

# 评“矩阵的半张量积: 一个便捷的新工具”

郭雷

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190

E-mail: lguo@amss.ac.cn

2011-09-20 收稿, 2011-09-27 接受

“矩阵论”(或者说“线性代数”)与“微积分”被认为是自然科学研究中两个最基本的数学工具. 与微积分相比, 矩阵方法的历史远为悠久. 成书于两千年前的《九章算术》就把线性方程组系数排成方阵进行求解, 中文中“方程”之名就是从这里产生的. 而近代矩阵论的形成, 则主要是 19 世纪的一些数学家的工作, 包括: Gauss(高斯)、Cayley(凯莱)、Sylvester(谢尔沃斯特)等. 今天, 几乎在自然科学的每一个领域的研究中, 都可以找到矩阵的影子.

传统矩阵乘法虽然应用广泛, 但也有它的局限性. 从适用范围看, 只有当两个矩阵满足前列后行等维数条件时才能相乘, 而且, 它不满足交换律. 从解决问题的类型看, 它主要用于解决线性或双线性(二次型)的问题. 对于多线性及非线性问题它却几乎无能为力. 然而, 计算机和非线性科学的发展, 却强烈期待着一种新的处理高维数组的方法, 它能方便地将矩阵工具用来解决多线性以及非线性问题.

程代展及其研究小组为了解决非线性系统的控制律设计与数值计算等问题, 开展了对高维数组的矩阵表示及其运算的研究. 通过十几年的努力, 提出的一种新的矩阵乘法——矩阵的半张量积——在一定程度上解决了上述经典矩阵运算存在的问题. 半张量积将普通矩阵乘法推广到任意两个矩阵, 克服了维数限制, 同时保持了普通矩阵乘法的所有重要性质, 这为应用带来了巨大的方便. 更可贵的是, 由于维数的拓展及换位矩阵的引入, 使得矩阵半张量积具有若干可交换性的性质, 称为伪交换性, 这在一定程度上克服了矩阵乘法缺少交换性的弱点. 矩阵半张量积本质上是为多线性运算设计的, 它借助于计算机程序语言中“指针”的原理, 可以自动发现高维数组的层次结构. 所以它为应用矩阵方法分析研究

多线性及非线性问题提供了一个有力的理论工具.

程代展等人<sup>[1]</sup>的这篇综述文章对矩阵半张量积理论及其若干应用作了较为系统的介绍, 包括在非线性的综合与控制、布尔网络的分析与控制、以及数学、物理等一些理论问题研究中的应用. 半张量积在非线性的分析与控制中的应用的一个典型例子是它在电力系统控制研究中的应用, 它给出了电力系统稳定域的计算公式及暂态稳定的分析方法<sup>[2]</sup>. 同时, 半张量积在微分几何、近世代数等的应用, 如张量场缩并、李代数结构分析等, 也显示了它为若干数学问题的研究提供了方便的新工具. 半张量积还有许多其他应用, 该综述都给了一个简要的介绍. 从这里不难看出半张量积广阔的应用前景.

特别值得一提的是, 程代展及其研究小组近几年将半张量积应用于布尔网络的研究, 得到一系列重要新结果. 布尔网络是约半个世纪前由美国科学家 Kauffman<sup>[3]</sup>提出来的, 用以刻画细胞网络及基因调控网络的动态演化过程. 这个过程是逻辑动态系统, 因此难以用经典动力学方法进行分析. 程及其研究小组利用半张量积, 成功地将逻辑系统转化为代数系统, 从而使经典的分析工具可以用于分析布尔(控制)网络这样的逻辑动态过程, 大大方便了布尔网络逻辑结构及控制设计中的一系列问题的研究解决, 初步形成了确定型布尔网络的较完整的控制理论. 这方面的进展在他们这篇综述及相关引文中可以找到, 例如文献[4]. 当然, 任何一种方法都有其局限性, 而半张量积的最大局限是它可能会指数级地扩大矩阵维数, 增加计算复杂性.

他们的这项工作得到国际学术界的肯定和好评, 相关论文<sup>[5]</sup>最近获得国际自动控制联合会(IFAC)主办的著名刊物 *Automatica* 的“理论/方法类最佳论文

奖”(2008~2010),这是完全由华人学者完成的论文首次获得该奖项.

这篇综述对矩阵半张量积从概念、主要性质到各种不同的应用都作了一个较为详尽的介绍,同时提供了详尽的参考文献,是一篇可读性很强的综述文章,有兴趣的读者可以以此作为学习或研究的入门

导引.

正如作者们在综述里提到的,计算机时代呼唤一些新的数学工具,以实现基于计算发现新现象、解决新问题的目的,而半张量积可能成为这样的工具之一.当前来讲,如何将半张量积用于大型复杂网络等实际问题中,是亟需研究的问题之一.

## 参考文献

- 1 程代展,赵寅.矩阵的半张量积:一个便捷的新工具.科学通报,2011,56:2664-2674
- 2 梅生伟,刘锋,薛安成.电力系统暂态分析中的半张量积方法.北京:清华大学出版社,2010
- 3 Kauffman S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. J Theor Biol, 1969, 22: 437-467
- 4 Cheng D, Qi H, Li Z Q. Analysis and Control of Boolean Networks: A Semi-tensor Product Approach. London: Springer, 2011
- 5 Cheng D, Qi H. Controllability and observability of Boolean control networks. Automatica, 2009, 45: 1659-1667