

基于一种新的交换矩阵的离散 分数阶傅立叶变换实现

侯友国^{1,2} 郭伟¹ 李新山¹

(1. 电子科技大学通信抗干扰国家重点实验室, 四川 成都 610054

2. 江西南昌工程学院, 江西 南昌 330099)

摘要: 分数阶傅立叶变换比傅立叶变换更具有一般性, 多年来引起人们深入研究。由于连续的分数阶傅立叶变换在工程实现时都要抽样离散化, 直接对连续分数阶傅立叶变换的核离散化会失去很多重要的性质, 因此人们研究它的离散实现并保持它具有与连续分数阶变换同样的性质。本文提出了一种新的交换矩阵实现离散分数阶傅立叶变换, 其变换的离散核矩阵与连续变换的分数阶傅立叶变换核有相似性, 诸如酉特性、可加性、正交性和可逆性。仿真结果证实了所提出的分数阶傅立叶变换核与连续分数阶傅立叶变换核的相似性以及两种变换对矩形信号这种典型信号的分数阶傅立叶变换的相似性。

关键词: 交换矩阵; 酉特性; 傅立叶变换; 分数阶傅立叶变换

中图分类号: TN911.76 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2010)04-0569-04

Realization of Discrete Fractional Fourier Transform Based on a Newly Commuting Matrix

HOU You-guo^{1,2} GUO Wei¹ LI Xin-shan¹

(1. National Key Lab of Communication, UESTC, Chengdu 610054, China;

2. Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China)

Abstract: For many years, the fractional Fourier Transform (FRFT) is deep investigated because of a generalization of the conventional Fourier transform. The engineering realization of the continuous FRFT has to be sampled and discretized, and such an achieved core matrix will lose many important properties. Thus, people have done many researches on the discrete realization of the core matrix of the continuous FRFT. In this paper, a newly commuting matrix is proposed to implement the discrete fractional transform (DFRFT). The core matrix of the DFRFT resulted from the presented commuting matrix has the similar properties with the core of the continuous fractional Fourier transform, such as unitary, additive, orthogonal, reversible. Finally, the simulation results have shown the similarity of the core matrix of the proposed DFRFT and the core function of continuous FRFT, and the similarity of two FRFTs of rectangular signal.

Key words: Commuting matrix; Unitary; Fourier transform; Fractional Fourier transform

1 引言

分数阶傅立叶是近二十年来研究的一种新时频分析方法, 它比普通的傅立叶变换更具有一般性, 可以在时频面上对信号任意角度旋转, 因此将有更广泛的用途。现在人们研究把它用在信号检测[1]、信号设计

[2]、多址技术[3]等方面。实现离散分数阶傅立叶变换主要有三种形式: 1. 直接抽样的离散分数阶傅立叶变换[4], 对连续分数阶傅立叶变换直接抽样计算。这样实现的分数阶傅立叶变换失去了很多重要性质, 比如, 酉特性、加法性和可逆性。因此这种方法实现的DFRFT在运用中受到很多限制; 2. 改进性抽样的

DFRFT[5,6],这种实现的DFRFT首先要对输入信号无量纲化,然后抽样计算。虽然这种变换与连续变化具有相似性并且具有快速算法,但这种变换的分数阶核矩阵没有可加性,并且核矢量不是正交的;3.特征矢量分解法[7,8,9],这种变换首先是找到一种与傅立叶变换可交换的矩阵,然后求离散变换核。这种变换得到的分数阶核矩阵满足酉特性、可加性、正交性和可逆性。文献[4]直接抽样实现的离散分数阶傅立叶变换的运算量与方法3实现的运算量均为 $O(N^2)$ 。本文从二阶微分方程的解是厄尔特-高斯(Hermite-

$$K_p(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-j\cot(\alpha)}{2\pi}} \exp\left(j\frac{t^2+u^2}{2}\cot(\alpha) - jtu\csc(\alpha)\right) & \alpha \neq k\pi \\ \delta(t-u) & \alpha = 2k\pi \\ \delta(t+u) & \alpha + \pi = 2k\pi \end{cases} \quad (2)$$

对于傅立叶变换矩阵 F ,由于其只有四个特征值分别为 $1, -1, j, -j$,所以其对应的特征向量有无限个,因此文献[7,8,9]直接利用一种交换阵(它有不同的特征值),来实现DFRFT。下面我们求本文提出的交换矩阵。

厄尔特-高斯(Hermite-Gaussian)函数是下面二阶微分方程的解[11]:

$$\frac{d^2}{dt^2}(f(t)) - 4\pi^2 t^2 f(t) = \lambda f(t) \quad (3)$$

令 $D = \frac{d}{dt}$ 是微分算子, F 是普通的傅立叶变换。

根据时频微分特性关系,(3)变换为下面(4):

$$(D^2 + FD^2F^{-1})f(t) = Sf(t) = \lambda f(t) \quad (4)$$

定理:如果 A, B 是可交换矩阵,即 $AB = BA$,则 A, B 有相同的特征向量[7]。

在(4)中的矩阵 S 和普通的傅立叶变换矩阵 F 是可交换矩阵,它们有相同的特征向量。

因为

$$F^2 f(t) = F^{-2} f(t) = f(-t)$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } FS &= F(D^2 + FD^2F^{-1}) = FD^2 + F^2 D^2 F^{-2} F \\ &= FD^2 + D^2 F = FD^2 F^{-1} F + D^2 F \\ &= (FD^2 F^{-1} + D^2) F = SF \end{aligned}$$

因此矩阵 S, F 有相同的特征向量。用微分算子表示位移算子[10]为:

$$f(t + \Delta t) = e^{\Delta t D} f(t) \quad (5)$$

二阶差分方程定义为:

$$\bar{D}^2 f(t) = \frac{f(t + \Delta t) - 2f(t) + f(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} \quad (6)$$

则

Gaussian)函数得到一种新的交换矩阵,同样具有方法3的DFRFT的特性,并且与连续分数阶的核相似,运算量为 $O(N^2)$ 。

2 交换矩阵

一般连续分数阶傅立叶变换定义如下:

$$X_p(u) = \{F^p[x(t)]\}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_p(t, u)x(t)dt \quad (1)$$

在(1)中,旋转角度 α 和 p 的关系为 $\alpha = p\frac{\pi}{2}$,其中核函数为:

$$\bar{D}^2 = \frac{e^{\Delta t D} - 2 + e^{-\Delta t D}}{(\Delta t)^2} = D^2 + \underbrace{\frac{2(\Delta t)^2}{4!} D^4 + \frac{2(\Delta t)^4}{6!} + \dots}_{0((\Delta t)^2)} \quad (7)$$

又因

$$\begin{aligned} F\bar{D}^2 F^{-1} &= F\left(\frac{e^{\Delta t D} - 2 + e^{-\Delta t D}}{(\Delta t)^2}\right)F^{-1} = \frac{e^{j2\pi(\Delta t)t} - 2 + e^{-j2\pi(\Delta t)t}}{(\Delta t)^2} \\ &= \frac{2(\cos(2\pi(\Delta t)t) - 1)}{(\Delta t)^2} = -4\pi^2 t^2 + \frac{(\Delta t)^2}{12} \\ &\quad (16\pi^4 t^4) + 0((\Delta t)^4) \end{aligned} \quad (8)$$

在(8)中,利用了 $F e^{\Delta t D} F^{-1} = e^{j2\pi(\Delta t)t}$,将(7)和(8)代入(4),可以得到(9):

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \bar{D}^2 + F\bar{D}^2 F^{-1} = \frac{e^{\Delta t D} - 2 + e^{-\Delta t D}}{(\Delta t)^2} + \frac{2(\cos(2\pi(\Delta t)t) - 1)}{(\Delta t)^2} \\ &= D^2 - 4\pi^2 t^2 + \frac{(\Delta t)^2}{12} (16\pi^4 t^4) + 0((\Delta t)^2) \end{aligned} \quad (9)$$

由(9)知道算子 \bar{S} 是算子 S 的 $0((\Delta t)^2)$ 逼近。如果

$$\begin{aligned} \bar{S}f(t) &= \lambda f(t), \text{可以得到如下式子(10):} \\ f(t + \Delta t) - 2f(t) + f(t - \Delta t) \\ &+ 2(\cos(2\pi(\Delta t)t) - 1)f(t) = (\Delta t)^2 \lambda f(t) \end{aligned} \quad (10)$$

在(10)中,令 $t = n\Delta t, \Delta t = 1/\sqrt{N}$,则变为下面差分方程:

$$\begin{aligned} f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) \\ + 2\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right) - 1\right)f(n) = \lambda f(n) \end{aligned} \quad (11)$$

因此矩阵 S 的形式如下:

$$\begin{bmatrix}
 -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 1 & 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)-4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2\cos\left(2\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right)-4 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\left(\left(\frac{2\pi}{N}\right)(N-1)\right)-4
 \end{bmatrix} \quad (12)$$

3 分数阶傅立叶变换的离散化

对于离散的分数量阶变换核矩阵可以从下面的方法中得到。将连续分数阶傅立叶变换的核(厄尔特-高斯(Hermite-Gaussian))函数以时间 Δt 抽样,抽样方差为 $\sqrt{\frac{\pi}{2N}}\Delta t$,则其矢量可以离散化为下面式子[7]:

$$\phi_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2^k k!} \sqrt{N/2}} h_n\left(\frac{k}{\sqrt{N/(2\pi)}}\right) e^{-k^2\pi/N} \quad (13)$$

对于抽样点数 N 是偶数,有下面关系:

$$\tilde{\phi}_n(k) = \begin{cases} \phi_n(k) & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \\ \phi_n(k - N) & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1 \end{cases} \quad (14)$$

对于抽样点数 N 是奇数的,有下面关系:

$$\tilde{\phi}_n(k) = \begin{cases} \phi_n(k) & 0 \leq k \leq \frac{N-1}{2} \\ \phi_n(k - N) & \frac{N+1}{2} \leq k \leq N - 1 \end{cases} \quad (15)$$

因此将离散 Hermite 特征函数的特征向量 $\{\tilde{\phi}_n(k)\}$ 归一化,得到下面式子[7]:

$$u_n = \frac{\left[\tilde{\phi}_n(0), \tilde{\phi}_n(1), \dots, \tilde{\phi}_n(N-1) \right]^T}{\left\| \left[\tilde{\phi}_n(0), \tilde{\phi}_n(1), \dots, \tilde{\phi}_n(N-1) \right]^T \right\|} \quad (15)$$

由于矩阵 S 和普通傅立叶变换阵 F 具有相同的特征向量,且矩阵 S 有完备的正交基 $\{v_k\}$,将向量 u_n 投影到正交基上,得到一个类似的 Hermite-DFT 向量:

$$\tilde{u}_n = \sum_{(n-k) \bmod 4} \langle u_n, v_k \rangle v_k \quad (16)$$

将特征向量集合 $\{\tilde{u}_n\}$ 用 Schmidt-Gram 方法正交

归一化,得到标准正交基 $\{\hat{u}_n\}$,因此离散分数阶傅立叶变换核为:

$$F^\alpha = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\alpha} \hat{u}_k \hat{u}_k^T & \text{当 } N \text{ 为偶数} \\ \sum_{k=0}^{N-2} e^{-jk\alpha} \hat{u}_k \hat{u}_k^T + e^{-jn\alpha} \hat{u}_k \hat{u}_k^T & \text{当 } N \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (17)$$

由于 $\{\hat{u}_n\}$ 是标准正交基,因此这里提出的 DFRFT 核满足酉特性、正交性、可加性、可逆性,这是容易证明的。

4 仿真分析

图 1 分别是连续厄尔特-高斯(Hermite-Gaussian)函数和可交换矩阵 S 特征向量的的曲线,从图中可以看出两者在低阶吻合很好,高阶有些误差。

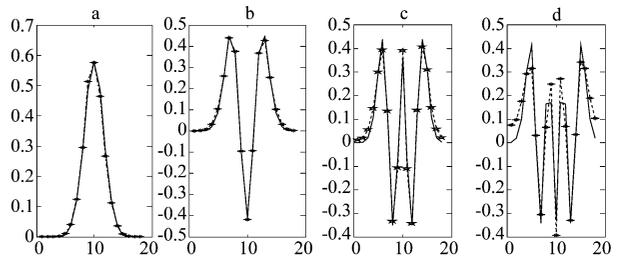


图 1 a, b, c, d 分别是 0, 2, 4, 6 阶的厄尔特-高斯(Hermite-Gaussian)函数(实线)和 S 矩阵对应的特征向量(*+虚线)

图 2 中的 a 是原始的矩形信号 $x(t) = 1$, 当 $|t| < 1$ 时;否则为 0。图 2 中的 b、c、d 分别是阶数为 0.01、0.2、1(角度为 $\pi/2$) 矩形函数的连续分数阶傅立叶变换和提出的离散分数阶傅立叶变换。从图中可以看出提出的离散分数阶傅立叶变换和连续的分数量阶傅立叶变换具有很好的相似性。

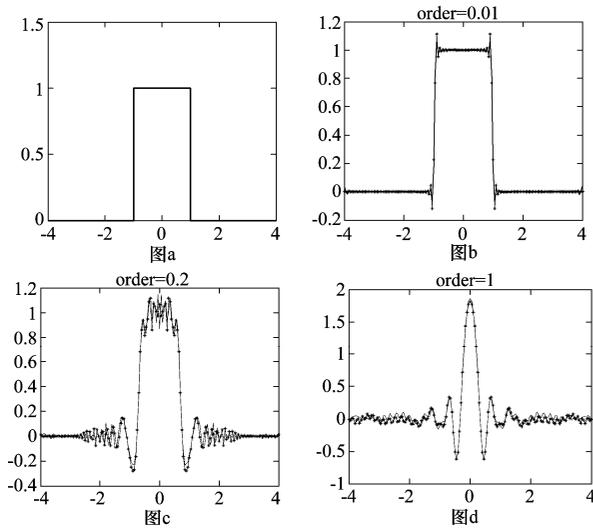


图2 a,b,c,d 分别是原始矩形信号及其不同阶数的连续分数阶傅立叶变换(实线)和离散分数阶傅立叶变换(*+实线)

5 结论

分数阶傅立叶变换是近年来发展的一种新的在变换域分析信号的工具,由于它可以对信号在时频面任意角度的旋转,因此比傅立叶变化更具有一般性,也更有广泛的用途。本文提出的一种新的交换矩阵实现离散分数阶傅立叶变换更加有利于工程实现,因为这种变换的核不但与连续分数阶傅立叶变换核具有相似性,而且离散的核满足酉特性、正交性、可加性和可逆性,因此更具有一般性,这些从上面的理论分析和仿真结果得到了证实。

参考文献

- [1] P. Ooinex, B. Muth, A fractional Fourier based correlator for detecting joint time and frequency offsets[C]. Digital Signal Processing, 2007 15th International conference on July, 1-4, 2007, 623-626.
- [2] G. K. Aggey. G. T. Ran, Application of the FRFT to distortion analysis in transmultiplexers Communications [C]. 2008 24th Biennial Symposium, June 24-26 2008, 68-71.

- [3] C. Pujara, P. Mehta, U. B. Desai, Chirp based multiple access technique using fractional fourier transform [C]. Information communications & signal Processing, 2007 6th international Conference, Dec. , 2007, 1-5.
- [4] 平先军,陶然,周思康,王越,一种新的分数阶傅立叶变换 [J]。电子学报, Vol. 29, No. 3, 2001 年 3 月, pp: 407-408.
- [5] H. M. Ozaktas, O. Arikan, M. A. Kutay, G. Bozdagi, Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE Trans. on SP. Vol. (44), Sept. , 1996, 2141-2150.
- [6] O. Arikan, M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, O. K. Akdemir, Discrete fractional Fourier transformation [C]. IEEE SP Sym., Time-Freq. Anal., vol. 4, 1996, 205-207.
- [7] Soo-Chang Pei, Min-Hung Yeh, Chien-Cheng, Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections [J]. IEEE Trans. SP. Vol. 47, May, 1999, 1335-1348.
- [8] Soo-Chang Pei, Wen-Liang Hsue, Tridiagonal commuting matrices and fractionalizations of DCT and DST matrices of types I, IV, V and VIII [J]. IEEE Trans., SP. Vol. 56, June 2008, 2357-2369.
- [9] Pei. S. C., Hsue. W. L. Discrete fractional Fourier transform based on new nearly tridiagonal commuting matrices [J]. IEEE Trans., SP. Vol. 54, Oct, 2006, 3815-3825.
- [10] F. Hildebrand, Finite-difference equations and simulations [M], Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1968.
- [11] G. Birkhoff, G. C. Rota, Ordinary Differential Equations, New York [M], Wiley, 1989.

作者简介



侯友国,男,江西南昌工程学院讲师,现电子科技大学通信抗干扰技术国家重点实验室在读博士。研究方向:阵列信号处理,抗干扰信号处理,时频信号处理。
E-mail:hoyouguo@163.com。