

快速计算分层粗糙面散射的 FBM/SAA 算法

姬伟杰¹, 童创明^{1,2}, 闫沛文¹

(1. 空军工程大学导弹学院, 陕西 三原 713800; 2. 东南大学毫米波国家重点实验室, 江苏 南京 210096)

摘要: 为快速获取分层粗糙面的电磁散射特性, 提出一种结合前后向迭代算法(forward-backward method, FBM)与谱积分加速法(spectral accelerate algorithm, SAA)的快速算法(FBM/SAA), 该算法的计算量和内存均与粗糙面离散剖分产生的未知量同量级($O(N)$)。建立了分层粗糙面上关于未知电流分布的电场积分方程并采用矩量法(method of moment, MoM)将其离散为矩阵方程; 在用 FBM 对矩阵方程进行迭代求解过程中, 采用 SAA 技术加速计算矩阵和矢量乘积以快速求解; 将 FBM/SAA 应用于三层媒质分层粗糙面的双站散射系数的计算, 计算结果与传统 MoM 和 FBM 相一致, 证明了算法的有效性; 分析了粗糙面参数不同情况下算法的收敛性, 比较了传统 MoM 和 FBM/SAA 所耗费的 CPU 时间。结果表明, 在计算较长分层粗糙面的散射时, FBM/SAA 具有明显优势。

关键词: 分层粗糙面; 前后向迭代法; 谱积分加速法

中图分类号: TN 011 **文献标志码:** A

Forward-backward method with spectral acceleration algorithm for fast calculation of EM scattering on layered rough surfaces

JI Wei-jie¹, TONG Chuang-ming^{1,2}, YAN Pei-wen¹

(1. Missile Inst. of Air Force Engineering Univ., Sanyuan 713800, China;

2. State Key Laboratory of Millimeter Waves, Southeast Univ., Nanjing 210096, China)

Abstract: To investigate the scattering of layered rough surfaces, a fast calculation of electromagnetic scattering from layered surface based on the forward backward method (FBM) with spectral acceleration is presented. First, the electric field integral equations of the induced current on the layered rough surface are derived. Secondly, a hybrid approach to the FBM with spectral acceleration algorithm (SAA) is developed. As an example, a layered rough surface with two Gauss rough surfaces is studied. The result is compared with the MoM and FBM, which partly validates the formulation. The accuracy, efficiency and convergence of the method are then studied for rough surfaces with various parameters. As well, the CPU time of FBM/SAA is less than that of FBM.

Keywords: layered rough surface; forward-backward method; spectral acceleration algorithm

0 引言

粗糙面电磁散射在雷达遥感和通讯领域中均有十分重要的应用。以往粗糙面的计算大多基于一定的近似条件, 如大尺度 Kirchhoff^[1] 近似, 小尺度微扰法^[2] 和一般 Rayleigh 方法^[3] 等, 这些方法只能得到近似计算结果, 并且对粗糙面的参数都有一定的限制。计算机技术的发展促进了数值计算方法的研究, 如矩量法(method of moment, MoM)、有限差分法(finite difference time domain, FDTD)和有限元法(finite element method, FEM)等^[4-9], 这些方法精度高且对粗糙面参量一般不做特定的限定, 但数值方法

离散剖分粗糙面产生的未知量计算量为 $O(N^3)$ (N 为未知量个数), 因此, 一般数值计算方法求解粗糙面电磁散射十分繁琐与困难, 这在一定程度上限制了数值法的应用。

近年来, 粗糙面电磁散射研究集中于计算一维与二维单层粗糙面^[7]。然而, 在实际自然界中, 分层粗糙面更为常见, 如漂有浮冰的海面、被雪或树叶覆盖的地面等, 因此研究分层粗糙面的电磁散射特性显得尤为重要。但是, 用数值法计算分层粗糙面的计算量非常巨大, 因此必须应用快速算法。文献[10]中提出以 MoM 为基础的一种新的求解粗糙面电磁散射数值方法——前后向迭代法(forward-backward method, FBM), 该算法将粗糙面每个离散单元

的感应电流对散射场的贡献分为前向和后向两部分,由入射电磁波和接收场单元前面的源单元的感应电流共同产生前向贡献,由接收场单元后面的源单元的感应电流产生后向贡献。用 FBM^[11] 求解粗糙面电磁散射这类问题具有收敛速度快、计算精度高的优点,同时计算量为 $O(N^2)$ 。在文献[12]中,又将 Green 函数谱积分加速法(spectral acceleration algorithm, SAA)^[13] 应用于一维粗糙面的电磁散射计算,使得计算量和内存进一步减少为 $O(N)$ 。

本文将 SAA 与 FBM 相结合,即结合谱积分加速法的前后向迭代法(FBM/SAA),应用于三层媒质粗糙面的双站电磁散射系数的计算。通过与传统 MoM 和 FBM 的结果相比较,验证了算法的有效性。讨论了不同均方根(root-mean-square, RMS)高度时算法的收敛性,比较了不同长度粗糙面时 MoM 和 FBM/SAA 的计算时间。结果表明,在保证计算精度的前提下,FBM/SAA 的计算效率明显优于 MoM 和 FBM,分层粗糙面较长时具有明显优势。

1 基本理论

1.1 电磁场积分方程

图 1 为分层粗糙面电磁散射示意图。

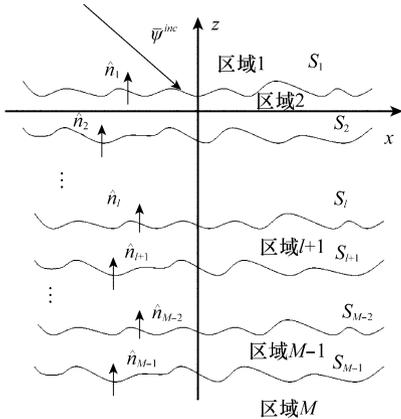


图 1 分层粗糙面电磁散射示意图

考虑图 1 所示的分层粗糙面,计算区域 1 中的散射场 $\Psi^s(\mathbf{r})$ 。当入射波分别为 TE 波和 TM 波时, Ψ 分别代表电场和磁场。在任何区域 L ,总场为 Ψ_L ,散射场为 Ψ_L^s 。满足下列边界积分方程

$$\begin{aligned} & \frac{\Psi_L(\mathbf{r})}{2} - \int_{S_1} ds' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \nabla G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ & \int_{S_1} ds' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \nabla \Psi_L(\mathbf{r}) = \Psi^{inc}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S_1 \quad (1) \\ & \frac{\Psi_L(\mathbf{r}')}{2} + \int_{S_1} ds' \Psi_L(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \nabla G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \\ & \int_{S_1} ds' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \nabla \Psi_L(\mathbf{r}') - \\ & \int_{S_{l-1}} ds' \Psi_L(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}_{l-1} \cdot \nabla G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ & \int_{S_{l-1}} ds' G_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}_{l-1} \cdot \nabla \Psi_L(\mathbf{r}') = 0, \\ & \mathbf{r} \in S_{l-1} \text{ 或 } \mathbf{r} \in S_l \quad (2) \\ & \frac{\Psi_M(\mathbf{r})}{2} + \int_{S_{M-1}} ds' \Psi_M(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}_{M-1} \cdot \nabla G_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \end{aligned}$$

$$\int_{S_{M-1}} ds' G_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}_{l-1} \cdot \nabla \Psi_M = 0 \quad (3)$$

边界条件为

$$\Psi_l(\mathbf{r}) = \Psi_{l+1}(\mathbf{r}) \quad (4a)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_l \cdot \nabla \Psi_l(\mathbf{r}) = - \frac{\epsilon_l}{\epsilon_{l+1}} \hat{\mathbf{n}}_{l+1} \cdot \nabla \Psi_{l+1}(\mathbf{r}) \quad (4b)$$

设粗糙面长度为 L ,离散密度 Δx ,粗糙面 S_l 的高度用 $z_l(x)$ 表示。则方程(1)~方程(3)整理为

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(1,1,1)} \bar{\mathbf{U}}_1 + \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(1,1,1)} \bar{\Psi}_1 = \bar{\Psi}^{inc} \quad (5a)$$

$$\rho_l \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(l,l-1,l-1)} \bar{\mathbf{U}}_{l-1} + \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(l,l-1,l-1)} \bar{\Psi}_{l-1} +$$

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(l,l-1,l)} \bar{\mathbf{U}}_l + \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(l,l-1,l)} \bar{\Psi}_l = 0 \quad (5b)$$

$$\rho_l \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(l,l,l-1)} \bar{\mathbf{U}}_{l-1} + \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(l,l,l-1)} \bar{\Psi}_{l-1} +$$

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(l,l,l)} \bar{\mathbf{U}}_l + \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(l,l,l)} \bar{\Psi}_l = 0 \quad (5c)$$

$$\rho_{M-1} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(M,M-1,M-1)} \bar{\mathbf{U}}_{M-1} + \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(M,M-1,M-1)} \bar{\Psi}_{M-1} = 0 \quad (5d)$$

对于 TE 波, $\rho_l = \mu_l / \mu_{l-1}$, 对于 TM 波, $\rho_l = \epsilon_l / \epsilon_{l-1}$,

$$\bar{\mathbf{U}}_l = \hat{\mathbf{n}}_l \cdot \nabla \bar{\Psi}_l \cdot \sqrt{1 + (dz_{m,l}/dx_{m,l})^2}.$$

$$A_{mn}^{(a,b,c)} = \begin{cases} \omega^{(a,c)} \frac{i\Delta x}{4} H_0^{(1)}(k_a | \mathbf{r}_{m,b} - \mathbf{r}_{n,c} |), \\ b = c, m \neq n \text{ 或 } b \neq c \\ \omega^{(a,c)} \frac{i\Delta x}{4} \left[1 + \frac{i2}{\pi} \ln \left(\frac{e^{\gamma} k_a \Delta x \Delta l_{m,b}}{4e} \right) \right], \\ b = c, m = n \end{cases} \quad (6a)$$

$$B_{mn}^{(a,b,c)} = \begin{cases} -\omega^{(a,c)} \frac{ik_a \Delta x}{4} \frac{H_1^{(1)}(k_a | \mathbf{r}_{m,b} - \mathbf{r}_{m,c} |)}{|\mathbf{r}_{m,b} - \mathbf{r}_{m,c}|} \times \\ \{z'_c(x_n - x_m) - [z_c(x_n) - z'_b(x_m)]\}, \\ b = c, m \neq n \text{ 或 } b \neq c \\ \frac{1}{2} - \omega^{(a,c)} \frac{z''_b(x_m)}{4\pi} \frac{\Delta x}{1 + z'_b(x_m)^2}, \\ b = c, m = n \end{cases} \quad (6b)$$

式中, a 表示区域; b 表示场点所在粗糙面; c 表示源点所在粗糙面; 当 $a=c$ 时, $\omega(a,c)=1$; 当 $a \neq c$ 时, $\omega(a,c)=-1$ 。

1.2 前后向迭代法

考虑三层媒质粗糙面,两个粗糙面 S_1 和 S_2 , 方程(5)整理为

$$\bar{\bar{\mathbf{Z}}}\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{V}} \quad (7)$$

式中

$$\bar{\bar{\mathbf{Z}}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(1,1,1)} & \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(1,1,1)} & 0 & 0 \\ \rho_2 \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(2,1,1)} & \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(2,1,1)} & \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(2,1,2)} & \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(2,1,2)} \\ \rho_2 \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(2,2,1)} & \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(2,2,1)} & \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(2,2,2)} & \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(2,2,2)} \\ 0 & 0 & \rho_3 \bar{\bar{\mathbf{A}}}^{(3,2,2)} & \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{(3,2,2)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_1 \\ \bar{\Psi}_1 \\ \bar{\mathbf{U}}_2 \\ \bar{\Psi}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}^{inc} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

将各子矩阵分解为上、下和对角矩阵,分别用 \mathbf{U} 、 \mathbf{L} 和 \mathbf{D} 表示。例如,对上标 (l, l, l) 的子矩阵为

$$\bar{\mathbf{A}}^{(l,l,l)} = \bar{\mathbf{A}}^{U,(l,l,l)} + \bar{\mathbf{A}}^{L,(l,l,l)} + \bar{\mathbf{A}}^{D,(l,l,l)} \quad (8a)$$

$$\bar{\mathbf{B}}^{(l,l,l)} = \bar{\mathbf{B}}^{U,(l,l,l)} + \bar{\mathbf{B}}^{L,(l,l,l)} + \bar{\mathbf{B}}^{D,(l,l,l)} \quad (8b)$$

将未知向量分解为前后向分量, $\bar{\mathbf{U}}_l = \bar{\mathbf{U}}_l^f + \bar{\mathbf{U}}_l^b$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}_l = \bar{\boldsymbol{\psi}}_l^f + \bar{\boldsymbol{\psi}}_l^b$, 这里, $\bar{\mathbf{U}}_l^f$ 和 $\bar{\boldsymbol{\psi}}_l^f$ 是前向分量, $\bar{\mathbf{U}}_l^b$ 和 $\bar{\boldsymbol{\psi}}_l^b$ 是后向分量。于是,方程(7)中前向电流迭代公式写为

$$\bar{\mathbf{A}}^{L,(1,1,1)} \bar{\mathbf{U}}_1^f + \bar{\mathbf{B}}^{L,(1,1,1)} \bar{\boldsymbol{\psi}}_1^f = \bar{\boldsymbol{\psi}}_1^{inc} - \bar{\mathbf{A}}^{D,(1,1,1)} (\bar{\mathbf{U}}_1^f + \bar{\mathbf{U}}_1^b) - \bar{\mathbf{B}}^{D,(1,1,1)} (\bar{\boldsymbol{\psi}}_1^f + \bar{\boldsymbol{\psi}}_1^b) \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \bar{\mathbf{A}}^{L,(2,1,1)} \bar{\mathbf{U}}_1^f + \bar{\mathbf{B}}^{L,(2,1,1)} \bar{\boldsymbol{\psi}}_1^f + \bar{\mathbf{A}}^{L,(2,1,2)} \bar{\mathbf{U}}_2^f + \bar{\mathbf{B}}^{L,(2,1,2)} \bar{\boldsymbol{\psi}}_2^f = \\ - \rho_2 \bar{\mathbf{A}}^{D,(2,1,1)} (\bar{\mathbf{U}}_1^f + \bar{\mathbf{U}}_1^b) - \bar{\mathbf{B}}^{D,(2,1,1)} (\bar{\boldsymbol{\psi}}_1^f + \bar{\boldsymbol{\psi}}_1^b) - \\ \bar{\mathbf{A}}^{D,(2,1,2)} (\bar{\mathbf{U}}_2^f + \bar{\mathbf{U}}_2^b) - \bar{\mathbf{B}}^{D,(2,1,2)} (\bar{\boldsymbol{\psi}}_2^f + \bar{\boldsymbol{\psi}}_2^b) \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \bar{\mathbf{A}}^{L,(2,2,1)} \bar{\mathbf{U}}_1^f + \bar{\mathbf{B}}^{L,(2,2,1)} \bar{\boldsymbol{\psi}}_1^f + \bar{\mathbf{A}}^{L,(2,2,2)} \bar{\mathbf{U}}_2^f + \bar{\mathbf{B}}^{L,(2,2,2)} \bar{\boldsymbol{\psi}}_2^f = \\ - \rho_2 \bar{\mathbf{A}}^{D,(2,2,1)} (\bar{\mathbf{U}}_1^f + \bar{\mathbf{U}}_1^b) - \bar{\mathbf{B}}^{D,(2,2,1)} (\bar{\boldsymbol{\psi}}_1^f + \bar{\boldsymbol{\psi}}_1^b) - \\ \bar{\mathbf{A}}^{D,(2,2,2)} (\bar{\mathbf{U}}_2^f + \bar{\mathbf{U}}_2^b) - \bar{\mathbf{B}}^{D,(2,2,2)} (\bar{\boldsymbol{\psi}}_2^f + \bar{\boldsymbol{\psi}}_2^b) \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} \rho_3 \bar{\mathbf{A}}^{L,(3,2,2)} \bar{\mathbf{U}}_1^f + \bar{\mathbf{B}}^{L,(3,2,2)} \bar{\boldsymbol{\psi}}_1^f = \\ - \rho_3 \bar{\mathbf{A}}^{D,(3,2,2)} (\bar{\mathbf{U}}_2^f + \bar{\mathbf{U}}_2^b) - \bar{\mathbf{B}}^{D,(3,2,2)} (\bar{\boldsymbol{\psi}}_2^f + \bar{\boldsymbol{\psi}}_2^b) \end{aligned} \quad (9d)$$

类似的可得到后向电流的迭代公式。由迭代求解,第 i 次迭代的未知量为 $\bar{\mathbf{U}}_1^{f,(i)}$ 、 $\bar{\mathbf{U}}_1^{b,(i)}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\psi}}_1^{f,(i)}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\psi}}_1^{b,(i)}$ 、 $\bar{\mathbf{U}}_2^{f,(i)}$ 、 $\bar{\mathbf{U}}_2^{b,(i)}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\psi}}_2^{f,(i)}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\psi}}_2^{b,(i)}$, 迭代算法以 $\bar{\mathbf{U}}_1^{b,(0)} = 0$ 、 $\bar{\boldsymbol{\psi}}_1^{b,(0)} = 0$ 、 $\bar{\mathbf{U}}_2^{b,(0)} = 0$ 、 $\bar{\boldsymbol{\psi}}_2^{b,(0)} = 0$ 为初始值,迭代计算至指定收敛精度。

FBM 需要重复计算矩阵和矢量的乘积,对于前向迭代过程有

$$V_f^{(1)}(\mathbf{r}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} A_{mn}^{(1,1,1)} \cdot U_{1,m} + \sum_{m=1}^{n-1} B_{mn}^{(1,1,1)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{1,m} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} V_f^{(2)}(\mathbf{r}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} A_{mn}^{(2,1,1)} \cdot U_{1,m} + \sum_{m=1}^{n-1} B_{mn}^{(2,1,1)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{1,m} + \\ \sum_{m=1}^{n-1} A_{mn}^{(2,1,2)} \cdot U_{2,m} + \sum_{m=1}^{n-1} B_{mn}^{(2,1,2)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{2,m} \end{aligned} \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} V_f^{(3)}(\mathbf{r}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} A_{mn}^{(2,2,1)} \cdot U_{1,m} + \sum_{m=1}^{n-1} B_{mn}^{(2,2,1)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{1,m} + \\ \sum_{m=1}^{n-1} A_{mn}^{(2,2,2)} \cdot U_{2,m} + \sum_{m=1}^{n-1} B_{mn}^{(2,2,2)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{2,m} \end{aligned} \quad (10c)$$

$$V_f^{(4)}(\mathbf{r}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} A_{mn}^{(3,2,2)} \cdot U_{1,m} + \sum_{m=1}^{n-1} B_{mn}^{(3,2,2)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{1,m} \quad (10d)$$

式中, $n=1, 2, \dots, N$; $V_f^{(i)}(\mathbf{r}_n)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 表示分界面上第 n 个接收单元前面的源电流产生的辐射贡献。每次迭代需要 $O(N_2)$ 计算量。

1.3 谱积分加速法(SAA)

如果将 SAA 应用到方程(10)的计算中,则计算量和内存均减少 $O(N)$ 。基本原理是:定义一个邻近区域 L_s ,若某源单元与接收场单元的距离在 L_s 以内,则称其为强作用

组,产生强作用 V_s ; 反之,则称其为弱作用组,产生弱作用 V_w ,如方程(10a)可改写为

$$\begin{aligned} V_f^{(1)}(\mathbf{r}_n) = V_s^{(1)} + V_w^{(1)} = \\ \sum_{m=n-N_s}^{n-1} (A_{mn}^{(1,1,1)} \cdot U_{1,m} + B_{mn}^{(1,1,1)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{1,m}) + \\ \sum_{m=1}^{n-N_s-1} (A_{mn}^{(1,1,1)} \cdot U_{1,m} + B_{mn}^{(1,1,1)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{1,m}) \end{aligned} \quad (11)$$

对 r_n 处的 $V_s^{(1)}$ 是由在 r_n 处接收场单元附近 L_s 以内的 N_s 个源单元对其共同作用产生的贡献,仍采用精确的 MoM 计算。 $V_w^{(1)}$ 是由 L_s 以外的 $n-N_s-1$ 个源单元对其共同作用产生的贡献,其庞大的计算量花费了大量时间,降低了计算效率。

由 Green 函数的谱积分形式^[12]可以推得

$$\begin{aligned} V_w^{(1)}(\mathbf{r}_n) = \sum_{m=1}^{n-N_s-1} (A_{mn}^{(1,1,1)} \cdot U_{1,m} + B_{mn}^{(1,1,1)} \cdot \boldsymbol{\psi}_{1,m}) = \\ \frac{i\Delta x}{4\pi} \int_{C_\theta} F_n(\theta) \exp(ik_1 z_{1,n} \sin \theta) d\theta \quad (12) \\ F_n(\theta) = F_{n-1}(\theta) \cdot \exp(ik_1 \Delta x \cos \theta) + \\ [-ik_1 (-\sin \theta + \xi_x \cos \theta) \boldsymbol{\psi}_{1,n-N_s-1} + U_{1,n-N_s-1}] \cdot \\ \exp[ik_1 (N_s + 1) \Delta x \cos \theta] \cdot \\ \exp[-ik_1 z_{1,n-N_s-1} \sin \theta] \end{aligned} \quad (13)$$

同理,可以得到 $V_w^{(2)}$ 、 $V_w^{(3)}$ 、 $V_w^{(4)}$ 的谱积分形式。可以看到,远场 $F_n(\theta)$ 现在通过方程(13)递归计算,在积分路径上缓慢变化模式使 SAA 算法具有高效性,积分路径依据最大鞍点的位置来选择^[12]。

最后,选择合适的参数,可以得到远区场的离散谱积分形式,如对 $V_w^{(1)}$,有

$$V_w^{(1)} = \frac{i\Delta x e^{-i\delta}}{4\pi} \sum_{p=-Q}^Q W(\theta_p) F_n(\theta_p) e^{ik_1 z_{1,n} \sin \theta_p} \Delta\theta \quad (14)$$

1.4 锥形入射波和收敛精度

为避免人为截断粗糙面引起的误差,采用 Thorsos 锥形入射波^[14],即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}^{inc}(\mathbf{r}) = \exp[ik(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)(1 + w(\mathbf{r}))] \cdot \\ \exp\left[-\frac{(x + z \tan \theta_i)^2}{g^2}\right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$w(x, z) = \frac{1}{(kg \cos \theta_i)^2} \left[2 \frac{(x + z \tan \theta_i)^2}{g^2} - 1 \right] \quad (16)$$

式中, θ_i 为入射角(相对于 z 轴逆时针方向); k 为上半空间的波数; g 为波束宽度。

定义收敛精度为

$$\tau(i) = \frac{\|\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{Z}}\bar{\mathbf{I}}\|}{\|\bar{\mathbf{V}}\|} = \frac{\|\bar{\mathbf{Z}}(\bar{\mathbf{I}}^{b,i-1} - \bar{\mathbf{I}}^{b,i})\|}{\|\bar{\mathbf{V}}\|} \quad (17)$$

当 $\tau(i)$ 满足一定条件时迭代停止。

2 数值计算及讨论

为避免不同粗糙面相互重叠,所有分界面均采用参数相同的高斯粗糙面,媒质的介电常数为 $\epsilon_{r2} = 2.0 + i0.05$,

$\epsilon_{r3} = 25 + i0$ 。MoM 求解时采用脉冲基函数离散粗糙表面电流分布,剖分单元为 $\Delta x = \lambda/10$,如不特殊说明,粗糙面的参数为:粗糙面长度 $L = 51.2\lambda$,均方根高度 $rms = 0.5\lambda$,相关长度 $l = 1.0\lambda$,锥形入射波参数为 $g = 10\lambda, \theta_i = 30^\circ$,上层媒质厚度 $d = 10\lambda$,收敛精度 $\tau = 10^{-2}$,文中所有结果均是在个人计算机上实现的,配置为:主频 1.65 GHz,内存 1 GB。

算例 1 算法的收敛性分析。其余参数不变,均方根高度变化。TE 波入射,取强作用距离为 10λ ,收敛精度 τ 随迭代步数的变化关系如图 2(a)所示:当 $rms = 0.1\lambda$ 时,经过 14 步迭代, $\tau = 10^{-7}$;当 $rms = 0.3\lambda$ 时,经过 14 步迭代, $\tau = 10^{-5}$; $rms = 0.5\lambda$ 时,收敛精度最终只能到 $\tau = 10^{-3}$ 。由此可知,随着粗糙面粗糙度的增大,FBM/SAA 的收敛性有所降低,这主要是由于随着粗糙度的增大,谱积分求解式(14)时误差增大导致的,要提高收敛精度,必须重新选定积分参数。TM 波入射时情况如图 2(b)所示。由此可知, TM 波的收敛速度更快但收敛精度有所降低。

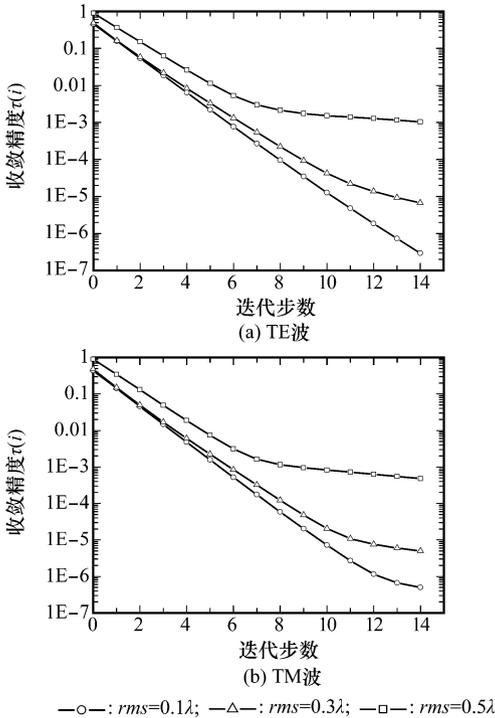


图 2 收敛精度随迭代步数的变化

算例 2 算法有效性的验证。其余参数不变,取 $L = 102.4\lambda$,强作用距离 $L_s = 10\lambda$,在 TE 波照射下,用 FBM/SAA、FBM、MoM 分别计算分层粗糙面的双站散射系数,结果如图 3(a)所示,由图可知:3 种方法结果相当吻合,验证了算法的有效性。但是,FBM/SAA 耗时仅 407 s,而 FBM 耗时 744 s、MoM 耗时 2 383 s。因此,在保证计算精度的前提下,FBM/SAA 节省了大量的计算时间,提高了计算效率。图 3(b)为 TM 波入射的结果。

算例 3 其他参数不变,TE 波入射,取粗糙面长度分别为 $12.8\lambda, 25.6\lambda, 51.2\lambda$ 和 102.4λ ,分别对应阻抗矩阵维

数为 512、1 024、2 048 和 4 096,同时还用 FBM/SAA 求解了长度为 204.8λ 的分层粗糙面的散射系数,比较 FBM/SAA 和传统 MoM 的计算时间,计算时间如图 4 所示。由图可知,FBM/SAA 因其 $O(N)$ 的计算量,大大提高了计算速度,尤其当粗糙面长度较大时优势更为明显。

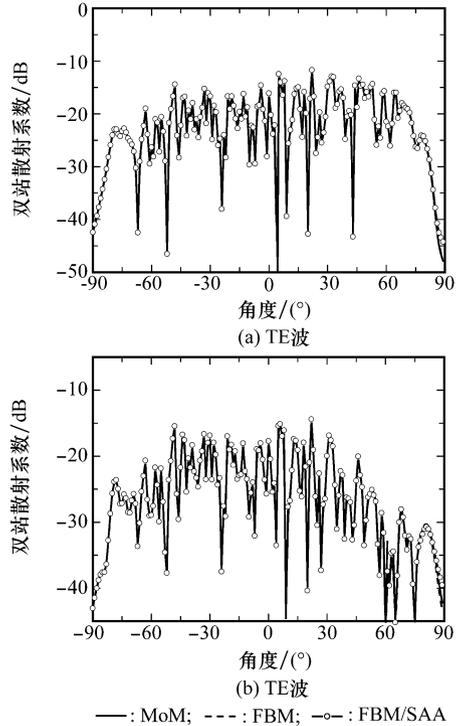


图 3 双站散射系数

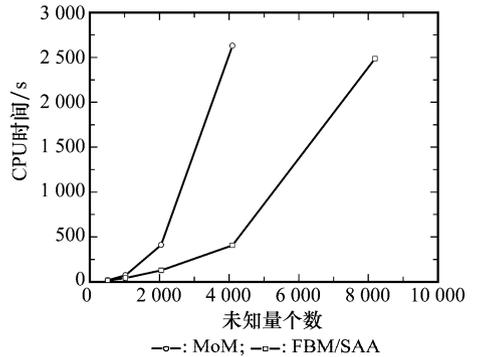


图 4 CPU 时间的比较

3 结 论

本文来用 FBM/SAA 快速有效地求解了分界面均为粗糙面的分层粗糙面的双站散射系数。该算法对 TE 波和 TM 波都具有良好的收敛性,且其计算量和内存均为 $O(N)$,计算结果与 FBM 和 MoM 一致。但是,FBM/SAA 节省了大量的时间,提高了计算效率,尤其当粗糙面长度较大时优势更为明显。