取不大于 $d(t)$ 的最大整数, 则 $p(l)$ 可以由下式计算:

$$p(l) = \int_l^{l+1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt \quad (14)$$

$p(l)$ 的傅里叶变换 $P(e^{j\omega})$ 为:

$$\begin{aligned} P(e^{j\omega}) &= \sum_{l=0}^{N-1} p(l) e^{-j\omega l} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \int_l^{l+1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt \cdot e^{-j\omega l} \end{aligned} \quad (15)$$

幅频特性为:

$$\begin{aligned} |P(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{l=0}^{N-1} \int_l^{l+1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt \cdot e^{-j\omega l} \right| \\ &\leq \sum_{l=0}^{N-1} \left| \int_l^{l+1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt \right| \cdot |e^{-j\omega l}| \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \int_l^{l+1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt \\ &= \int_0^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt \end{aligned} \quad (16)$$

令 $Q = \int_0^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt < 1$, Q 值表征

了 $d(t)$ 概率密度曲线下区间 $[0, N]$ 的面积。随着方差 σ^2 的增大, Q 值会变小, 由于 $|P(e^{j\omega})| \leq Q < 1$, 故 $|P(e^{j\omega})|$ 也会随着 σ^2 的增大变小。于是, 根据式(12)可得:

$$\begin{aligned} |Z'(e^{j\omega})| &= |Z(e^{-j\omega})| \cdot |P(e^{j\omega})| \\ &\leq |Z(e^{-j\omega})| \cdot Q \\ &< |Z(e^{-j\omega})| = |Z(e^{j\omega})| \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)说明, 由于高斯 Dither 的影响, 截位误差频谱中的谐波成分幅度小于未加高斯 Dither 时的幅度, 而且随着 σ^2 的变大, 谐波成分的幅度会明显的变小, 有效说明了高斯 Dither 对截位误差的抑制。

4.2 均匀分布 Dither 抑制截位误差

当加入 Dither 噪声为均匀分布信号时, 根据均匀分布定义, 同时 $d \in [0, N-1] \cap Z$, 则均匀分布的分布律函数 $p(l)$ 为:

$$\begin{aligned} p(l) &= P\{d=l\} \\ &= \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (18)$$

对式(18)求傅里叶变换:

$$\begin{aligned} P(e^{j\omega}) &= \sum_{l=0}^{N-1} p(l) e^{-j\omega l} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{N} \cdot e^{-j\omega l} \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N(1 - e^{-j\omega})} \end{aligned} \quad (19)$$

则截位误差的幅频特性:

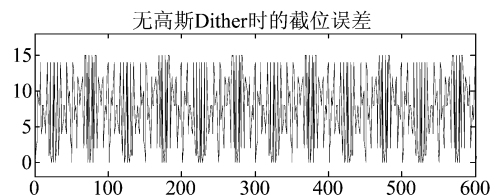
$$\begin{aligned} |Z'(e^{j\omega})| &= |Z(e^{-j\omega})| \cdot |P(e^{j\omega})| \\ &= \sum_k \frac{N}{k} \delta(-\omega - \frac{2\pi k}{N}) \cdot \left| \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N(1 - e^{-j\omega})} \right| \\ &= \left| \sum_k \frac{1 - e^{-j\omega N}}{k(1 - e^{-j\omega})} \delta(-\omega - \frac{2\pi k}{N}) \right| \\ &= \left| \sum_k \frac{1 - e^{-j\omega N}}{k(1 - e^{-j\omega - 2\pi k/N})} \delta(-\omega - \frac{2\pi k}{N}) \right| \\ &= \left| \sum_k \frac{1 - e^{j\omega N}}{k(1 - e^{j\omega - 2\pi k/N})} \delta(-\omega - \frac{2\pi k}{N}) \right| \\ &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

在实际情况下, 由于实现的均匀分布 Dither 序列是有限长的, 故式(18)每个点的出现概率不一定相等, 与理想的 $1/N$ 有误差, 因此实际的 $|Z'(e^{j\omega})|$ 不会等于 0, 而是接近于 0。然而, 通过以上的分析, 说明均匀分布 Dither 也可以有效抑制截位误差。

5 仿真验证

设 $x(n)$ 是一个 $A=14$ 位的正弦信号, 采样率为 1MSPS, 频率为 170kHz。截取之后 $y(n)$ 的位宽为 $B=10$, 截位误差 $z(m)$ 位宽为 $A-B=4$ 。

首先在信号 $x(n)$ 加入 4 位的高斯分布 Dither 信号, 则未加 Dither 信号时的截位误差 $z(m)$ 和加入 Dither 后的截位误差 $z'(m)$ 时域和频域对比图分别如图 3 和图 4 所示。



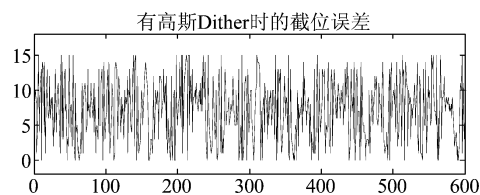


图3 加入高斯 Dither 前后截位误差时域对比图

Fig. 3 The time-domain comparison of truncation error without and with Gaussian Dither

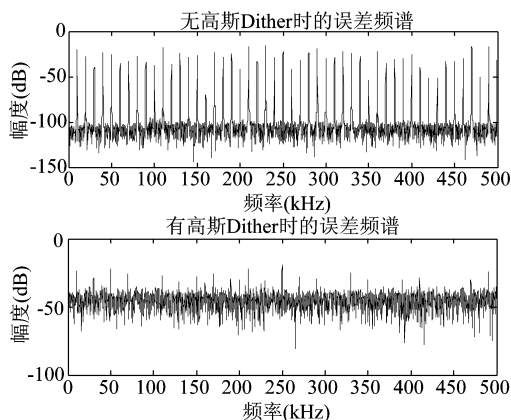


图4 加入高斯 Dither 前后截位误差频域对比图

Fig. 4 The frequency-domain comparison of truncation error without and with Gaussian Dither

从图3中可以看出,未加高斯 Dither 时,截位误差时域信号具有明显的周期性,导致图4频谱中出现谐波失真。截位误差的谐波失真会在截位后信号 $y(n)$ 的频谱中引入尖峰,降低了 $y(n)$ 的 SFDR。加入随机的 Dither 信号之后,截位误差的周期性被破坏,减小了频谱中的谐波失真,从而提高了 $y(n)$ 的 SFDR,如图5所示。

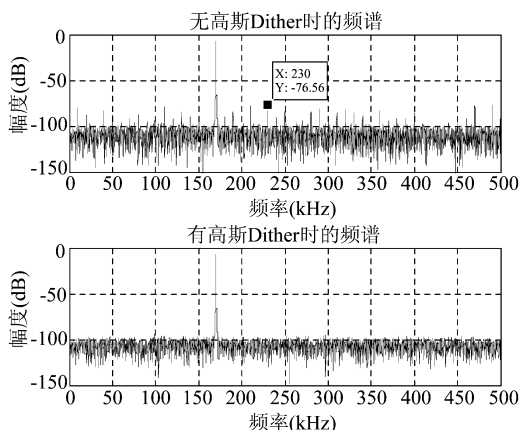


图5 加入高斯 Dither 前后截位信号频谱对比图

Fig. 5 The frequency-domain comparison of truncated signal without and with Gaussian Dither

从图5中可以看出,加入高斯 Dither 之后,截位信号的 SFDR 提高了约 16dB。

在信号 $x(n)$ 中加入 110kHz 和 270kHz 两个频点,且加入 4 位的均匀分布 Dither 信号,则 $z(m)$ 和 $z'(m)$ 的时域和频域对比图分别如图6和图7所示。

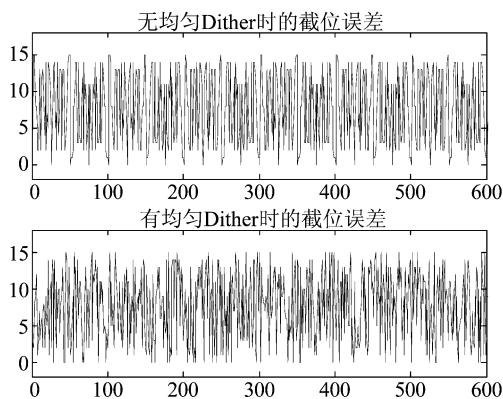


图6 加入均匀 Dither 前后截位误差时域对比图

Fig. 6 The time-domain comparison of truncation error without and with Uniform Dither

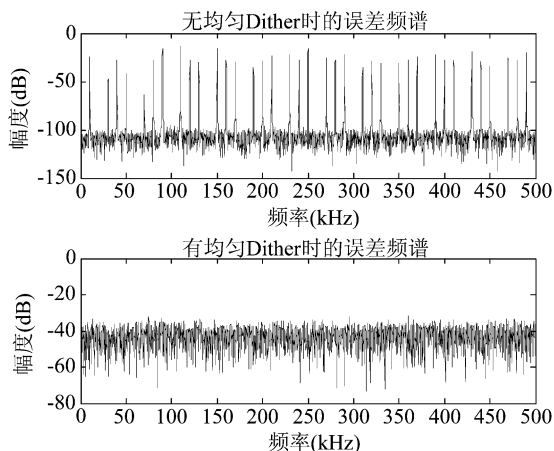
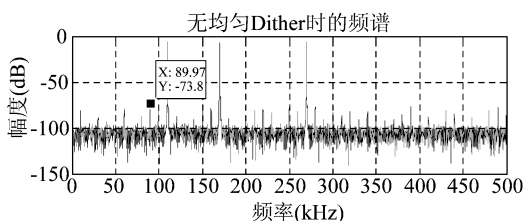


图7 加入均匀 Dither 前后截位误差频域对比图

Fig. 7 The frequency-domain comparison of truncation error without and with Uniform Dither

与图3中一样,图6中,加入的均匀分布 Dither 信号破坏了无 Dither 时截位误差 $z(m)$ 的周期性,从而提高了截位后信号 $y(n)$ 的 SFDR,如图8所示。



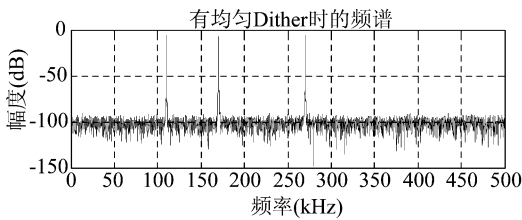


图8 加入均匀 Dither 前后截位信号频谱对比图

Fig.8 The frequency-domain comparison of truncated signal without and with Uniform Dither

从图8中,加入高斯 Dither 之后,截位信号的 SFDR 提高了约 15dB。

6 结论

本文首先在理论上分析了高精度量化信号到低精度量化信号转换过程中由于截位误差谐波失真引入的尖峰噪声,并根据统计方法推导出信号转换前加入 Dither 信号的截位误差数学表达式。同时以两种常见的服从高斯分布及均匀分布的随机信号为例利用 Matlab 对精度转换前加 Dither 信号进行了仿真。仿真结果表明,在信号精度转换之前加入 Dither 信号,可明显提高转换后信号的 SFDR,理论推导表达式与仿真结果吻合。

参考文献

- [1] Dias P, Silva G, Cruz S. Dithering performance of over sampled ADC systems affected by hysteresis[J]. Journal of the International Measurement Confederation, 2002, 32(1):51-59.
- [2] Wagdy Z, Fawzy M. Effect of additive dither on the resolution of ADC's with single-bit or mulibit errors [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1996, 45(2): 610-615.
- [3] Suresh B, Wollman H B. Testing an ADC linearized with pseudorandom dither [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1998, 47(4): 839-848.
- [4] 张云,李广军. 一种适于引入 Dither 的流水线 ADC 结构[J]. 现代电子技术, 2011, 34(10):160-162.
- [5] Blesser B, Locantii B. The application of narrowband Dither operating at the Nyquist frequency in digital systems to provide improved signal to noise ratio over conventional Dithering [J]. Audio Eng, 1987, 35(6): 446-454.
- [6] Anna D. A-D conversion with Dither signal-possibilities and limitations [J]. Measurement Science Review, 2001, 1(1): 75-78.
- [7] Wagdy M F, Ng W. Validity of uniform quantization error model of sinusoidal signals without and with Dither [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1989, 38(3): 718-722.
- [8] Shu Y S, Song B S. A 15 bit linear 20M Sample/s pipelined ADC digitally calibrated with signal-dependent Dithering [J]. IEEE Journal Solid-State Circuits, 2008, 43(2): 342-350.
- [9] 余昌和,李建黎. 低信噪比下相干信号的 DOA 估计的白噪声滤除方法[J]. 信号处理,2012,28(7): 957-962.
- [10] YU CH H, LI J L. A White Noise Filtering Method for DOA Estimation of Conherent Signals under Low SNR [J]. Signal Processing,2012,28(7):957-962. (in Chinese)
- [11] 王粒宾,崔琛,沙正虎. 截断效应下平滑信号的稀疏分解方法[J]. 信号处理, 2011, 27(6): 956-960.
- [12] WANG L B, CUI CH, SHA ZH H. Sparse Decomposition Method of Smooth Signal Under Truncation Effect [J]. Signal Processing, 2011, 27(6):956-960. (in Chinese)
- [13] 陈廷乾,许俊,朱凯,等. 高精度流水线 A/D 转换器误差分析与系统设计[J]. 微电子学, 2008, 38(1): 126-128.
- [14] CHEN T Q, XU J, ZHU K. Error Analysis and System Design of High-Accuracy Pipelined A/D Converters [J]. Microelectronics, 2008, 38(1):126-128. (in Chinese)
- [15] 程梦璋,景为平. 新型流水线 ADC 的设计与分析[J]. 电子科技大学学报, 2008, 37(6): 930-933.
- [16] CHENG M ZH, JING W P. Design and Analysis of a Novel Pipelined ADC [J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2008, 37(6): 930-933. (in Chinese)

作者简介



郭连平 男,1985年生,电子科技大学自动化工程学院博士研究生,主要研究方向为高速数据采集及数字中频处理。
E-mail:guolianping2008@126.com

田书林 男,1968年生,电子科技大学自动化工程学院教授,博导,主要研究方向电子测量仪器。

王志刚 男,1967年生,电子科技大学自动化工程学院副教授,硕士生导师,主要研究方向为高速数据采集及处理。