

# 基于积分二次相位函数和分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号参数估计

唐鹏飞 林钱强 袁 斌 陈曾平

(国防科学技术大学电子科学与工程学院 ATR 实验室, 湖南长沙 410073)

**摘 要:** 针对高斯白噪声中多分量线性调频信号参数估计问题, 提出了一种基于积分二次相位函数(IQPF)和分数阶 Fourier 变换的新方法。分析了 IQPF 估计线性调频信号调频率的原理, 指出 IQPF 有压制弱信号的缺点。为解决强度相差较大的多分量线性调频信号中弱分量信号参数估计问题, 提出利用分数阶 Fourier 变换域的信号分离技术, 逐次估计强信号分量的参数并将其消去, 来提高多分量信号参数估计的可靠性。最后通过计算机仿真, 验证了该方法的有效性。这种方法与 Radon-Wigner 变换法、Radon-Ambiguity 变换法和单纯的分数阶 Fourier 变换法相比, 极大的简化了计算。因此, 该方法非常适合于多分量 LFM 信号快速参数估计。

**关键词:** 线性调频信号; 参数估计; 积分二次相位函数; 分数阶傅里叶变换

**中图分类号:** TP911.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2012)07-0926-06

## Parameter Estimation of Multi-component LFM Signals Using Integrated Quadratic Phase Function and Fractional Fourier Transform

TANG Peng-fei LIN Qian-qiang YUAN Bin CHEN Zeng-ping

(ATR Key Lab, School of Electronic Science and Engineering, NUDT, Changsha, Hunan, 410073, China)

**Abstract:** To estimate the parameters of multi-component linear frequency modulation (LFM) signals in the presence of white Gaussian noise, a new method based on integrated quadratic phase function (IQPF) and fractional Fourier transform is presented. The theory of IQPF for estimating the chirp rate is analyzed and the shortcoming of suppressing the weak LFM signal is pointed out. In order to estimate the parameters of the weak LFM signals in cases involving the strong LFM signals, a novel scheme is put forward. It combines IQPF with the fractional Fourier transform to estimate the parameters of strong LFM signals and then eliminate them one by one. Computer simulations have verified the effectiveness of the method. Compared with Radon-Wigner transform (RWT), Radon-Ambiguity transform (RAT) and pure fractional Fourier transform, the proposed method is more computationally efficient. Hence, the method can serve as a good candidate for quick parameter estimation of multi-component LFM signals.

**Key words:** Linear frequency modulation signal; parameter estimation; Integrated quadratic phase function; fractional Fourier transform

### 1 引言

线性调频(linear frequency modulation, LFM)信号

是一种典型的非平稳信号,广泛地应用于雷达、声纳、通信、生物医学及电子对抗等领域中,研究多分量 LFM 信号参数估计具有重要的应用价值。

针对加性高斯白噪声条件下的 LFM 信号参数估计问题,众多国内外学者已进行了大量的研究。其中,最大似然方法<sup>[1]</sup>是一种最佳估计,但获取参数估计值需要进行二维搜索,运算量大,且有可能会收敛到局部极值点。结合信号在时频面分布特性的方法如 Radon-Wigner 变换(RWT)法<sup>[2]</sup>具有较好的性能,但需要进行二维搜索,计算量很大;Radon-Ambiguity 变换(RAT)法<sup>[3]</sup>虽然仅需一维搜索,但由于要进行从直角坐标到极坐标的坐标变换,计算量仍较大。分数阶 Fourier 变换<sup>[4][5]</sup>是一种灵活的线性变换,在处理多分量 LFM 信号时不会出现交叉项,但需要在所有分数阶域上对信号做分数阶 Fourier 变换,计算量也较大。

为了减少计算量,提高算法的实时性,Peleg 等提出了离散多项相位变换(DPT)法<sup>[6]</sup>,O'Shea 提出了三次相位函数(CPF)<sup>[7]</sup>法。王勇等借鉴 CPF 方法,提出了二次相位函数(QPF)方法<sup>[8]</sup>,该方法分析单分量 LFM 信号具有优异的性能,但当存在多分量 LFM 信号时,不同信号间产生的交叉项有可能形成伪峰,对此许多学者提出了不同的改进方法,主要有积分二次相位函数(IQPF)方法<sup>[9][10]</sup>,乘积三次相位函数(PCPF)方法<sup>[11]</sup>和加权平均三次相位函数方法<sup>[12]</sup>。

本文首先分析了 IQPF 方法估计 LFM 信号调频率的原理,指出 IQPF 有压制弱信号的缺点,然后在分析分数阶 Fourier 变换估计 LFM 信号参数的原理的基础上,提出了一种基于积分二次相位函数和分数阶 Fourier 变换的新方法,并对该方法的计算量进行了分析,最后通过计算机仿真验证了该方法的有效性。

## 2 基于 IQPF 的调频率估计算法

加性高斯白噪声中的多分量 LFM 信号可表示为

$$s(t) = \sum_{i=1}^K A_i \exp \left[ j2\pi \left( f_i t + \frac{1}{2} f_{mi} t^2 \right) \right] + w(t) \quad (1)$$

$$0 \leq t \leq T$$

其中,  $w(t)$  是均值为零、方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声,  $A_i$ ,  $f_i$ ,  $f_{mi}$  分别为第  $i$  个 LFM 信号的幅值、初始频率、调频率。假设采样频率为  $f_s$ , 则采样点数  $N = f_s T$ , 令  $a_i = 2\pi f_i / f_s$ ,  $b_i = \pi f_{mi} / f_s^2$ , 则式(1)可表示为

$$s(n) = \sum_{i=1}^K A_i \exp \left[ j(a_i n + b_i n^2) \right] + w(n),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

为了使频谱不发生混叠,要求  $a_i, b_i$  的取值范围分别为

$$-\pi \leq a_i \leq \pi, -\pi/N \leq b_i \leq \pi/N \quad (3)$$

对于信号  $s(n)$ , 其 QPF 定义为<sup>[8]</sup>

$$QFP(n, \omega) = \sum_m s(n+m)s(n-m)e^{-j\omega m^2} \quad (4)$$

其中  $0 \leq n \leq N-1, m \in \Gamma = \{ \gamma : 0 \leq n \pm \gamma \leq N-1 \}$ 。

将式(2)中的第  $i$  个 LFM 信号分量代入式(4), 取模得到

$$|QFP(n, \omega)| = A^2 \left| \sum_m e^{j(2b_i - \omega)m^2} \right| \quad (5)$$

可以看出,当  $\omega = 2b_i$  时,式(5)取最大值。因此可以通过搜索  $n_c$  时刻  $|QFP(n_c, \omega)|$  的峰值获得  $b_i$  的估计值。

由于 CPF 为双线性变换,可以证明,当存在多分量 LFM 信号时,会出现交叉项,从而  $|QFP(n, \omega)|$  将可能形成伪峰。当信号数量为  $K (K \geq 2)$  时,交叉项的个数为  $K^2 - K$ , 当任意两个 LFM 信号满足式(6)所示关系时,交叉项将在  $\omega = b_i + b_j$  处形成伪峰。

$$(a_i - a_j) + 2(b_i - b_j)n = 0 \quad (6)$$

在多分量 LFM 信号条件下,由于信号自项的峰值位置与时间无关,只取决于信号的调频率,而伪峰的形成与时间有关,故文献[9]提出了 IQPF 方法来抑制伪峰,并增强自项形成的峰值。

$$IQFP(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_m s(n+m)s(n-m)e^{-j\omega m^2} \right| \quad (7)$$

图 1、图 2 分别为含有 2 个 LFM 信号分量的观测信号的 QPF 幅值和 IQPF, 两个 LFM 信号幅度相同,  $a_1 = 3\pi/5, b_1 = -\pi/5N, a_2 = \pi/5, b_2 = \pi/5N$ , 信号长度  $N = 257$ 。由式(6), 可知当  $n = N/2$  时, QPF 的幅值  $|QFP(n, \omega)|$  将在  $b_1 + b_2 = 0$  处出现伪峰。图 1 即为  $n = N/2$  时信号的 QPF 幅值, 可见由于伪峰的出现, 会得到虚假的调频率估计值。图 2 为 IQPF 的输出结果, 可见伪峰得到了有效抑制, 通过检测峰值位置即可提取两个信号的调频率。

当两个 LFM 信号幅度之比  $A_1 : A_2$  分别为 1:2、1:3 时, 对应的 IQPF 的输出结果如图 3、图 4 所示。可见, 强信号分量将会遮盖弱信号分量, 直接检测峰值将难

以实现弱信号分量调频率的可靠估计。对此,本文结合分数阶 Fourier 域的信号分离技术,依据各信号分量的强弱,由强到弱逐次估计各信号分量的参数并将其从观测信号中消去,来实现对多分量信号的参数估计。

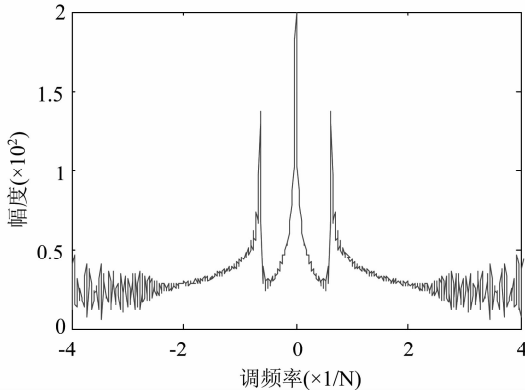


图1  $n=N/2$  时观测信号的 QPF 幅值  
Fig.1 The magnitude of QPF when  $n=N/2$

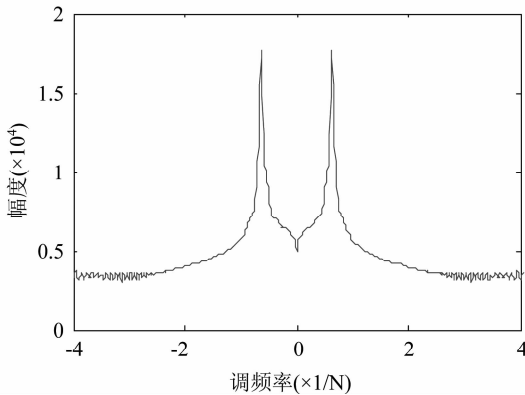


图2 观测信号的 IQPF  
Fig.2 The IQPF of 2-component LFM signal

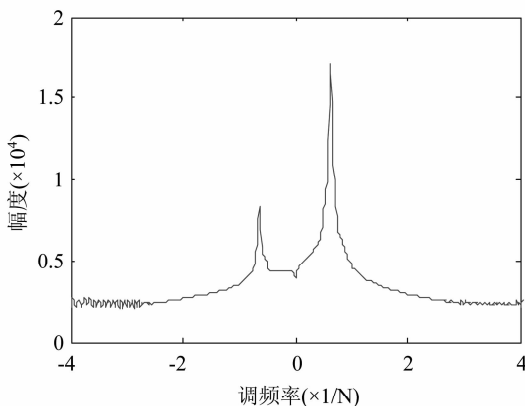


图3 幅度比为 1:2 的 IQPF  
Fig.3 The IQPF when  $A_1:A_2=1:2$

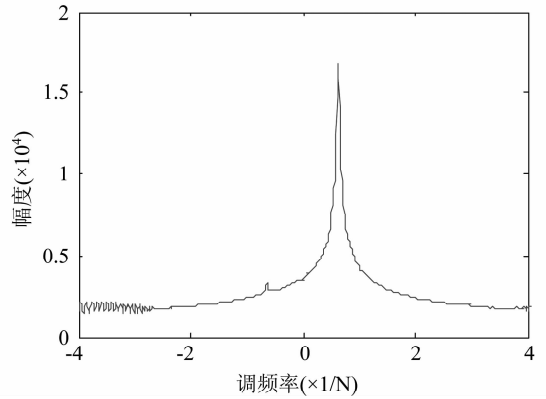


图4 幅度比为 1:3 的 IQPF  
Fig.4 The IQPF when  $A_1:A_2=1:3$

### 3 基于分数阶 Fourier 变换的初始频率估计算法

分数阶 Fourier 变换是一种广义的 Fourier 变换,可以解释为信号在时频平面上绕原点作任意角度的逆时针旋转,也可以解释为信号在一组正交的 LFM 信号基上的线性表示<sup>[13]</sup>。一个 LFM 信号只在某一特定的分数阶 Fourier 域中会呈现出较好的能量聚集性,而白噪声在任何分数阶 Fourier 域中均不会出现能量聚集性。因此,利用观测信号的分数阶 Fourier 变换可实现 LFM 信号的检测和参数估计。

信号  $s(t)$  的分数阶 Fourier 变换定义为<sup>[13]</sup>

$$s_p(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) K_\alpha(u, t) dt \quad (8)$$

其中,  $p$  为分数阶 Fourier 变换的阶,  $\alpha = p\pi/2$ ,  $K_\alpha(u, t)$  为分数阶 Fourier 变换的核函数,

$$K_\alpha(u, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{j\frac{t^2+u^2}{2}\cot\alpha-jut\csc\alpha}, & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t-u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t+u), & \alpha = (2n\pm 1)\pi \end{cases} \quad (9)$$

在实际应用时,首先要解决分数阶 Fourier 变换的计算问题。目前,已有多种快速算法,这些算法在计算量和精度方面各不相同。本文采用文献[14]提出的快速算法。在使用该算法时,需要限定信号的时域表示在区间  $[-T/2, T/2]$  内,频域表示在区间  $[-B/2, B/2]$  内,并引入一个尺度因子  $\lambda = \sqrt{T/B}$ ,将时域  $t$  和

频域  $f$  进行量纲归一化,分别转换成无量纲的域  $t/\lambda$  和  $f/\lambda$ 。这样,信号所在的时域区间和频域区间具有相同的长度  $\lambda = \sqrt{TB}$ 。

由于量纲归一化,有式(10)成立

$$f_m T / f_s = -\cot(\alpha) \quad (10)$$

在用 IQPF 估计出 LFM 信号的调频率  $\hat{f}_m$  的前提下,可计算出分数阶 Fourier 变换的阶次  $p$  为

$$p = 2\alpha / \pi = 2 \arccot(-\hat{f}_m T / f_s) / \pi \quad (11)$$

对观测信号进行该阶次的分数阶 Fourier 变换,然后搜索出峰值点所对应的坐标  $u_p$ ,就可估计出 LFM 信号的初始频率  $\hat{f}_0$ :

$$\hat{f}_0 = u_p \csc(p\pi/2) \quad (12)$$

## 4 基于 IQPF 和分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号参数估计

### 4.1 算法描述

如果观测信号为单分量 LFM 信号或强度相近的多分量 LFM 信号:首先计算信号的 IQPF,并估计出各分量信号的调频率,然后在对应的分数阶 Fourier 域内进行分数阶 Fourier 变换,最后通过搜索峰值点位置估计出初始频率。但当观测信号为强度相差较大的多分量 LFM 信号时,用上述方法则可能出现强分量掩盖弱分量的问题。为了解决这一问题,本文采用分数阶 Fourier 变换域的信号分离技术来实现对弱信号参数估计。其主要思想是:根据各信号分量的强度,按照由强到弱的次序,逐个估计出各信号分量的调频率,并由分数阶 Fourier 变换估计出初始频率,再依次从观测信号中消去最强信号分量。详细的步骤为:

(1) 计算观测信号的 IQPF,得到最强信号分量调频率的估计值  $\hat{f}_{m1}$ 。

(2) 由式(11)得到分数阶 Fourier 变换的阶次  $p_1$ ,计算该阶次的分数阶 Fourier 变换,搜索峰值位置  $u_{p1}$  得到该分量信号初始频率的估计值  $\hat{f}_1$ 。

(3) 在  $p_1$  阶次的分数阶 Fourier 域内构造一个中心为  $u_{p1}$  的极窄带阻滤波器,滤除最强信号分量,然后进行  $-p_1$  阶的分数阶 Fourier 变换,将信号变换回时域。

(4) 重复以上处理过程,直至剩余信号分量的幅

度低于某一预先设定的阈值。这样就可得到所有可检测信号分量的参数估计,

### 4.2 计算量分析

设时域采样数据点数为  $N$ ,变换域内的数据点数为  $M$ 。一般来说,为精确定位变换域内的峰值位置,要求  $M$  大于  $N$ 。直接计算 RWT 的运算量为  $O(MN^2)$ ,需要进行直角坐标到极坐标的非线性变换和二维搜索;采用解线调计算 RWT 的运算量为  $O(MN \log_2 N)$ ,需要进行二维搜索<sup>[2]</sup>;计算 RAT 的运算量为  $O(MN \log_2 N)$ ,仅需进行一维搜索,但需要进行直角坐标到极坐标的坐标变换<sup>[3]</sup>。IQPF 的运算量为  $O(MN \log_2 N)$ ,虽然与 RAT 和解线调的 RWT 相当,但由于不需要进行坐标变换,仅需进行一维搜索,并且 FRFT 利用 FFT 来实现的运算量仅为  $O(N \log_2 N)$ <sup>[14]</sup>。因此,本文提出的方法的计算量相对较小。

## 5 仿真实验与分析

为验证算法的性能,本文采用 matlab7.0 软件进行了仿真实验。假定观测信号为含有加性高斯白噪声的两个 LFM 信号,噪声相对于两个 LFM 信号分量的信噪比分别为 10dB、0.46dB。两个 LFM 信号参数分别为:  $A_1 = 1$ ,  $f_1 = 60\text{Hz}$ ,  $f_{m1} = 20\text{Hz/s}$  和  $A_2 = 1/3$ ,  $f_2 = 40\text{Hz}$ ,  $f_{m2} = -10\text{Hz/s}$ 。采样频率  $f_s = 200\text{Hz}$ ,信号采样点数  $N = 257$ 。

计算观测信号的 IQPF,结果如图 5 所示,从图中可以明显地看到一个尖峰,其位置对应于强信号分量的调频率,而弱信号分量形成的峰值不可见。由图 5 的峰值位置估计出强信号分量的调频率为  $\hat{f}_{m1} = 20.05\text{Hz/s}$ ,利用式(11)计算出对应的分数阶 Fourier 变换阶次  $\hat{p}_1 = -0.918$ ,对观测信号作  $\hat{p}_1$  阶分数阶 Fourier 变换,仿真结果如图 6 所示。根据此变换阶次上的谱峰位置,利用式(12)得到其初始频率的估计值  $\hat{f}_1 = 60.08\text{Hz}$ 。构造极窄带阻滤波器,将已测得参数的强信号分量滤除后,通过  $-\hat{p}_1$  阶分数阶 Fourier 变换回到时域。求剩余信号的 IQPF,仿真结果如图 7 所示,估计出调频率为  $\hat{f}_{m2} = -10.09\text{Hz/s}$ ,对应的分数阶 Fourier 变换阶次  $\hat{p}_2 = 0.959$ ,对信号作  $\hat{p}_2$  阶分数阶 Fourier 变换,

仿真结果如图8所示,得到其初始频率的估计值  $\hat{f}_2 = 39.8\text{Hz}$ 。由仿真结果可见,本文提出的算法具有较好的性能。

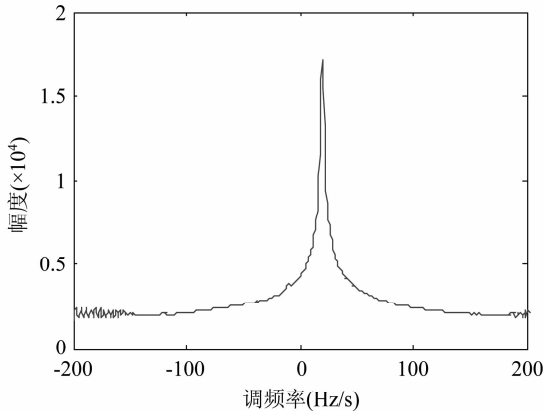


图5 观测信号的 IQPF

Fig. 5 The IQPF of the received signal

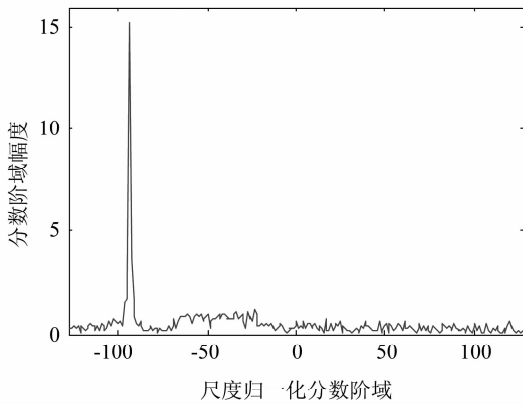


图6 观测信号的  $\hat{p}_1$  阶分数阶 Fourier 变换

Fig. 6 The fractional Fourier transform of order  $\hat{p}_1$

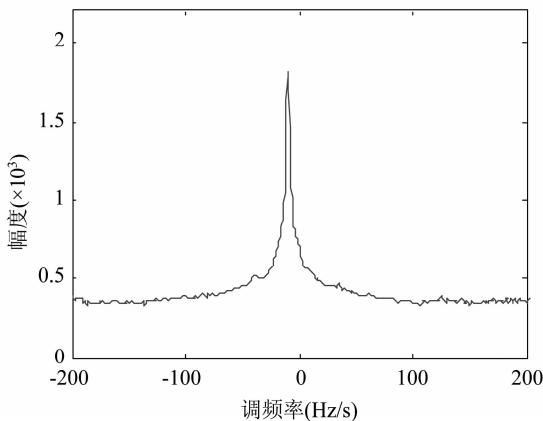


图7 滤除强信号分量的 IQPF

Fig. 7 The IQPF of the filtered signal

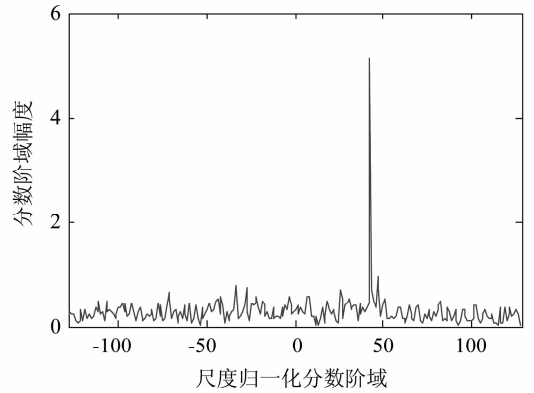


图8 滤除强信号分量的  $\hat{p}_2$  阶分数阶 Fourier 变换

Fig. 8 The fractional Fourier transform of order  $\hat{p}_2$

## 6 结束语

本文提出了一种基于积分二次相位函数和分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号参数估计方法。积分二次相位函数是一种快速有效估计 LFM 信号调频率的方法,但当存在强弱不同的多分量 LFM 信号时,无法同时得到弱信号调频率的有效估计值。对此,本文结合分数阶 Fourier 变换的方法,首先采用积分二次相位函数估计出强信号分量的调频率,然后在对应的分数阶 Fourier 域内进行分数阶 Fourier 变换,估计出强信号分量的初始频率,并通过设计窄带滤波器将其滤除,最后再进行分数阶 Fourier 反变换变换回时域。重复上述过程,即可按由强到弱的顺序依次估计出各分量 LFM 信号的参数。与常用的 Radon-Wigner 变换法、Radon-Ambiguity 变换法和单纯的分数阶 Fourier 变换法相比,该方法计算量较小。仿真结果验证了该方法的有效性。因此,本文提出的方法是一种快速有效的多分量 LFM 信号参数估计方法。

## 参考文献

- [1] Abatzoglou T J. Fast maximum likelihood joint estimation of frequency and frequency rate[J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System, 1986, 22(6): 708-715.
- [2] Barbaroma S. Analysis of multicomponent LFM signals by a combined Wigner-Hough transform[J]. IEEE Trans. on signal Processing, 1995, 43(6): 1511-1515.
- [3] Wang M, Chan A K, and Chui C K. Linear frequency-modulated signal detection using Radon-ambiguity transform[J]. IEEE Trans. on signal Processing, 1998, 46(3):

- 571-586.
- [4] 赵兴浩,陶然,周思永,王越. 基于 Radon-Ambiguity 变换和分数阶傅里叶变换的 chirp 信号检测及多参数估计[J]. 北京理工大学学报,2003,23(3):371-374.  
Zhao X H, Tao R, Zhou S Y, Wang Y. Chirp signal detection and multiple parameter estimation using Radon-ambiguity and fractional Fourier transform[J]. Transactions of Beijing institute of technology,2003,23(3):371-374. (in Chinese)
- [5] 刘建成,王雪松,刘忠等. 基于分数阶 Fourier 变换的 LFM 信号参数估计精度分析[J]. 信号处理,2008,24(2):197-200.  
Liu J C, Wang X S, Liu Z, et al. Parameter resolution of LFM signal based on Fractional Fourier transform [J]. Signal processing,2008,24(2):197-200. (in Chinese)
- [6] Peleg S and Porat B. Estimation and classification of polynomial-phase signal[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 1991,37(2):422-430.
- [7] O'Shea P. A fast algorithm for estimating the parameters of a quadratic FM signal[J]. IEEE Trans. on Signal Processing,2004,52(2):385-393.
- [8] 王勇,姜义成. 一种新的 LFM 信号参数估计算法[J]. 信号处理,2008,24(1):132-134.  
Wang Y, Jiang Y C. A new algorithm for parameter estimation of LFM signals [J]. Signal processing, 2008, 24(1): 132-134. (in Chinese)
- [9] 李宏,秦玉亮,李彦鹏等. 基于积分二次相位函数的多分量 LFM 信号分析[J]. 电子与信息学报,2009,31(6):1363-1366.  
Li H, Qin Y L, Li Y P, et al. Analysis of multi-component LFM signals by the integrated quadratic phase function[J]. Journal of electronics and information technology,2009,31(6):1363-1366. (in Chinese)
- [10] Wang P, Li H B, et al. Integrated cubic phase function for linear FM signal analysis[J]. IEEE Tran. on Aerospace and electronic systems,2010,46(3):963~977.
- [11] Yang J Y, Wang, P. An algorithm for parameter estimation of multicomponent chirp signals [C]. IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing, 2006;1-4.
- [12] 李利,司锡才,张雯雯等. 改进的多分量 LFM 信号参数估计算法及其快速实现[J]. 系统工程与电子技术,2009,31(11):2560-2562.  
Li L, Si X C, Zhang W W, et al. Improved estimation algorithm of multi-component LFM signal parameters and its fast implementation [J]. Systems engineering and electronics,2009,31(11):2560-2562. (in Chinese)
- [13] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Tran. on Signal Processing,1994,42(11):3084~3091.
- [14] Ozaktas H M, Arikan O, Kutay A A, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE Tran. on Signal Processing,1996,44(9):2141~2150.

#### 作者简介



唐鹏飞(1984-),男,国防科学技术大学电子科学与工程学院博士研究生,研究方向为电子侦察,实时信号处理等。

E-mail:tangpengfei@nudt.edu.cn



林钱强(1983-),男,福建莆田人,国防科学技术大学电子科学与工程学院博士研究生,研究方向为雷达成像,高速数据采集、处理等。



袁斌(1982-),男,湖南湘潭人,国防科学技术大学电子科学与工程学院博士研究生,研究方向为雷达成像、目标识别等。



陈曾平,男,福建福清人,教授,博士生导师,国防科技大学 ATR 国防科技重点实验室副主任,研究方向为雷达信号处理、雷达目标识别、高速数据采集等。