文章编号:1001-506X(2012)02-0353-05

周期控制的 MIMO 系统任意增益/相角裕度调节方法

武 杰,孙秀霞,董文瀚,杨朋松
(空军工程大学工程学院,陕西 西安 710038)

摘 要: 针对一类有限维多输入多输出线性时不变系统,提出了一种调节输出通道增益/相角裕度的方法。采用连续线性二次型调节器理论和周期控制方法设计一个可被计算机直接执行的线性周期控制器。理论证明该控制器可同时在系统所有反馈控制回路的输出通道实现任意大的增益裕度和直到 90°的相角裕度,且系统输出采样间隔性能良好。仿真结果表明了所设计控制器的有效性。

关键词: 周期控制;线性周期控制器;线性二次型调节器;增益裕度;相角裕度
中图分类号: TP 273 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1001-506X.2012.02.26

Tuning method of MIMO system's arbitrary large gain/phase margins based on periodic control

WU Jie, SUN Xiu-xia, DONG Wen-han, YANG Peng-song
(*Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China*)

Abstract: For the finite-dimensional multiple input multiple output (MIMO) linear time-invariant system, a new method to tune gain/phase margins in the output channels is presented. By using the theory of continuous-time linear quadratic regulator (LQR) and the method of periodic control, a linear periodic controller which is easy to implement is designed. It is proved that the controller can simultaneously provide gain margins as large as desired and phase margins of up to 90° in the output channels of all feedback control loops and has a satisfactory inter-sample performance. Simulation results show the effectiveness of the proposed control law.

Keywords: periodic control; linear periodic controller; linear quadratic regulator (LQR); gain margin; phase margin

0 引 言

增益裕度和相角裕度是衡量系统稳定鲁棒性程度的重要指标。目前对于如何调节增益裕度和相角裕度已有较多的研究成果,例如,通过比例积分微分(proportional integral derivative, PID)控制器[1-3]、线性时不变控制器[4]、连续周期控制器[5]等进行调节。然而,这些方法的一个共同特点是仅针对单输入单输出(single-input single-output, SISO)系统,且控制器不能直接被计算机执行。

近年来,随着计算机技术的迅速发展和微型计算机的普及,使用计算机实现控制的成本不断降低,从而推动了计算机在控制系统中的应用,也促使学者设计可直接被计算机执行的控制器。文献[6-7]针对有限维多输入多输出(multiple input multiple output, MIMO)线性时不变系统、采用连续线性二次型调节器(linear quadratic regulator, LQR)理论,设计了一类通用采样保持函数(generalized sampled-data hold function, GSHF)控制器使系统在输出通道实现任意大的增益裕度;文献[8-9]采用一种新的方法,把文献[6-7]的方法拓展到联合增益相角裕度问题中。但上述采用 GSHF 控制器的方法都存在着一种缺陷,即系统的输出采样间隔性能较差[10]。文献[11]基于离散 LQR 理论和周期控制方法设计了一类线性周期控制器达到了同样的目的,并具有良好的系统输出采样间隔性能,但该方法仅可调节系统输入通道的增益相角裕度,甚至不能容忍输出通道存在的微小扰动。

本文针对一类有限维 MIMO 线性时不变系统,提出了一种新的调节输出通道增益裕度和相角裕度的方法,该方法具有良好的输出采样间隔性能,且控制器可被计算机直接执行。首先在标称系统的输出通道加入增益相角裕度测试器[12],使联合增益相角裕度问题转化为不确定系统的稳定性问题;然后采用连续 LQR 理论和周期控制方法设计一个线性周期控制器,使 MIMO 闭环系统所有反馈控制回路

收稿日期: 2011-04-20; **修回日期:** 2011-10-08。
基金项目: 国家自然科学基金(60904038)资助课题
作者简介: 武杰(1985-),男,博士研究生,主要研究方向为先进控制理论与应用、飞行控制。E-mail: wujiekgd@163.com

均可在输出通道获得$(0,+\infty)$的增益裕度和直到 90°的相角裕度。

1 问题描述

考虑如下有限维标称系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}\tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为系统状态；$\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$ 为系统的控制输入；$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^r$ 为系统输出；$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为适维常阵。

控制目标为设计一个线性周期控制器，使 MIMO 系统的所有反馈控制回路在输出通道获得任意大的增益裕度和直到 90°的相角裕度，且具有良好的输出采样间隔性能。

为此，对系统(1)作如下假设：

假设 1 系统(1)的系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 行满秩。

假设 2 系统(1)中的$(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$可观测。

类似文献[8]，系统(1)输出通道的增益/相角裕度调节问题可等价为以下控制问题：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{y}(t)=\gamma\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}\tag{2}$$

式中，不确定参数 $\gamma\in\mathbf{C}$，并属于如下集合：

$$\Gamma(\underline{\rho},\bar{\rho},\bar{\phi}):=\{\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}:\rho\in[\underline{\rho},\bar{\rho}],\phi\in[-\bar{\phi},\bar{\phi}]\}$$

其中，$\underline{\rho}\in(0,1]$，$\bar{\rho}\in[1,+\infty)$，$\bar{\phi}\in[0,\frac{\pi}{2})$。由文献[12]可知：$\gamma=\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}$为系统(1)的增益相角裕度测试器。$[\underline{\rho},\bar{\rho}]$代表了系统(1)增益的调节范围，$[-\bar{\phi},\bar{\phi}]$代表了系统(1)相角的调节范围。当 $\bar{\phi}=0$ 时，该问题为单纯的增益裕度问题；当 $\underline{\rho}=\bar{\rho}=1$ 时，该问题为单纯的相角裕度问题；一般情况则为联合增益相角裕度问题[8-10]。

用$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$表示系统(1)，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\gamma\boldsymbol{C})$表示系统(2)。控制目标可以转化为设计控制律 $\boldsymbol{u}(t)$以稳定系统$\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\gamma\boldsymbol{C}):\gamma\in\Gamma(\underline{\rho},\bar{\rho},\bar{\phi})\}$。

符号标记：记函数 $f=O(T^j)$，若存在常数 $c_a>0,T_a>0$ 使得 $\|f(T)\|\leqslant c_aT^j,T\in(0,T_a)$；$\mathrm{sp}\{\boldsymbol{A}\}$表示矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 的特征值集合；$\boldsymbol{W}^*$ 表示 $\boldsymbol{W}\in\mathbf{C}^{n\times m}$ 的共轭转置；记 $\|\boldsymbol{z}\|:=\|\boldsymbol{z}\|_2=\sqrt{(\boldsymbol{z}^*\boldsymbol{z})},\boldsymbol{z}\in\mathbf{C}^n$；则相应地记 $\|\boldsymbol{A}\|:=\|\boldsymbol{A}\|_2=\max\{\sqrt{\lambda}:\lambda\in\mathrm{sp}\{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\}\}$。

2 控制律设计及稳定性分析

首先通过理论证明给出如下引理：

引理 1 存在着输出反馈控制器 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{y}(t)$，$\bar{\boldsymbol{F}}\in\mathbf{R}^{m\times r}$稳定如下形式的任何系统：

$$\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\gamma\boldsymbol{C}):\gamma\in\Gamma(\underline{\rho},\bar{\rho},\bar{\phi})\}$$

证明 将 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{y}(t)$代入系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\gamma\boldsymbol{C})$，得到 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t)$。定义 $\boldsymbol{F}:=\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}$，由假设 1 可知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 行满秩，则矩阵 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 可逆，所以可得

$$\bar{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{F}\tag{3}$$

要证明引理 1，即证明

$$\mathrm{sp}\{\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C}\}\subset\mathbf{C}^-\Leftrightarrow\mathrm{sp}\{\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}\}\subset\mathbf{C}^-\tag{4}$$

下面分两部分进行证明。

(1) 构造辅助系统，采用连续 LQR 理论选择 $\boldsymbol{F}$。

由文献[13]可知，一个 LQR 最优控制器可保证 MIMO 线性时不变系统的每个反馈控制回路均具有$(0.5,+\infty)$的增益裕度和直到 60°的相角裕度；为了使系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$可实现任意大的增益裕度和直到 90°的相角裕度，本文采用类似于文献[8-10]的方法，按比例调整系统(1)的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$，得到辅助系统，从而修改标准的 LQR 问题。定义

$$\begin{cases}\alpha:=2\cos(\bar{\phi})\\ \hat{\boldsymbol{C}}:=\alpha\underline{\rho}\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{r\times n}\end{cases}\tag{5}$$

构造辅助系统为

$$\dot{\boldsymbol{w}}(t)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}(t)+\hat{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}(t),\ \boldsymbol{w}(0)=\boldsymbol{w}_0\in\mathbf{R}^n\tag{6}$$

由文献[13]可知，针对式(6)表示的系统，对任意的初始值 $\boldsymbol{w}_0$，可找到如下形式的最优控制：

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}(t)\tag{7}$$

使得性能指标 $\int_0^\infty[\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{w}(t)+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}(t)]\mathrm{d}t$ 最小。其中，$\boldsymbol{Q}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{r\times r}$为正定对称矩阵。且当$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\hat{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}})$可控时，下面的连续代数 Riccati 方程具有唯一的正定对称解 $\boldsymbol{P}$：

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\hat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0},\tag{8}$$

相应的辅助系统最优增益为

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\tag{9}$$

(2) 证明由式(9)所得到的 $\boldsymbol{F}$ 满足式(4)。

由假设 2 可知$(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$可观测，则$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\hat{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}})$可控，所以式(8)存在唯一的正定对称解 $\boldsymbol{P}$。设

$$\hat{\rho}\in[\frac{1}{\alpha},\frac{\bar{\rho}}{\alpha\underline{\rho}}],\ \phi\in[-\bar{\phi},\bar{\phi}]\tag{10}$$

定义 $\boldsymbol{A}_n:=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{C}_n:=\hat{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{F}_n:=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$。

考虑 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}_n+\hat{\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\boldsymbol{C}_n\boldsymbol{F}_n)\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$。固定 $\boldsymbol{x}_0$ 且考虑候选 Lyapunov 函数 $\boldsymbol{V}:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$：

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)):=\boldsymbol{x}(t)^*\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)\tag{11}$$

由 $\boldsymbol{P}$ 为正定对称矩阵可知 $\boldsymbol{V}$ 为非负实数，因此

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)):=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}V(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}}(t)\tag{12}$$

为实数。展开 $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))$并使用式(8)和式(9)简化，得到

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))=-\boldsymbol{x}(t)^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+(1-2\hat{\rho}\cos\phi)\boldsymbol{x}(t)^*(\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\hat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}(t)\tag{13}$$

由式(5)和式(10)及 $\underline{\rho},\bar{\rho},\bar{\phi}$ 的边界，可得

$$1-2\hat{\rho}\cos\phi\leqslant0\tag{14}$$

再根据矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 为正定，可得式(13)右侧第二项为非正数，从而有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant -\boldsymbol{x}(t)^{*}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) \tag{15}$$

由于 $\boldsymbol{Q}$ 为正定对称矩阵,因此,对任意初始值 $\boldsymbol{x}_0$,当 $t\to\infty$ 时,$V(\boldsymbol{x}(t))\to 0$;由于 $\boldsymbol{P}$ 是正定的,所以当 $t\to\infty$ 时,亦有 $\boldsymbol{x}(t)\to\boldsymbol{0}$,得到

$$\mathrm{sp}\{\boldsymbol{A}_n+\hat{\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\boldsymbol{C}_n\boldsymbol{F}_n\}\subset\mathbf{C}^{-}\Leftrightarrow\mathrm{sp}\{\boldsymbol{A}+\hat{\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{C}}\}\subset\mathbf{C}^{-}\Leftrightarrow$$
$$\mathrm{sp}\{\boldsymbol{A}+\alpha\underline{\rho}\hat{\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}\}\subset\mathbf{C}^{-}$$

由于 $\alpha\underline{\rho}\hat{\rho}\in[\underline{\rho},\bar{\rho}]$,则当 $\rho\in[\underline{\rho},\bar{\rho}]$,$\phi\in[-\bar{\phi},\bar{\phi}]$ 时,得证式(4)成立,从而得证引理 1。　　证毕

本文采用周期控制的设计方法[10]将输出反馈控制信号 $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{y}(t)(\bar{\boldsymbol{F}}\in\mathbf{R}^{m\times r})$ 近似为周期为 $T:=ph>0$ 的控制律,即

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{cases}\boldsymbol{0},\ t\in[kT,(k+\dfrac{n}{p})T)\\ \dfrac{p}{p-n}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{y}[kT],\ t\in[(k+\dfrac{n}{p})T,(k+1)T)\end{cases} \tag{16}$$

式中,$k\in\mathbf{Z}^{+}$;$p>n\geqslant 0$ 为正整数;h 为一个控制周期 T 内的采样时间。

注 1　控制律(16)可用如下形式的线性周期控制器来实现:

$$\begin{cases}\boldsymbol{z}[k+1]=\boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{z}[k]+\boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{y}(kh),\ \boldsymbol{z}[0]=\boldsymbol{z}_0\in\mathbf{R}^{m}\\ \boldsymbol{u}(kh+\tau)=\boldsymbol{J}(k)\boldsymbol{z}[k],\ \tau\in[0,h);\ k\in\mathbf{Z}^{+}\end{cases} \tag{17}$$

当设置控制器(17)的参数为

$$(\boldsymbol{G},\boldsymbol{H},\boldsymbol{J})(k):=\begin{cases}(\boldsymbol{0},\dfrac{p}{p-n}\bar{\boldsymbol{F}},\boldsymbol{0}),\ k=0\\ (\boldsymbol{I},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}),\ k=1,\cdots,n-1\\ (\boldsymbol{I},\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}),\ k=n,\cdots,p-1\end{cases} \tag{18}$$

并且设置

$$(\boldsymbol{G}(k+p),\boldsymbol{H}(k+p),\boldsymbol{J}(k+p))=(\boldsymbol{G}(k),\boldsymbol{H}(k),\boldsymbol{J}(k)) \tag{19}$$

时,易验证控制器(17)等价于控制律(16)。而控制器(17)可以通过一个采样器、一个零阶保持器和一个周期为 p 的 m 阶时变离散系统来执行,如图 1 所示。

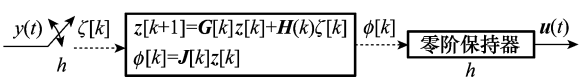


图 1　用采样器和零阶保持器执行控制器(17)

定理 1　存在着常量 $T_0>0$,使得对任意 $T\in(0,T_0)$,控制律(16)稳定如下形式的任何系统:

$$\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\gamma\boldsymbol{C}):\gamma\in\Gamma(\underline{\rho},\bar{\rho},\bar{\phi})\}$$

证明　定义

$$\boldsymbol{A}_d:=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T},\boldsymbol{C}_d:=\frac{p}{p-n}\int_0^{\frac{p-n}{p}T}\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\mathrm{d}\tau \tag{20}$$

将式(16)代入系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\gamma\boldsymbol{C})$,得到

$$\boldsymbol{x}[(k+1)T]=(\boldsymbol{A}_d+\gamma\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}_d)\boldsymbol{x}[kT],\ k\in\mathbf{Z}^{+} \tag{21}$$

则要证明定理 1,即要证明存在着控制律(16)对每个 $\gamma\in\Gamma(\underline{\rho},\bar{\rho},\bar{\phi})$,都有

$$\mathrm{sp}\{\boldsymbol{A}_d+\gamma\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}_d\}\subset\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\} \tag{22}$$

由引理 1 可得式(9)所选择的 $\boldsymbol{F}$ 使 $\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}$ 稳定,定义 $\boldsymbol{A}_\gamma:=\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}_\gamma\in\mathbf{C}^{n\times n}$,且存在着唯一的实正定对称矩阵 $\boldsymbol{P}_\gamma$,使得

$$\boldsymbol{A}_\gamma^{*}\boldsymbol{P}_\gamma+\boldsymbol{P}_\gamma\boldsymbol{A}_\gamma+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{23}$$

考虑辅助系统

$$\boldsymbol{x}[k+1]=(\boldsymbol{A}_d+\gamma\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}_d)\boldsymbol{x}[k],\ \boldsymbol{x}[0]=\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^{n} \tag{24}$$

由麦克劳林公式和 γ 的有界性,可将式(24)简化为

$$\boldsymbol{x}[k+1]=[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_\gamma T+O(T^2)]\boldsymbol{x}[k] \tag{25}$$

固定 $\boldsymbol{x}_0$ 且考虑候选 Lyapunov 函数 $\boldsymbol{V}:\mathbf{C}^{n}\to\mathbf{C}$:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}):=\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{P}_\gamma\boldsymbol{x} \tag{26}$$

由 $\boldsymbol{P}_\gamma$ 正定对称可知 V 为非负实数,因此

$$\Delta V(\boldsymbol{x}[k]):=V(\boldsymbol{x}[k+1])-V(\boldsymbol{x}[k]) \tag{27}$$

为实数。依次代入式(25)和式(23)可得

$$\Delta V(\boldsymbol{x}[k])=T\boldsymbol{x}[k]^{*}[\boldsymbol{A}_\gamma^{*}\boldsymbol{P}_\gamma+\boldsymbol{P}_\gamma\boldsymbol{A}_\gamma+O(T)]\boldsymbol{x}[k]=$$
$$-T\boldsymbol{x}[k]^{*}\boldsymbol{x}[k]+O(T^2)\boldsymbol{x}[k]^{*}\boldsymbol{x}[k] \tag{28}$$

所以存在着 $T_0>0$,使得

$$\Delta V(\boldsymbol{x}[k])\leqslant 0,\ T\in(0,T_0) \tag{29}$$

因此,对每一个初始值 $\boldsymbol{x}_0$,当 $t\to\infty$ 时,$V(\boldsymbol{x}(t))\to 0$;由于 $\boldsymbol{P}_\gamma$ 正定,所以当 $t\to\infty$ 时,亦有 $\boldsymbol{x}(t)\to\boldsymbol{0}$,从而得证式(22),即得证定理 1。　　证毕

3　性能分析

记引理 1 所得的控制信号为 $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$、相应的状态和输出分别记为 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{y}}(t)$。

定理 2　对于每一个 $\varepsilon>0$ 和 $p>n$,存在着一个 $T_{\max}>0$,使得对于每个 $\gamma\in\Gamma$ 和 $T\in(0,T_{\max})$,都有 $\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|\leqslant\varepsilon\|\boldsymbol{x}_0\|$。

证明　定义 $\boldsymbol{\xi}:=\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}$,分两部分进行证明。

(1) 在采样时刻,即 $t=0,T,2T,\cdots$ 时,有

$$\boldsymbol{\xi}[(k+1)T]=\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})T}\boldsymbol{\xi}[kT]+$$
$$[(\boldsymbol{A}_d+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C}_d)-\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})T}]\boldsymbol{x}[kT]=$$
$$\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})T}\boldsymbol{\xi}[kT]+O(T^2)\boldsymbol{x}[kT] \tag{30}$$

由式(30)可得

$$\boldsymbol{\xi}[kT]=\sum_{i=0}^{k-1}(\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})T})^{k-1-i}\boldsymbol{x}[iT]O(T^2) \tag{31}$$

即存在着常数 $\alpha_1>0$ 和 T_1,使得

$$\|\boldsymbol{\xi}[kT]\|\leqslant\alpha_1T^2\sum_{i=0}^{k-1}\|(\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})T})^{k-1-i}\|\cdot\|\boldsymbol{x}[iT]\|,$$
$$\gamma\in\Gamma;T\in(0,T_1) \tag{32}$$

由定理 1 可得,存在着 $\alpha_2>0$,$\lambda_1<0$ 和 $T_2\in(0,T_1)$,使得

$$\|\boldsymbol{A}_d+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C}_d\|\leqslant\alpha_2(\mathrm{e}^{\lambda_1T}),\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_2) \tag{33}$$

从而有

$$\|\boldsymbol{x}[kT]\| \leqslant \|(\boldsymbol{A}_d+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C}_d)^k\| \cdot \|\boldsymbol{x}_0\| \leqslant \alpha_2(\mathrm{e}^{\lambda_1 T})k\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_2) \tag{34}$$

将式(34)代入式(32),得到

$$\|\boldsymbol{\xi}[kT]\| \leqslant \alpha_1\alpha_2 T^2\sum_{i=0}^{k-1}\|(\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})T})^{k-1-i}\| \cdot (\mathrm{e}^{\lambda_1 T})^i\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_2) \tag{35}$$

由引理 1 可得,存在着 $\alpha_3>0,\lambda_2<0$,使得

$$\|(\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})T})^{k-1-i}\| \leqslant \alpha_3(\mathrm{e}^{\lambda_2 T})^{k-1-i},\ \gamma\in\Gamma \tag{36}$$

则有

$$\|\boldsymbol{\xi}[kT]\| \leqslant \alpha_1\alpha_2\alpha_3 T^2\mathrm{e}^{\lambda_2 T(K-1)}\sum_{i=0}^{k-1}(\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)T})^i\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_2) \tag{37}$$

假设 $\lambda_2\in(\lambda_1,0)$,则有

$$\|\boldsymbol{\xi}[kT]\| \leqslant \alpha_1\alpha_2\alpha_3\mathrm{e}^{\lambda_2 T(k-1)}\frac{T^2}{1-\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;\ T\in(0,T_2) \tag{38}$$

因为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{T^2}{1-\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}=0 \tag{39}$$

从而,存在着常数 $\alpha_4>0$ 和 $T_3\in(0,T_2)$,使得

$$\|\boldsymbol{\xi}[kT]\| \leqslant \alpha_4 T(\mathrm{e}^{\lambda_2 T})^k\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_3) \tag{40}$$

(2) 在采样间隔,即 $t=(0,T),(T,2T),\cdots$ 时,对于 $T\in(0,T_3)$ 和 $\tau\in[0,T)$,有

$$\boldsymbol{\xi}[kT+\tau]=\boldsymbol{\xi}[kT]+\int_{kT}^{kT+\tau}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\mathrm{d}t \tag{41}$$

则有

$$\|\boldsymbol{\xi}[kT+\tau]\| \leqslant \|\boldsymbol{\xi}[kT]\|+\int_{kT}^{kT+\tau}\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)\|\mathrm{d}t \leqslant \|\boldsymbol{\xi}[kT]\|+\int_{kT}^{kT+T}[\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|+\|\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)\|]\mathrm{d}t \tag{42}$$

由于

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})t}\boldsymbol{x}_0 \tag{43}$$

则有

$$\|\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)\| \leqslant \|\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C}\| \cdot \|\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C})t}\| \cdot \|\boldsymbol{x}_0\| \leqslant \alpha_3\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\|\boldsymbol{A}+\gamma\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C}\| \cdot \|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma \tag{44}$$

再由 γ 的有界性可得,存在着常数 $\alpha_5>0$ 和 $T_4\in(0,T_3)$,使得

$$\int_{kT}^{kT+T}\|\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)\|\mathrm{d}t \leqslant \alpha_5 T(\mathrm{e}^{\lambda_2 T})^k\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_4) \tag{45}$$

由式(16)可得

$$\|\boldsymbol{u}(kT+\tau)\| \leqslant \frac{p}{p-n}\|\bar{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{C}\| \cdot \|\boldsymbol{x}[kT]\| \tag{46}$$

代入式(34)可得,存在着常数 $\alpha_6>0$ 和 $T_5\in(0,T_4)$,使得

$$\|\boldsymbol{u}(kT+\tau)\| \leqslant \alpha_6(\mathrm{e}^{\lambda_1 T})^k\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_5) \tag{47}$$

由于

$$\boldsymbol{x}(kT+\tau)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{x}(kT)+\int_{kT}^{kT+\tau}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(kT+\tau-v)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(v)\mathrm{d}v \tag{48}$$

则存在着常数 $\alpha_7>0$ 和 $T_6\in(0,T_5)$,使得

$$\|\boldsymbol{x}(kT+\tau)\| \leqslant \alpha_7(\mathrm{e}^{\lambda_1 T})^k\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_6) \tag{49}$$

联合式(2)、式(47)和式(49)可得,存在着 $\alpha_8>0$ 使得

$$\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\| \leqslant \alpha_8(\mathrm{e}^{\lambda_1 T})^k\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_6) \tag{50}$$

则有

$$\int_{kT}^{kT+T}\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|\mathrm{d}t \leqslant \alpha_8 T(\mathrm{e}^{\lambda_1 T})^k\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_6) \tag{51}$$

将式(40)、式(45)和式(51)代入式(42),再联合 $\lambda_2\in(\lambda_1,0)$ 可得,存在着常数 $\alpha_9>0$,使得

$$\|\boldsymbol{\xi}[kT+\tau]\| \leqslant \alpha_9 T(\mathrm{e}^{\lambda_2 T})k\|\boldsymbol{x}_0\|,\ \gamma\in\Gamma;T\in(0,T_6);\tau\in[0,T) \tag{52}$$

最后,联合式(40)、式(52)可得证结论。 证毕

由定理 2 易得如下推论:

推论 1 对于每一个 $\varepsilon>0$ 和 $p>n$,存在 $T_{\max}>0$,使得对于每个 $\gamma\in\Gamma$ 和 $T\in(0,T_{\max})$,都有 $\|\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{y}}\|\leqslant\varepsilon\|\boldsymbol{x}_0\|$ 成立。

4 数值仿真与分析

假设标称对象为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})=\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -29\\ 0 & -\frac{7}{5}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\right)$$

使用本文的设计方法,设计一个线性周期控制器,同时使 MIMO 系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$的所有反馈控制回路在输出通道均具有[0.75,6]的增益调节范围和[−70°,70°]的相角调节范围。即设计控制器以稳定系统$\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\gamma\boldsymbol{C}):\gamma\in\Gamma(0.75,6,70°)\}$。

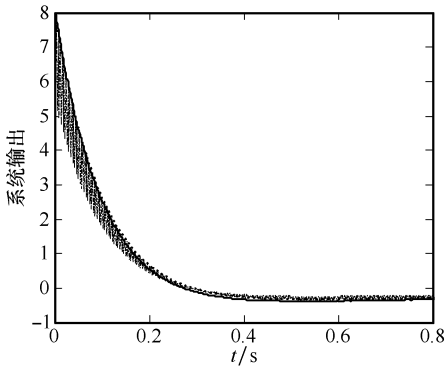
由前述可知 $n=2$,设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I},R=1$。则由式(9)可得 $\boldsymbol{F}=[-0.071\ 7\ \ -2.493\ 7]^{\mathrm{T}}$,再由式(3)可得 $\bar{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{F}=[38.688\ 2\ \ \ 1.781\ 2]^{\mathrm{T}}$。取采样时间为 $h=0.001$ s,$p=25$,此时得到线性周期控制器为

$$(\boldsymbol{G},\boldsymbol{H},\boldsymbol{J})(k)=\begin{cases}(\boldsymbol{0},[42.052\ 4\ \ 1.936\ 1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{0}),\ k=0\\ (\boldsymbol{I},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}),\ k=1\\ (\boldsymbol{I},\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}),\ k=2,\cdots,24\end{cases}$$

该控制器可使系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$的所有反馈控制回路在输出通道均具有[0.75,6]的增益调节范围和[−70°,70°]的相

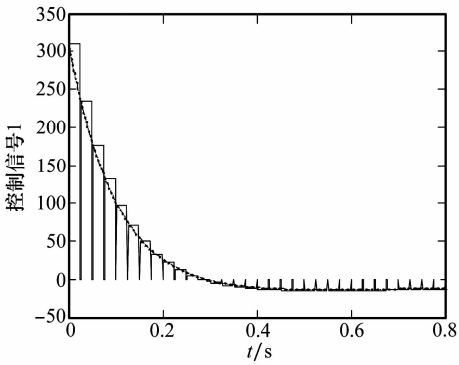
角调节范围。

选取 $\rho=4$,$\phi=0°$,初始值 $\boldsymbol{x}_0=[1\quad 1]^{\mathrm{T}}$,利用本文设计的线性周期控制律与引理 1 的输出反馈控制律及文献[8]采用的 GSHF 控制器作对比。图 2 为 3 种算法的系统输出对比;图 3 为 3 种算法的控制信号对比。可以看出,本文方法所得到的系统输出具有良好的输出采样间隔性能,且更接近于完美的输出反馈控制器的系统输出。

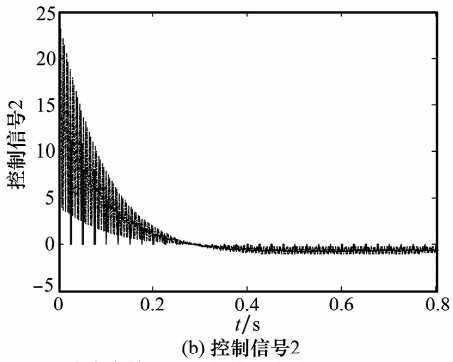


——:本文方法; -·-:文献[8]方法; ------:引理1方法。

图 2　系统输出



(a) 控制信号1



(b) 控制信号2

——:本文方法; -·-:文献[8]方法; ------:引理1方法。

图 3　控制信号

5　结束语

本文针对一类有限维 MIMO 线性时不变系统,提出了一种调节输出通道增益/相角裕度的方法。采用连续 LQR 理论和周期控制方法设计了一个可被计算机直接执行的线性周期控制器。该控制器可同时使 MIMO 系统的所有反馈控制回路在输出通道获得任意大的增益裕度和直到 90° 的相角裕度,具有良好的输出采样间隔性能。

参考文献:

[1] Kaya I. Tuning PI controllers for stable processes with specifications on gain and phase margins[J]. *ISA Transactions*,2004,43(2):297-304.

[2] Yaniv O, Nagurka M. Design of PID controllers satisfying gain margin and sensitivity constraints on a set of plants[J]. *Automatica*,2004,40(1):111-116.

[3] Wang Q G, Fung H W, Zhang Y. PID tuning with exact gain and phase margins[J]. *ISA Transactions*,1999,38(4):243-249.

[4] Khargonekar P P, Tannenbaum A. Non-euclidian metrics and the robust stabilization of systems with parameter uncertainty[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*,1985,30(10):1005-1013.

[5] Lee S, Meerkov S M, Runolfsson T. Vibrational feedback control: zeros placement capabilities[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*,1987,32(7):604-611.

[6] Yang C, Kabamba P T. Multi-channel output gain margin improvement using generalized sampled-data hold functions[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*,1994,39(3):657-661.

[7] Yan W Y, Anderson B D O, Bitmead R R. On the gain margin improvement using dynamic compensation based on generalized sampled-data hold functions[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*,1994,39(11):2347-2354.

[8] Roosi M, Miller D E. Gain/phase margin improvement using static generalized sampled-data hold functions[J]. *Systems and Control Letters*,1999,37(3):163-172.

[9] Roosi M, Miller D E. Gain/phase margin improvement using static generalized sampled-data hold functions[C]// *Proc. of the 36th Conference on Decision & Control*,1997:2109-2114.

[10] Feuer A, Goodwin G C. Generalized sample holdfunctions frequency domain analysis of robustness, sensitivity, and intersample difficulties[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*,1994,39(5):1042-1047.

[11] Roosi M, Miller D E. Gain/phase margin improvement using low order linear periodic controllers[C]// *Proc. of the Conference on Information Sciences and Systems*,1998:292-297.

[12] Chang C H, Han K W. Gain margins and phase margins for control systems with adjustable parameters[J]. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*,1991,13(3):404-408.

[13] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京:清华大学出版社,2002. (Zheng D Z. *Linear system theory*[M]. Beijing: Tsinghua University Press,2002.)