

基于 Legendre 展开的双基地 SAR 点目标频谱推导

王 放 黎 湘

(国防科技大学电子科学与工程学院, 长沙 410073)

摘要: 双/多基地合成孔径雷达二维点目标频谱的求解是各种频域成像算法的基础, 但斜距表达式中的双根号使得直接精确解析求解非常困难。本文从函数最佳逼近这一全新角度出发, 提出了基于 Legendre 正交展开的双基地 SAR 回波二维频谱的解析求解方法, 得到了比现有方法更为精确的二维频谱。

关键词: 双基地合成孔径雷达; Legendre 多项式; 二维频谱

中图分类号: TN957 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2010)02-0175-05

Point Target Spectra Derived for Bistatic SAR Processing Based on Legendre Polynomial Expansion

WANG Fang LI Xiang

(School of Electronic Science and Engineering, NUDT, Changsha 410073, China)

Abstract: The formulation of a point target spectrum is a key step in deriving synthetic aperture radar focusing algorithms, which exploits the processing efficiency of the frequency domain. However, the existence of a double-square-root (DSR) in the bistatic range equation makes it difficult to find an exact analytical solution for the 2-D spectrum. In this paper, according to the idea of function optimal approach, we derive a new 2-D point target spectrum on the basis of Legendre polynomial expansion, which is more exact than the existing spectrums during the synthetic aperture time.

Key words: bistatic SAR; Legendre Polynomials; 2-D spectrum

1 引言

对点目标回波频谱的求解是各种 SAR 成像算法的基础。然而距离方程中双平方项(DSR)的存在, 双/多基地 SAR 无法采用驻定相位法求解点目标响应频谱。现有的求解方法分为数值计算^[1-4]和解析法两类。前者的计算量很大, 如文献[5]需要对不同的距离频率、方位频率以及斜距, 分别计算一次驻相点。而解析法计算量较小, 如 LBF^[6]、MSR^[7, 8]、DMO^[9, 10]和 TSPP^[11]等方法, 都是在一定假设条件下对距离方程中的 DSR 进行变换, 通过驻定相位点求解频谱的解析形式。LBF 是分别求解收、发距离相位的驻定相位点, 再将其带入频域表达式, 求解近似的驻定相位点 $\hat{\eta}_b$ 。从而频谱相位近似表示为准单基地相位 ψ_1 和双基地形变相位两部分 ψ_2 的和, 其精度与收、发距离展开阶数有关; TSPP

是 LBF 的推广, 保留了更高阶的展开项; MSR 则是将收、发距离相位作为一个整体, 在慢时间零点处进行 Taylor 展开, 而后利用级数反转公式求解驻定相位点 $\tilde{\eta}_b$, 其精度与级数反转时所取项数有关; DMO 是将双基地成像几何转化为等效单基地情况, 而后按照单基地情况进行后续推导, 其精度随基线长度与准单基地最小径向距离比值的减小而提高。深入分析上述三种方法发现, LBF 和 DMO 是一定条件下 MSR 的特例。

实际上, 上述各种解析的方法的本质思想就是将距离双根号通过一个较为简单的便于计算的多项式来近似, 这与函数逼近的思想是相同的。因此, 本文从函数逼近角度出发, 提出了一种基于 Legendre 展开的双基地 SAR 回波二维谱解析求解方法。通过理论分析和仿真实验, 证明了基于 Legendre 展开的点目标二维频谱推导具有比 MSR 方法更好的性能。

2 双基地 SAR 成像几何

如图 1 所示,发射平台 S_T 和接收平台 S_R 分别以恒定速度 V_T 和 V_R 沿平行于 y 轴的方向,以恒定高度 H_T 和 H_R 做匀速直线运动,孔径中心坐标分别为 (X_{Tc}, Y_{Tc}, H_T) 和 (X_{Rc}, Y_{Rc}, H_R) 。成像区域中心位于坐标原点, x 、 y 方向上的成像范围分别为 $(-X_0, X_0)$ 和 $(-Y_0, Y_0)$ 。收、发天线均采用条带工作模式,固定斜视角分别为 θ_R 和 θ_T 。

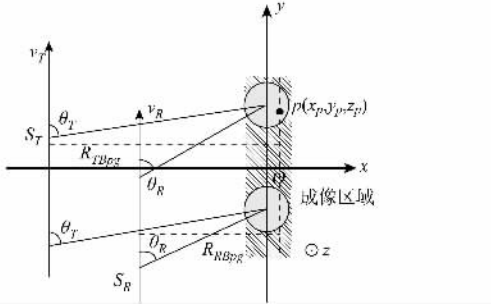


图 1 双基地条带 SAR 成像几何示意图

设成像场景中某点目标 p 的坐标为 (x_p, y_p, z_p) , 则其到发射平台航线和接收平台航线距离分别为

$$R_{RpB} = \sqrt{(z_p - H_R)^2 + (x_p - X_{Rc})^2}$$

$$R_{TpB} = \sqrt{(z_p - H_T)^2 + (x_p - X_{Tc})^2}$$

令 τ 和 t 分别表示快时间和慢时间,孔径中心处为慢时间零点,则 $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, T 为合成孔径时间。任意 t_m 时刻收发天线相位中心(APC)到点目标 p 的距离分为:

$$R_{Rp}(t) = \sqrt{R_{RpB}^2 + (y_p - \nu_R t - Y_{Rc})^2}$$

$$R_{Tp}(t) = \sqrt{R_{TpB}^2 + (y_p - \nu_T t - Y_{Tc})^2}$$

记 $R_p(t) = R_{Tp}(t) + R_{Rp}(t)$, 从而点目标 n 的基频回波信号为

$$s_p(t, \tau) = \sigma_p w_a(t) w_r(\tau - R_p(t)/c) \cdot \exp \left\{ -j2\pi f_c \frac{R_p(t)}{c} + j\pi\gamma \left(\tau - \frac{R_p(t)}{c} \right)^2 \right\} \quad (1)$$

3 基于 Legendre 展开的双基地 SAR 二维频谱推导

首先,将基频回波从 $t - \tau$ 域变换到 $t - f_r$ 域,则

$$S_p(t, f_r) = \sigma_p w_a(t) W_r(f_r) \cdot \exp \left[-j2\pi(f_c + f_r) \frac{R_p(t)}{c} \right] \exp \left(-j\pi \frac{f_r^2}{\gamma} \right) \quad (2)$$

由最佳平方逼近理论可知,波程 $R_p(t)$ 可通过 Legendre 多项式展开成慢时间 t 的级数,即

$$R_p(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \mu_3 t^3 + \dots \quad (3)$$

对(2)式做方位向 FFT,则有

$$S_p(f_a, f_r) = \sigma_p W_r(f_r) \exp \left(-j\pi \frac{f_r^2}{\gamma} \right) \int_{-T/2}^{T/2} w_a(t) \exp[j\phi(t)] dt \quad (4)$$

其中, $\phi(t) = -2\pi(f_c + f_r) \frac{R_p(t)}{c} - 2\pi f_a t$ 。解驻相点方程 $\phi'(t) = 0$, 即

$$f_a + \frac{f_c + f_r}{c} \mu_1 = -\frac{f_c + f_r}{c} (2\mu_2 t + 3\mu_3 t^2 + \dots)$$

根据级数反演法(见附录)可得驻定相位点 t^* 为

$$t^* = b_1 \left(f_a + \frac{f_c + f_r}{c} \mu_1 \right) + b_2 \left(f_a + \frac{f_c + f_r}{c} \mu_1 \right)^2 + b_3 \left(f_a + \frac{f_c + f_r}{c} \mu_1 \right)^3 + \dots$$

其中, $b_1 = -\frac{c}{2(f_c + f_r)\mu_2}$, $b_2 = -\frac{3\mu_3 c^2}{8(f_c + f_r)^2 \mu_2^2}$, $b_3 = -\frac{c^2}{16(f_c + f_r)^3 \mu_2^3} (9\mu_3^2 - 4\mu_2 \mu_4) + \dots$ 。忽略含 f_a 的三次以上项的高次相位,则双基地 SAR 基于 Legendre 展开的二维回波频谱为

$$S_p(f_a, f_r) = \sigma_p W_r(f_r) W_a(f_a) \exp \left(-j\pi \frac{f_r^2}{\gamma} \right) \exp[j\Phi(f_a, f_r)]$$

$$\Phi(f_a, f_r) = -2\pi \frac{f_c + f_r}{c} \mu_0 + \frac{\pi c}{2\mu_2(f_c + f_r)} \left[f_a + \frac{\mu_1}{c} (f_c + f_r) \right]^2 + \frac{\pi c^2 \mu_3}{4\mu_2^3 (f_c + f_r)^2} \left[f_a + \frac{\mu_1}{c} (f_c + f_r) \right]^3 \quad (5)$$

进一步地,如果考虑窄带 SAR,则有 $f_r \ll f_c$, 进而

$$\frac{1}{f_c + f_r} \approx \frac{1}{f_c} - \frac{f_r}{f_c^2} + \frac{f_r^2}{f_c^3}, \frac{1}{(f_c + f_r)^2} \approx \frac{1}{f_c^2} - \frac{2f_r}{f_c^3} + \frac{3f_r^2}{f_c^4}$$

从而二维回波频谱的相位项可以简化为

$$\Phi(f_a, f_r) = \phi_0(f_a; R_{pB}) + \phi_1(f_a; R_{pB}) f_r + \phi_2(f_a; R_{pB}) f_r^2$$

其中,

$$\phi_0(f_a; R_{pB}) = -2\pi \frac{\mu_0}{\lambda} + \pi \frac{\mu_3 \mu_1^3}{4\mu_2^3 \lambda} + \pi \frac{\mu_1^2}{4\mu_2 \lambda} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_3 \mu_1^2}{4\mu_2^3} \right) \pi f_a + \left(\frac{c}{2\mu_2 f_c} + \frac{3\lambda \mu_3 \mu_1}{4\mu_2^3} \right) \pi f_a^2 + \pi \frac{\mu_3 \lambda^2}{4\mu_2^3} f_a^3$$

$$\phi_1(f_a; R_{pB}) = -2\pi \frac{\mu_0}{c} + \pi \frac{\mu_1^2}{2\mu_2 c} + \pi \frac{\mu_3 \mu_1^3}{4\mu_2^3 c} - \left(\frac{c}{2\mu_2 f_c^2} + \frac{3c\mu_3\mu_1}{4\mu_2^3 f_c^2} \right) \pi f_a^2 - \pi \frac{c^2 \mu_3}{2\mu_2^3 f_c^3} f_a^3$$

$$\phi_2(f_a; R_{pB}) = \left(\frac{c}{2\mu_2 f_c^2} + \frac{3c\mu_3\mu_1}{4\mu_2^3 f_c^2} \right) \pi f_a^2 + \frac{3c^2 \mu_3}{4\mu_2^3 f_c^4} \pi f_a^3$$

下面, 根据最佳平方逼近理论, 推导(3)式中的系数 $\mu_j (j=0, 1, 2, 3)$ 。由 Legendre 多项式的定义可知, 前 4 个 Legendre 多项式分别为 $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ 。对 $R_{Rp}(t)$ 和 $R_{Tp}(t)$ 进行 Legendre 正交展开, 根据最佳平方逼近理论, 其三次最佳平方逼近多项式为

$$R_{Rp}(t) \approx R_{RpL}(t) = a_{R0} + a_{R1}t + a_{R2}t^2 + a_{R3}t^3$$

$$R_{Tp}(t) \approx R_{TpL}(t) = a_{T0} + a_{T1}t + a_{T2}t^2 + a_{T3}t^3$$

计算系数 $a_{ij} (i = T \text{ or } R, j = 0, 1, 2)$, 令 $t = \frac{T}{2}x$, 则

$x \in [-1, 1]$, 从而

$$R_{Rp}(t) = R_{Rp}(x) = \sqrt{R_{RpB}^2 + \left(\frac{T\nu_R x - y_p + Y_{Rc}}{2} \right)^2}$$

$$R_{Tp}(t) = R_{Tp}(x) = \sqrt{R_{TpB}^2 + \left(\frac{T\nu_T x - y_p + Y_{Tc}}{2} \right)^2}$$

由定积分性质推导可得, 若 $y \in [a, b]$, 则

$$c_1 = \int_b^a \sqrt{1+y^2} dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(y + \sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2} \right] \Big|_b^a$$

$$c_2 = \int_b^a y\sqrt{1+y^2} dy = \frac{1}{3} (1+y^2)^{3/2} \Big|_b^a$$

$$c_3 = \int_b^a y^2 \sqrt{1+y^2} dy = \frac{1}{4} \left[y(1+y^2)^{3/2} \right] \Big|_b^a - \frac{1}{4} c_1$$

$$c_4 = \int_b^a y^3 \sqrt{1+y^2} dy$$

$$= \left[\frac{1}{5} y^2 (1+y^2)^{3/2} - \frac{2}{15} (1+y^2)^{3/2} \right] \Big|_b^a$$

$$c_5 = \int_b^a y^4 \sqrt{1+y^2} dy = \left[\frac{1}{6} y^3 (1+y^2)^{3/2} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{8} y (1+y^2)^{3/2} \right] \Big|_b^a + \frac{1}{8} c_1$$

其中, 积分限

$$a = \frac{\nu_R T}{2} - (y_p - Y_{Rc}), b = \frac{\nu_R T}{2} - (y_p - Y_{Rc})$$

$$a = \frac{\nu_R T}{R_{RpB}}, b = \frac{\nu_R T}{R_{RpB}}$$

从而

$$\Delta_1 = \langle R_{Rp}(x), P_0(x) \rangle = \int_{-1}^1 R_{Rp}(x) dx = \frac{2R_{RpB}^2}{\nu_R T} c_1$$

$$\Delta_2 = \langle R_{Rp}(x), P_1(x) \rangle$$

$$= \int_{-1}^1 x R_{Rp}(x) dx = \frac{4R_{RpB}^3}{(\nu_R T)^2} c_2 + \frac{4R_{RpB}^2 (y_p - Y_{Rc})}{(\nu_R T)^2} c_1$$

$$\Delta_3 = \langle R_{Rp}(x), P_2(x) \rangle = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) R_{Rp}(x) dx$$

$$= \frac{12R_{RpB}^4}{(\nu_R T)^3} c_3 + \frac{24R_{RpB}^3 (y_p - Y_{Rc})}{(\nu_R T)^3} c_2 +$$

$$\left(\frac{12R_{RpB}^2 (y_p - Y_{Rc})^2}{(\nu_R T)^3} - \frac{R_{RpB}^2}{\nu_R T} \right) c_1$$

$$\Delta_4 = \langle R_{Rp}(x), P_3(x) \rangle = \int_{-1}^1 \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right) R_{Rp}(x) dx$$

$$= \frac{40R_{RpB}^5}{(\nu_R T)^4} c_4 + \frac{120R_{RpB}^4 (y_p - Y_{Rc})}{(\nu_R T)^4} c_3 +$$

$$\frac{120R_{RpB}^3 (y_p - Y_{Rc})^2}{(\nu_R T)^4} c_2 + \frac{40R_{RpB}^2 (y_p - Y_{Rc})^3}{(\nu_R T)^4} c_1 - \frac{3}{2} \Delta_2$$

进而可得展开系数为: $a_{R0} = \frac{1}{2} \Delta_1 - \frac{5}{4} \Delta_2, a_{R1} = \frac{3}{T}$

$$\Delta_2 - \frac{21}{2T} \Delta_4, a_{R2} = \frac{15}{T^2} \Delta_3, a_{R3} = \frac{70}{T^3} \Delta_4$$
。同理可计算 $R_{Tp}(t)$

的三次最佳平方逼近多项式系数。从而

$$\mu_j = a_{Rj} + a_{Tj} \quad (j=0, 1, 2, 3)$$

4 理论误差对比

上述基于 Legendre 正交展开的二维频谱求解方法是从函数逼近思想出发, 考虑对双根号结构的化简。所谓函数逼近是指对函数类 A 中给定的函数 $f(x)$, 在另一类简单的便于计算的函数类 B 中寻找函数 $p(x) \in B$, 使 $p(x)$ 与 $f(x)$ 的误差在某种度量意义下最小。函数类 A 通常是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 即连续函数空间 $C[a, b]$, 而函数类 B 通常为 n 次多项式空间 H_n , 有理函数或分段低次多项式等。从上面的推导过程可知, 频谱求解精度受级数反演求解时保留阶数的限制, 实质上就是受双根号近似精度的限制, 而为了后续成像处理方便的需要级数反演时通常忽略 3 次以上高次项, 因此应着重从提高 DSR 近似精度入手来提高

最终的频谱精度。

由马克劳林公式可知,如果对 $R_n(t)$ 在 $t=0$ 处做 k 阶 Taylor 级数展开,得到 $R_{Tn}(t;k)$,则产生的误差可用 Lagrange 型余项表示为 $\Delta_k(t) = \frac{1}{(k+1)!}$

$$R_n^{(k+1)}(\xi)t^{k+1}, \left(-\frac{T}{2} < \xi < \frac{T}{2}\right)$$

可知,基于 Legendre 多项式展开得到的 $R_n(t)$ 的逼近多项式 $R_{Ln}(t)$ 是 H_n 中在区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上的 n 次最佳平方逼近,即 $R_{Ln}(t)$ 与 $R_n(t)$ 的误差平方和最小,亦即二者在合成孔径时间内的累积误差最小。而 Taylor 级数展开只有在展开点处误差为零,误差将随着与展开点距离的增大而不断变大。从成像机理来看,合成孔径雷达成像实质上是对合成孔径时间内回波相位的相干叠加,近似处理的累积误差越小则意味着该近似带来的误差对最终成像结果的影响越小。因此,从理论上说明基于 Legendre 展开的双基地 SAR 频谱求解方法在最终的频谱精度上要优于基于 Taylor 展开的 MSR。

5 仿真及分析

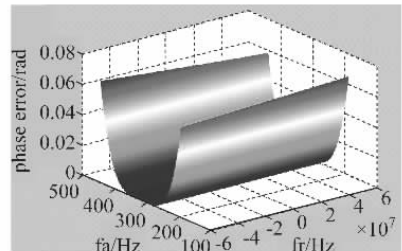
为了进一步验证基于 Legendre 多项式展开的点目标二维频谱推导在性能上优于 MSR 方法,通过仿真进行比较,仿真参数设置如表 1 所示。

表 1 仿真参数

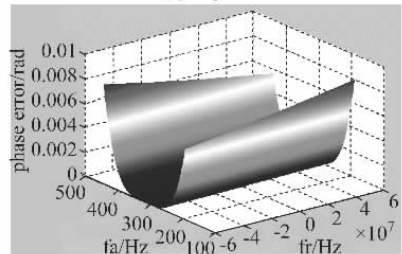
参数名称	参数值	参数名称	参数值
中心频率	10GHz	发射信号带宽	120MHz
发射平台 飞行高度	4km	接收平台 飞行高度	3.5km
发射平台速度	110m/s	接收平台速度	110m/s
零时刻发射 APC 到场景 中心斜距	15.5km	零时刻接收 APC 到场景 中心斜距	12.5km
PRF	1000Hz	距离向 采样频率	60MHz

图 2 和图 3 是基于 3 阶 Taylor 级数展开和基于 3 阶 Legendre 多项式展开,在任取的不同斜视角下场景中中心点处引起的频谱相位误差。从图中可以看出,MSR 方法在小斜视角的情况下,引入的相位误差还在允许范围内,即误差小于 $\pi/8$,但随着斜视角的增大,误差将明显增大并最终超出允许范围,例如如图 3

中,当 $\theta_R = 30^\circ$ 和 $\theta_T = 70^\circ$ 时,相位误差在大部分快时间和慢时间频带上都已经超出了 $\pi/8$ 。而在相同系统结构下,基于 3 阶 Legendre 多项式展开的误差明显小于 MSR 方法,且即使在 $\theta_R = 30^\circ$ 和 $\theta_T = 70^\circ$ 的大斜视角情况下,仍保持在允许范围内。另外,仿真中所使用的斜视角是任意选取的,因此仿真得出的结论具有一般性。

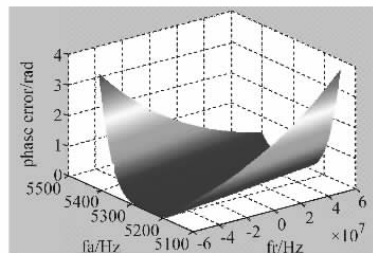


(a) Taylor-based

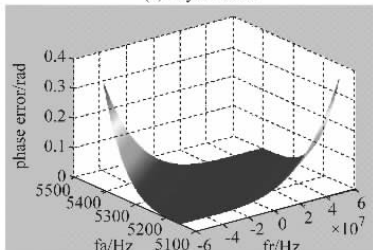


(b) Legendre-based

图 2 频谱相位误差 ($\theta_R = 5^\circ, \theta_T = 10^\circ$)



(a) Taylor-based



(b) Legendre-based

图 3 频谱相位误差 ($\theta_R = 30^\circ, \theta_T = 70^\circ$)

6 结论

基于 Taylor 级数展开的 MSR 方法是目前较好的双基地 SAR 点目标回波二维频谱求解方法。但随着斜视角增大等成像条件的恶化,其近似引入的相位误差将越

来越大,甚至超出允许范围。因此,本文从函数的最佳逼近角度出发,提出了基于 Legendre 正交多项式展开的二维谱求解方法,理论分析和仿真实验结果均证明,在相同展开阶数条件下,该方法性能优于 MSR,且即使在大斜视角情况下频谱相位近似误差仍可保持在允许范围内,从而具有更高的精度和更为广泛的适用性。

附录 级数反演法

级数反演法是一种求解幂级数反函数的方法,若

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (\text{A-1})$$

则其反函数可表示为

$$x = A_1y + A_2y^2 + A_3y^3 + \dots \quad (\text{A-2})$$

将式(A-2)代入(A-1),并令等式两边系数相等,

可得

$$A_1 = a_1^{-1}, A_2 = a_1^{-3}a_2, A_3 = a_1^{-5}(2a_2^2 - a_1a_3), \dots$$

参考文献

- [1] Klare J, Walterscheid I, Brenner A R, et al. Evaluation and Optimisation of Configurations of a Hybrid Bistatic SAR Experiment Between TerraSAR-X and PAMIR[C]// IGARSS' 2006. IEEE, 2006:1208-1211.
- [2] Giroux V, Cantalloube H, Daout F. An Omega-K algorithm for SAR bistatic systems[C]// IGARSS' 2005. IEEE, 2005: 1060-1063.
- [3] Soumekh M, Bistatic synthetic aperture radar inversion with application in dynamic object imaging[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991,39(9):2044-2055.
- [4] Bamler R, Meyer F, Liebhart W. Processing of Bistatic SAR Data From Quasi-Stationary Configurations[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2007,45(11):3350-3358.
- [5] Walterscheid I, Ender J H, Brenner A R, et al. Bistatic SAR Processing and Experiments[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2006,44(10):2710-2717.
- [6] Loffeld O, Nies H, Peters V, et al. Models and useful relations for bistatic SAR processing[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2004,42(10):2031-2038.
- [7] Yew Lam Neo, Wong F, Cumming I G. A two-dimensional spectrum for bistatic SAR processing using series reversion[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2007,4(1):93-96.
- [8] 李燕平, 刑孟道, 进伟, 等. 一种双基 SAR 的 SR-ECS 成像算法[J]. 自然科学进展, 2008,18(3):323-333.
- [9] Hale D. Dip-moveout by Fourier transform. Geophysics [J], 1984,49(14):741-757.
- [10] Xupu Geng, Honghui Yan, Yanfei Wang. A Two-Dimensional Spectrum Model for General Bistatic SAR[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2008,46(8):2216-2223.
- [11] Yew Lam Neo, Wong F H, Cumming I G. A Comparison of Point Target Spectra Derived for Bistatic SAR Processing[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2008,46(9):2481-2492.

作者简介



王放(1981-),女,辽宁沈阳人,国防科学技术大学电子科学与工程学院博士生,研究方向为合成孔径雷达成像,目标识别及效果评估。



黎湘(1967-),男,教授,博士生导师,主要从事精确制导、信息融合、非线性信号处理等领域的研究。