

非 Jaky 粮仓的弹性应力分析和侧壁边界条件

王璐珠, 蒋亦民, 彭政*, 郑鹤鹏

中南大学物理科学与技术学院, 长沙 410083

* 联系人, E-mail: pz177@yahoo.com.cn

2011-01-04 收稿, 2011-03-18 接受

国家自然科学基金(10904175)、国家重点基础研究发展计划(2010CB731504)和水沙科学与水利水电工程国家重点实验室开放研究基金(sklhse-2008-C-01)资助项目

摘要 为了解一些粮仓实验报道中转向比明显大于工程规范中 Jaky 公式估算值的现象, 计算了平面粮仓应力饱和区域的非线性弹性通解. 结果表明, 这个通解的确可以给出实验观测到的大转向比应力, 但同时也偏离 Janssen 假设. 由于边界条件会因塑性而失去完备性, 粮仓转向比将允许在一定范围内取值, 不一定总是满足 Jaky 公式. 这意味着, 弹性理论能够描述与制备历史有关的颗粒物质静力学问题.

关键词

颗粒物质
粮仓
转向比
Jaky 公式

许多工程设计需要了解静态颗粒物质(又称颗粒固体^[1])对墙壁施加的作用力情况, 如粮仓中谷物对侧壁的正压力和切向力、挡土墙受到的压力等. 长期以来工程中对这些力的处理主要依赖经验判断, 针对不同几何情形建立不同的力学模型, 例如 Janssen 的粮仓应力模型^[2,3], 以及用极限平衡法和滑动面估算挡土墙的受力^[4]. 由于非线性和塑性变形, 颗粒固体的力学行为相当复杂, 如何理论解释这些工程经验模型和公式是目前颗粒物理领域的研究前沿之一. 本文将考虑粮仓颗粒固体的水平应力分量 σ_{xx} 与垂直应力分量 σ_{yy} 的比 $J = \sigma_{xx} / \sigma_{yy}$ (又称转向比或 Janssen 比) 的取值问题. 在许多国家(如中国^[5]、德国^[6])的工程规范文件中, 大都要求根据经验公式 $J = 1 - \sin \varphi$ (大多乘以 1.2 的安全系数) 计算转向比, 其中 φ 为粮仓中颗粒物质的内摩擦角. 该公式常被称作 Jaky 公式, 但最早由 Kézdi 提出^[7]. Jaky 公式给出的 J 值总小于 1, 对内摩擦角 $\varphi \sim 30^\circ$ 的典型颗粒材料, $J \sim 0.5$, 并且可以用一个合适的非线性弹性理论, 结合侧壁处法向弹性位移等于零的边界条件加以解释^[8]. 但值得注意的是, 从文献[9]分析的近年来物理领域报道的一些粮仓实验数据看, 其中许多实验的样品处于 J 大于 1 的应力状态, 严重偏离 Jaky 公式估测的典型值 0.5, 如

文献[10,11]. 为进一步在弹性理论的基础上理解这些违反 Jaky 公式的实验, 本文考虑了粮仓应力不随垂直深度变化的、所谓应力饱和(stress saturation)区域的非线性弹性通解问题, 得到了其解析形式. 结果显示弹性理论的确允许 J 大于 1 的应力状态, 并且这些大 J 值粮仓在偏离 Jaky 的同时, 也将明显偏离 Janssen 的唯象模型假设. 因此弹性理论原则上可以解释大 J 值现象, 但偏离 Janssen 假设这个预测是否正确, 尚有待今后实验验证.

根据弹性理论, 几何形状和密度相同但应力状态不同的样品一定有不同的边界条件. 由于接近 Jaky 公式的低 J 值粮仓对应于侧壁处法向弹性位移为零的边界条件^[8], 大 J 值粮仓侧壁处应该是有限法向位移. 在第 2 节中将看到, 对变形过程可以是塑性为主的材料(简称塑性材料), 弹性位移型边界条件一般不能明确地给出, 包括粮仓在内的一些颗粒静力学问题的边界条件并不完备. 对这种情形, 我们建议将“应力不确定”这个复杂问题与边界条件的不完备性联系在一起, 进而自然地用弹性理论理解粮仓转向比可以取不同值的现象. 这些结果将有助于澄清物理与工程两个不同领域在粮仓 J 值问题上的分歧.

1 平面应变粮仓饱和应力的通解

能否抵抗剪切静力, 即能否长时间保持在不为零的恒定剪切应力状态, 是区分材料属于固体还是流体、应该用弹性理论还是 Navier-Stokes 方程描述其宏观力学行为程的最终标准. 根据这个判据, 地面上的静态颗粒物质都能抵抗至少由重力场产生的剪切力, 因此处于固弹性状态, 应该用非线性弹性理论分析其中的应力变化. 另外对静态粮仓, 颗粒之间都稳定地保持在弹性静接触力状态, 也表明了其应力来自弹性这个事实. 本文将以此弹性观点为基础, 在经典弹性理论(参见文献[12])的框架内讨论粮仓的静力学. 如考虑内禀各向同性情形, 并且忽略第三应变不变量对弹性势能的影响, 弹性理论要求应力张量 σ_{ij} 满足下面的力平衡方程和应力-应变关系:

$$\nabla_j \sigma_{ij} = \rho g_i, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = K \Delta \delta_{ij} - 2\mu u_{ij}^*, \tag{2}$$

其中 ρ 为质量密度, g_i 为重力加速度矢量, 符号 $\Delta = -u_{kk}$ 为应变张量的迹取负, $u_{ij}^* = u_{ij} + \frac{\Delta}{3} \delta_{ij}$ 为应变的无迹部分, 即偏应变. 为简单起见, 本文假定样品密度均匀, ρ 为常数. 应力-应变关系(2)中的体弹性模量 K 和剪弹性模量 μ 可根据热力学关系 $K = \Delta^{-1}(\partial w / \partial \Delta)_{u_s}$ 和 $2\mu = u_s^{-1}(\partial w / \partial u_s)_{\Delta}$, 由弹性势能 $w(\Delta, u_s)$ 计算得到(参见文献[12]), 其中 $u_s = \sqrt{u_{ij}^* u_{ij}^*} > 0$ 为偏应变的模, 描述剪切应变强度. 对颗粒物质, 我们经常用到的一个简单势能模型是(详见文献[13])

$$w = B\sqrt{\Delta} \left(\frac{2}{5} \Delta^2 + \xi u_s^2 \right), \tag{3}$$

相应的弹性模量为

$$K = B\sqrt{\Delta} \left(1 + \frac{\xi}{2} \frac{u_s^2}{\Delta^2} \right), \tag{4}$$

$$\mu = B\xi\sqrt{\Delta}, \tag{5}$$

其中的参数取 $\xi=3/5$, $B=6$ GPa. 注意(2)式形式上与胡克定律一样, 但模量 K 和 μ 与应变有关, 意味着这个颗粒弹性模型是非线性的. 非线性弹性理论可能出现力学失稳现象, 其稳定区域和非稳定区域可根据热力学稳定判据, 通过计算势能函数的凸凹性得到. 对由(3)式给出的弹性势能模型, 稳定区域满足条件 $u_s^2 / \Delta^2 < 2/\xi$, 或引入稳定性判据:

$$\beta = 2/\xi - u_s^2 / \Delta^2 > 0. \tag{6}$$

稳定条件(6)是静态颗粒物质内部任何地方都要求满足的不等式. 最后, 应变满足 $2u_{ij} = \nabla_i U_j + \nabla_j U_i - (\nabla_k U_j)(\nabla_k U_i)$, 这里 U_j 为弹性位移矢量. 如忽略高次项, 有兼容方程

$$\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \nabla_k \nabla_m u_{nl} = 0, \tag{7}$$

其中 ε_{ijk} 为三阶反对称单位张量. 注意, 本文应用了重复脚标自动求和的约定.

用上述颗粒弹性方程分析静态应力一般需要解偏微分方程组, 大多数情况只能数值求解. 但对图 1 插图所示的平面粮仓的饱和区域, 应力和应变都与 y, z 坐标无关, 只是 x 坐标的函数. 对这个非线性弹性问题, 可以得到下面的解析形式通解. 对于平面应变情况, u_{ij} 有如下形式:

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} & 0 \\ u_{xy} & u_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其偏应变为

$$u_{ij}^* = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u_{xx} - \frac{1}{3}u_{yy} & u_{xy} & 0 \\ u_{xy} & \frac{2}{3}u_{yy} - \frac{1}{3}u_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}u_{xx} - \frac{1}{3}u_{yy} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

此时, 兼容方程(7)转化为 $u_{yy}'' = 0$, 其中“''”表示对 x 的微分. 注意到 u_{yy} 是关于 x 的对称函数, 故 $u_{yy} = C$, 其中 C 为积分常数. 因此应变的迹和剪应变强度为

$$\Delta = -u_{xx} - C, \tag{10}$$

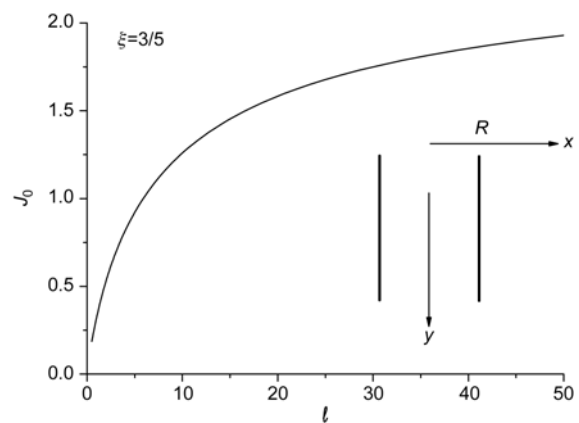


图 1 粮仓中心位置的 Janssen 比值 J_0 随积分常数 l 的变化关系

插图为平面粮仓应力饱和区域示意图以及坐标系的选取, 侧壁位于 $x=\pm R$ 处, y 坐标轴为对称轴, 沿重力方向

$$u_s = \sqrt{\frac{2}{3}\Delta^2 - 2Cu_{xx} + 2u_{xy}^2}. \quad (11)$$

不难看出, 这个平面应变问题只有 u_{xx} 和 u_{xy} 两个未知函数.

在粮仓应力饱和区域, 力平衡方程(1)转化为 $\sigma'_{xx} = 0$, $\sigma'_{xy} = \rho g$ 和 $\sigma'_{xz} = 0$. 注意 σ_{xy} 是关于 x 的反对称函数, 积分后得

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho g R}{k}, \quad (12)$$

$$\sigma_{xy} = \rho g x, \quad (13)$$

$$\sigma_{xz} = 0, \quad (14)$$

这里 $\sigma_{xz} = 0$ 是因为有 $u_{xz} = 0$ 和应力-应变关系(2), R 为侧壁的位置(见图1插图). 积分常数 k 为侧壁处 σ_{xy} 与 σ_{xx} 之比, 表示颗粒与侧壁的静摩擦状态, 因此必须小于这两种材料之间的最大静摩擦系数 k_c :

$$k < k_c. \quad (15)$$

对玻璃珠颗粒与 PVC 或铝板等的接触面, 测量的 k_c 大致为 $0.2^{[14]}$. 将应力((12)和(13)式)和弹性模量表达式((4)和(5)式)代入胡克定律(2), 可得到

$$u_{xx} = C \left(\frac{3}{2\xi} - \frac{3}{8}\beta \right) \frac{1}{t} + \frac{C}{2} - \frac{3}{4}\ell |C| |t|^{1/2}, \quad (16)$$

$$u_{xy} = -\ell \left(\frac{kx}{2R} \right) |C| |t|^{1/2}, \quad (17)$$

其中记号 $t = C/\Delta$, β 见公式(6), 符号

$$\ell = \frac{\rho g R}{k B \xi |C|^{3/2}} \quad (18)$$

是与积分常数有关的量纲 1 参数, 取值范围从 0 到 ∞ , 也可看作积分常数. 由于 $C = u_{yy}$ 是垂直弹性应变, 参数 ℓ 反映垂直弹性应变的强度, 并且值越大, 垂直弹性应变的强度越小. (10)和(11)式以及(16)和(17)式构成了关于 u_{xx} , u_{xy} , t , β 这 4 个未知量的完备方程组, 理论上可将这 4 个未知函数解出. 具体过程是, 将(16)和(17)式代入(10)和(11)式, 得到

$$\frac{kx}{2R} = \sqrt{\frac{\ell |t|^{3/2} - \frac{5}{3} - \frac{1}{\xi} - 3t - t^2}{\ell^2 |t|^3}}, \quad (19)$$

和

$$\beta = \frac{4}{\xi} + \frac{8}{3} + 4t - 2\ell |t|^{3/2}. \quad (20)$$

方程(19)和(20)是以隐函数的方式给出的函数 $t(x)$ 和 $\beta(x)$ 的表达式(由于(19)式没有对 t 求根的表达, 它

们只能隐含地写出). 将它们代入(16)和(17)式, 可得两个未知函数 $u_{xx}(x)$ 和 $u_{xy}(x)$ 的表达式, 即平面应变粮仓饱和区域的颗粒弹性方程解. 注意它含有两个任意常数 k 和 C , 是该问题的通解.

由上面的弹性通解可得 Janssen 比 $J = \sigma_{xx}/\sigma_{yy}$ 为

$$J = \frac{\ell |t|^{3/2}}{\ell |t|^{3/2} - 2(1+2t)}. \quad (21)$$

特别的, 粮仓中心 $x=0$ 处的 J 值为

$$J_0 = \frac{\xi(3t_0^2 + 9t_0 + 5) + 3}{\xi(3t_0^2 - 3t_0 - 1) + 3}, \quad (22)$$

其中 $t_0 = t(x=0)$ 由方程

$$\ell |t_0|^{3/2} = \frac{5}{3} + \frac{1}{\xi} + t_0^2 + 3t_0 \quad (23)$$

给出. 图 1 为 J_0 随积分常数 ℓ 变化的曲线, 当 $\ell > 7$ 时, 有大于 1 的转向比. 不难看出, 弹性理论允许粮仓中心的 Janssen 比在 0.33~2.5 之间取值, 因此不排除存在违反 Jaky 经验公式的粮仓应力状态. 这对许多文献中观察到的大 J 值现象提供了一个合理的解释. 根据 ℓ 的定义(18)式, 有大 ℓ 值意味着垂直弹性应变 $C = u_{yy}$ 比较小, 这时颗粒将尽量避免向下施压, 因此导致较大的 J 值.

粮仓的“ J =常数”是 Janssen 提出的一个著名假设. 严格地讲, 上述颗粒弹性方程给出的 J 值并不是常数, 而是从中心到侧壁单调减小, 见图 2. 对接近 Jaky 经验公式的小 J 值情形, J 值沿水平方向的变化非常微弱, 完全可以认为满足 Janssen 假设. 但对大 J 值粮仓, 侧壁附近的 J 明显小于中心附近的 J . 注意这个偏离 Janssen 假设的现象只是一个理论预测, 由于很难测

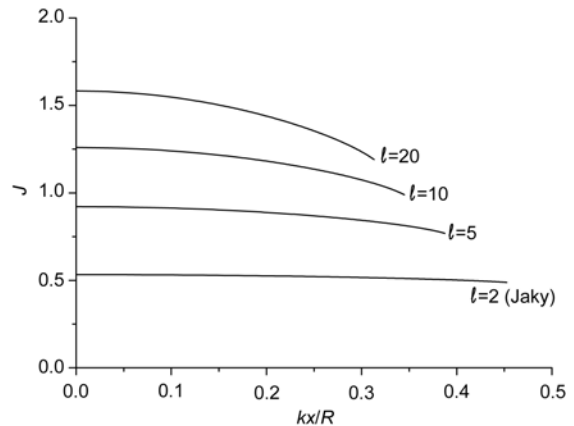


图 2 对不同积分常数 ℓ , Janssen 比值 J 沿水平方向的变化 $\xi=3/5$

量材料内部的应力,目前还不能对它进行直接的实验验证.在粮仓的应力饱和区域,“ $J=常数$ ”是因为垂直应力 σ_{yy} 基本不随水平坐标 x 变化.因为 σ_{xx} 是常数, J 偏离 Janssen 假设意味着 σ_{yy} 随 x 有明显的变化.另外从图1和2可以看出,常数 l 完全确定了粮仓的 J 值大小及其变化行为.如用文献[14]测量的侧壁处的切向与法向应力比值 ≤ 0.2 作估算,文献[10]的 $J \geq 0.95$,文献[11]的 $J \geq 1.5$,大致相当于 $l \approx 7$ 和 $l \approx 20$ 的情形.

2 粮仓侧壁边界条件

从弹性理论的角度讲,如果已知所有边界上的完备边界条件,粮仓的应力状态将被唯一地确定.对上面讨论的应力饱和区域,积分常数 k 和 l (或 C)需要由侧壁处的边界条件确定.如果颗粒物质与容器之间的接触接近最大静摩擦状态,有侧壁处的 σ_{xy} 与 σ_{xx} 之比等于它们之间的静摩擦系数: $k=k_c$.这个边界条件最早由 Janssen 给出,尽管对实际粮仓的颗粒-容器接触是否都会达到最大静摩擦存有异议,它仍然在许多粮仓应力的理论分析中被广泛应用^[2,3,15].一些物理研究者曾用让粮仓底座缓慢下滑的办法制备满足 $k=k_c$ 的粮仓,从直觉看来这似乎有道理,但并不意味着这是颗粒-容器接触达到最大静摩擦状态的确切验证,因为从缓慢下滑的动态到停止,静摩擦状态可能出现不确定的跳变, k 不一定总是停在最大静摩擦值 k_c 上.退一步讲,即使上述实验的粮仓达到了 $k=k_c$ 状态,所考虑的也可能只是一种特殊情况,其他粮仓不一定是如此,因为现实中的粮仓一般不会有这个底座缓慢下滑的制备过程,如何确定其侧壁接触状态仍不得知晓.处理这个问题的一种办法是取 $k=常数 k_0(\leq k_c)$ 为侧壁边界条件,它在饱和区显然正确,但对粮仓顶部应力随深度变化的过渡区域是否仍然合理,尚有待验证.原则上讲,侧壁处的切向应力 σ_{xy} 和法向应力 σ_{xx} 都可以直接测量,用实验能够确切地检验“ $k=k_0$ ”是否普遍有效,并测出常数 k_0 的值.由于本文只考虑饱和区域,可以直接用这个边界条件确定积分常数 k .

从水平弹性位移 U_x 在侧壁处的值 $U_0=U_x(x=R)$,又称弹性方程的 Dirichlet 边界条件,可以确定另一个积分常数 l (或 C).利用同样的颗粒弹性方程,文献[8]曾在“侧壁法向位移等于零”的边界条件下数值计算了圆柱形粮仓的应力分布.这个特别解在饱和

区域大致对应前面给出的通解中的 $l \sim 1.7$, $J \sim 0.4$ 的低 J 值情况.由于它的 Janssen 比接近 Jaky 公式的估算值,可以认为 Jaky 粮仓的 $U_0=0$,非 Jaky 粮仓一定有 $U_0 \neq 0$ 的边界条件.对理想弹性材料的一些情形,我们可以确切地知道边界处的 U_0 值.例如当材料放入刚性容器后,由于受到侧向限制将发生变形 a ,见图3.如果材料是理想固体,变形都是弹性的,从这个放入前后的几何变化马上可以得到边界条件 $U_0=a$.如果是塑性材料,则必须知道 a 中的塑性部分 $a_{plastic}$,才能得到边界条件 $U_0=a-a_{plastic}$.塑性变形 $a_{plastic}$ 一般与材料如何放入容器的过程有关,因此确定塑性材料的 Dirichlet 边界条件 U_0 往往非常困难,原则上需要分析计算整个过程的动力学细节.粮仓的颗粒材料填入过程则更为复杂,其中某些阶段会出现类似液体到固体的转变, U_0 值最终停留在何处,实验往往不能仔细控制,即使用同一填入方式来制备粮仓, U_0 仍会在某一范围取值,导致观察到不同 J 值的粮仓.弹性理论只当边界条件完备时才有唯一解,即唯一的应力分布,如果每次实验的边界条件 U_0 和 k_0 都不一样,其中的应力当然也可以不一样.因为不唯一的应力分布是不能完备地确定边界条件所引起的,实验观察到的粮仓应力不确定现象与弹性理论显然没有冲突.对颗粒物质这类强塑性材料,弹性静力学理论分析原则上给出的只是允许样品存在的力学状态范围,不能明确指出每次实验的测量

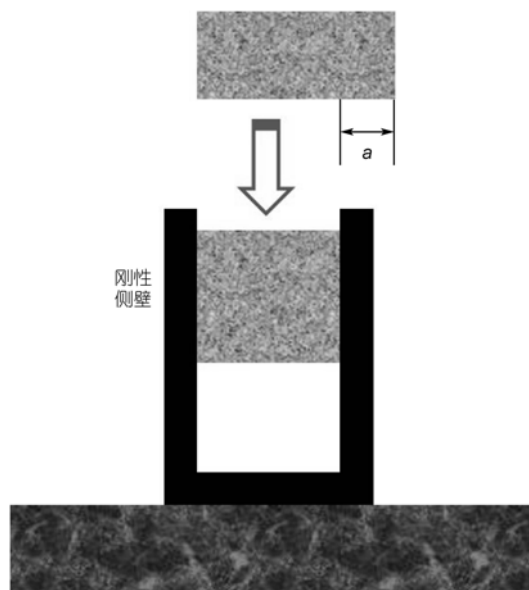


图3 材料进入刚性容器后发生的变形 a

结果. 这时实验需要验证的主要是理论预言的这个范围是否正确, 特别是它的临界位置. 例如对平面粮仓的 J 值, 前面的计算给出它应该在 0.33~2.5 之间, 目前报道的数据的确在此范围内, 没有发现违反的情况^[9].

显然任何弹性静力学问题都需要已知边界条件后才能计算求解. 颗粒弹性方程(1)~(7)也不例外, 一旦边界条件完备, 它们将给出唯一确定的应力分布. 由于上面讨论的原因, 颗粒材料的边界条件一般会受到制备过程的影响, 因此很难通过分析判断来得到, 原则上需要实验测量. 当然 J 值的上下限会对边界条件产生相应的约束. 例如, 当取 k 和 σ_{yy} 为粮仓的边界条件时, 由 $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} / k = \rho g \phi / 4k$ 和 $0.33 \leq J = \sigma_{xx} / \sigma_{yy} \leq 2.5$, 可得在饱和区域的边界上, 它们必须满足 $\rho g \phi k \leq \sigma_{yy} \leq 1.32 \rho g \phi k$.

基于上述讨论, 我们倾向认为工程设计中广泛应用的 Jaky 公式所描述的只是一个特殊情况. Jaky 公式的实验支持主要来自 Oedometer 或 Lambdameter 等单轴压缩型工程仪器的测试数据^[16,17], 按照这些实验样品的制备规则和测量规范, 样品可能总是处于接近低 J 值的力学状态. 一些物理研究领域中考虑的粮仓制备过程和测量方式都明显不同于这些工程实验, 因此出现了违反 Jaky 公式的现象. 注意至少在实验室环境下, 这些偏离 Jaky 公式的静力状态都是稳定的, 如图 4 所示的仓底压力随时间变化的测量结果, 它们完全有可能发生在实际粮仓中. 虽然大多数工程规范都采用 Jaky 公式^[5,6], 工程领域一直存有其预测值偏低的研究报道(如文献[18]), 另外有关实际粮仓的安全事故亦时有报道. 目前对大 J 值粮仓的力学状态尚无充分研究, 与接近 Jaky 公式的低 J 值情况相比较, 它的稳定性、制备方式、抵抗扰动的能力和应力蠕变变化的方向趋势等都有待从理论和实验上深入研究. 这些工作有助于进一步澄清颗粒物质力学中一些基础问题, 亦可能有助于粮仓安全分析水平的提高.

3 结论

在一些实验中静态颗粒物质样品的应力状态与

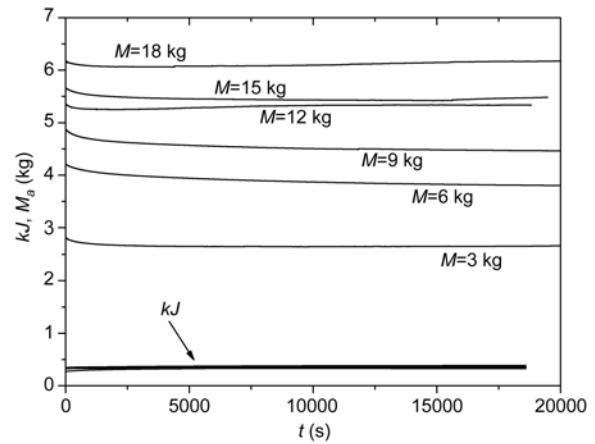


图 4 不同填充质量 M 时, 粮仓仓底有效质量 M_a 和 kJ 随时间的变化

测量样品为密度 $\rho \approx 1500 \text{ kg/m}^3$ 的玻璃珠, 粮仓直径 $\phi = 0.194 \text{ m}$. 相应的 $kJ \sim 0.35$ 是 Janssen 模型 $M_a = M_s(1 - e^{-M/M_s})$ 给出的计算值, 其中 $M_s = \pi \rho \phi^3 / (16 kJ)$ 为饱和质量. 由于 $k < 0.2$ ^[14], 有转向比 $J > 1.7$ (对应的 $\ell > 20$), 属于大 J 值粮仓. 注意到十几分钟后, 有效质量的时间涨落很小(可能由于温湿度变化的缘故), 表明大 J 值粮仓的应力状态能长时间保持稳定

它的制备历史有关, 如粮仓应力转向比 J 的值. 该现象往往影响实验的可重复性, 并且容易被人们误以为是颗粒物质违反弹性理论, 因为后者主要用于描述应力状态确定的系统. 为澄清这个概念上的误区, 并解释近年来颗粒物理领域报道的一些严重违反工程规范中 Jaky 公式的大 J 值粮仓的实验工作, 本文将文献[13]介绍的非线性弹性理论应用于平面粮仓的应力饱和区域, 得到了以下几点结论: (1) 这个非线性弹性问题有解析形式的通解, 其中含两个积分常数; (2) 通解给出的应力转向比值范围为 0.33~2.5, 不违反国内外报道的实验结果, 包括那些严重偏离 Jaky 公式的大 J 值粮仓的实验; (3) 由于塑性的缘故, 一般无法获得完备的粮仓边界条件, 因此不能确定通解中的积分常数, 导致不同实验的 J 值在上述范围内变化; (4) 如果将这个“边界条件欠完备”和“应力不确定”联系起来, 我们仍可以用弹性理论解释那些与历史有关的颗粒物质静力学现象.

参考文献

- 1 Jaeger H M, Nagel S R, Behringer R P. Granular solids, liquids, and gases. Rev Mod Phys, 1996, 68: 1259-1273
- 2 Janssen H A. Getreidedruck in silozellen. Z Ver Deutch Eng, 1895, 39: 1045-1049

- 3 Sperl M. Experiments on corn pressure in silo cells—translation and comment of Janssen’s paper from 1895. *Granular Matter*, 2006, 8: 59–65
- 4 盖尔德·古德胡斯, 著. 朱百里, 译. 土力学. 上海: 同济大学出版社, 1986
- 5 中华人民共和国国家标准. 钢筋混凝土筒仓设计规范(GBJ77-85). 北京: 中国计划出版社, 1985
- 6 德国标准. DIN 1055 T.6: Lasten in Silozellen, und Beiblatt 1 zu DIN 1055 Teil 6. Deutsches Institut für Normung, Mai 1987
- 7 Kézdi A. Erddrucktheorien. Berlin: Springer Verlag, 1962
- 8 Kurt B, Michael P, Dmitry O, et al. Granular elasticity: Stress distributions in silos and under point loads. *Phys Rev E*, 2006, 74: 061311
- 9 李湘群, 蒋亦民, 彭政, 等. Rankine 被动应力状态粮仓的 Janssen 行为. *山东大学学报(理学版)*, 2010, 45: 101–104
- 10 Bertho Y, Frederique G D, Hulin J P. Dynamical Janssen effect on granular packing with moving walls. *Phys Rev Lett*, 2003, 90: 144301
- 11 Liu J, Shi Q, Liang X, et al. Size dependence of effective mass in granular column. *Physica A*, 2009, 388: 379–384
- 12 Landau L D, Lifshitz E M. *Theory of Elasticity*. 3rd ed. New York: Pergamon Press, 1986
- 13 Jiang Y M, Liu M. Granular solid hydrodynamics. *Granular Matter*, 2009, 11: 139–156
- 14 彭政, 王璐珠, 蒋亦民. 颗粒物质与固体界面静摩擦系数的测量与分析. *山东大学学报(理学版)*, 2011, 46: 42–45
- 15 de Gennes P G. Granular matter: A tentative view. *Rev Mod Phys*, 1999, 71: S374–S382
- 16 Schwedes J. Review on testers for measuring flow properties of bulk solids. *Granular Matter*, 2003, 5: 1–43
- 17 Kwade A, Schulze D, Schwedes J. Die direkte messung des horizontallastverhältnisses. *Beton Stahlbetonbau*, 1994, 89: 58–63
- 18 Kwade A, Schulze D, Schwedes J. Dtermination of the stress ratio in uniaxial compression tests. *Powder Handling Process*, 1994, 6: 199–203

Boundary condition and elastic analysis of stress for silos without Jaky property

WANG LuZhu, JIANG YiMin, PENG Zheng & ZHENG HePeng

School of Physics Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China

In some silo experiments, it is observed that Janssen ratio can be remarkably bigger than the value given by the Jaky formula recommended in engineering norm. To understand this, we solved the nonlinear elastic problem for the region of stress saturation of a plane silo, and obtained its general solution analytically. The solution can really give stresses with the observed big Janssen ratio, but deviate from the Janssen behavior at the same time. Because of the plasticity of granular solids, boundary conditions may become incomplete, so the Janssen ratio is allowed to vary in a certain range, and deviates from the Jaky formula. The results support the validity of elastic theory for granular solids, in spite of its history behavior.

granular matter, silo, Janssen ratio, Jaky formula

doi: 10.1360/972010-2217