

改进的基于四阶累积量的 MUSIC 算法

唐建红, 司锡才, 初 萍

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 超宽带测向系统中, 天线体积受限严重影响到系统的测向精度和解模糊能力, 且天线阵列的孔径限制着阵列最多能分辨的目标信号个数, 而一些优秀的算法如空间平滑算法和旋转不变子空间 (estimation of signal parameters via rotational invariance technique, ESPRIT) 算法损失了天线阵列孔径。针对这些问题, 在传统的四阶累积量多重信号分类 (multiple signal classification, MUSIC) 算法基础上提出了一种改进的算法。该算法根据四阶累积量矩阵构成的规律, 去除了原四阶累积量矩阵的数据冗余, 有效地减小了运算时间, 为其实际应用提供了必要条件。计算机仿真和实测数据仿真的结果表明, 本改进算法可以快速地实现虚拟阵列扩展, 同时对有色高斯噪声也有一定的抑制作用。

关键词: 空间谱估计; 四阶累积量; 多重信号分类算法; 虚拟阵列扩展

中图分类号: TN 911 **文献标志码:** A

Improved MUSIC algorithm based on fourth-order cumulants

TANG Jian-hong, SI Xi-cai, CHU Ping

(Coll. of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering Univ., Harbin 150001, China)

Abstract: In an ultra-wideband direction-finding (DF) system, the limitation on the volume of an antenna affects the DF accuracy of the system and the capability of solving ambiguity seriously. And the utmost number of target signals, which can be resolved by the array, is limited by the aperture of antenna arrays. Some excellent algorithms, such as spatial smoothing algorithm and estimation of signal parameters via rotational invariance technique (ESPRIT) algorithm, lose even the aperture of antenna arrays. Aiming at these problems, an improved algorithm is proposed on the basis of the traditional algorithm of fourth-order cumulants (FOC). The algorithm keeps the capacity of virtual array extending, removes data redundancy of the primary FOC matrix, and reduces the computer time effectively, thus providing necessary conditions for practical application. Both of computer simulation and practical measurement data simulation prove that the improved algorithm can implement virtual array extending speedily and inhibit from Gaussian colored noise to some extent at the same time.

Keywords: spatial spectrum estimation; fourth-order cumulant; multiple signal classification algorithm; virtual array extending

0 引言

近年, 多重信号分类 (multiple signal classification, MUSIC) 算法^[1] 等超分辨算法在波达方向估计中取得了很好的效果。但天线孔径限制着这些算法最多可分辨的信号个数。同时, 一些优秀的算法如空间平滑算法^[2] 和 ESPRIT 算法^[3] 又会损失了天线孔径。基于四阶累积量 (fourth-order cumulants, FOC) 的 MUSIC (FOC-MUSIC) 算法^[4-5] 的虚拟阵列扩展性能, 使得分辨大于等于阵元个数的信号成为可能。虚拟阵元变换法^[6] 也成功地将阵列孔径扩大, 实现了对更多信号数的估计。文献^[7] 提出一种虚拟

阵列扩展方法, 根据实际阵元和虚拟阵元坐标之间的关系构造四阶或六阶协方差矩阵。同时, 天线体积受限时, 阵列扩展出的长短基线既可以提高测向精度, 还可以解模糊。但是这些算法都有一个共同的缺点, 就是计算量太大, 不能满足实际应用系统实时性的要求。本文提出一种改进的基于四阶累积量 (modified FOC, MFOC) 的 MUSIC (MFOC-MUSIC) 算法, 在减少计算量的同时, 成功地实现了虚拟阵列扩展, 提高了阵列的空间分辨能力。

1 基于四阶累积量 MUSIC 算法原理

传统的超分辨算法大多是在二阶统计量基础上提出

的,而四阶累积量具有更加丰富的信息,对未知谱特性的高斯噪声都有很好的抑制能力。四阶累积量作为预处理算法可以被广泛应用于空间谱估计^[8]。

1.1 四阶累积量的定义

复数随机过程的四阶累积量有 2⁴ 种不同的定义。这些不同的定义方式对应着不同的问题、不同的应用对象。对于零均值的复平稳随机过程 \mathbf{x} ,本文的四阶累积量采用如下定义

$$C_{4x}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \text{cum}\{\mathbf{x}_{k_1}, \mathbf{x}_{k_2}, \mathbf{x}_{k_3}, \mathbf{x}_{k_4}\} = E\{\mathbf{x}_{k_1} \mathbf{x}_{k_2} \mathbf{x}_{k_3} \mathbf{x}_{k_4}\} - E\{\mathbf{x}_{k_1} \mathbf{x}_{k_3}\}E\{\mathbf{x}_{k_2} \mathbf{x}_{k_4}\} - E\{\mathbf{x}_{k_1} \mathbf{x}_{k_4}\}E\{\mathbf{x}_{k_2} \mathbf{x}_{k_3}\} - E\{\mathbf{x}_{k_1} \mathbf{x}_{k_2}\}E\{\mathbf{x}_{k_3} \mathbf{x}_{k_4}\} \quad (1)$$

式中, $\text{cum}\{\cdot\}$ 为随机过程的累积量; \mathbf{x}_{k_i} ($i=1, 2, \dots, 4$) 为随机过程; $E\{\mathbf{x}_{k_1} \mathbf{x}_{k_2} \mathbf{x}_{k_3} \mathbf{x}_{k_4}\}$ 和 $E\{\mathbf{x}_{k_i} \mathbf{x}_{k_j}\}$ 分别为 \mathbf{x} 的四阶矩和二阶矩。

1.2 MUSIC 算法原理

空间某 M 元阵列接收到窄带远场的 N 个波长为 λ 的非高斯信号。阵元间距满足 $d \leq \lambda/2$, 信号来向分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$, 且信号和噪声相互独立。由此,定义阵列接收信号的数学模型为

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (2)$$

式中, \mathbf{X} 为 $M \times L$ 维的阵列接收数据矩阵 (L 为快拍数); \mathbf{A} 为 $M \times N$ 维的空间阵列的流型矩阵 (导向矢量阵); \mathbf{S} 为 $N \times L$ 维的空间信号矩阵; \mathbf{N} 为 $M \times L$ 维的噪声矩阵。接收数据矩阵 \mathbf{X} 的自相关矩阵 \mathbf{R} 可写成

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{R}_S = E[\mathbf{S}\mathbf{S}^H]$ 是空间信号的相关矩阵; σ^2 为理想白噪声功率; \mathbf{I} 为单位矩阵。注意到 \mathbf{R} 为满秩矩阵, 对矩阵 \mathbf{R} 进行特征值分解

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H = \mathbf{U}_S \mathbf{\Lambda}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{\Lambda}_N \mathbf{U}_N^H \quad (4)$$

式中, $\mathbf{\Lambda}_S$ 为大特征值组成的对角阵; $\mathbf{\Lambda}_N$ 为小特征值组成的对角阵。 N 个大特征值对应的特征向量张成信号子空间 $\mathbf{U}_S = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_N]$, $M-N$ 个小特征值对应的特征向量张成噪声子空间 $\mathbf{U}_N = [\mathbf{e}_{N+1} \ \mathbf{e}_{N+2} \ \dots \ \mathbf{e}_M]$ 。由于两个子空间是正交的, 定义空间谱函数为

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_N\mathbf{U}_N^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (5)$$

当导向矢量 $\mathbf{a}(\theta)$ 不属于信号子空间时, $\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_N$ 是一个不为零的矢量, 而当导向矢量属于信号子空间时, $\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_N$ 是一个趋近于零的矢量, 所以由空间谱函数得到的空间谱 $P_{\text{MUSIC}}(\theta)$ 在信号方向会产生尖锐的“谱峰”, 而在其他方向相对平坦, 因此可以根据这个谱峰估计出信号的到来。

1.3 FOC-MUSIC 算法原理

由四阶累积量的定义及阵列信号的数学模型可知, 定义式(1)中变量的取值范围为 $1 \leq k_1, k_2, k_3, k_4 \leq M$, 因此随着 k_1, k_2, k_3, k_4 的变化, 共有 M^4 个值。为了便于操作, 可以将这 M^4 个值放入如下 $M^2 \times M^2$ 的矩阵 \mathbf{R}_4 中, 即

$$\mathbf{R}_4((k_1 - 1)M + k_2, (k_3 - 1)M + K_4) = C_{4x}(k_1, k_2, k_3, k_4) \quad (6)$$

和 MUSIC 算法一样, 如果各个信号之间相互独立, 即可以对式(6)组成的矩阵 \mathbf{R}_4 进行特征分解。从而获得 N 个大的特征值, 其余 $M^2 - N$ 个小特征值对应的特征向量张成新的噪声子空间 \mathbf{U}_N 。利用两个子空间的正交性, 可得到 FOC-MUSIC 算法的空间谱函数

$$P_{\text{FOC-MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\|\mathbf{b}^H(\theta)\mathbf{U}_N\|^2} \quad (7)$$

式中, $\mathbf{b}(\theta) = \mathbf{a}(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta)$, \otimes 为 kronecker 积。上式中 N 个极大值对应的角度, 即 N 个信号的到来。

1.4 算法虚拟阵列扩展性能

假设空间存在 $M=3$ 个真实天线阵元, 如图 1 中实线圆排列。对于空间一个信号而言, 以天线阵元 1 为参考点, 则目标来向为 θ 时的阵列导向矢量为

$$\mathbf{a}(\theta) = [1 \ \exp(-jqd_{12}) \ \exp(-jqd_{13})]^T \quad (8)$$

式中, $q = \omega_0 \cdot \sin \theta / c$; ω_0 为信号的角频率; c 为光速。运用 FOC-MUSIC 算法后的阵列导向矢量为

$$\mathbf{b}(\theta) = \mathbf{a}(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta) = [1 \ \exp(-jqd_{12}) \ \exp(-jqd_{13}) \ \exp(-jqd_{12}) \ \exp(-jq(2d_{12})) \ \exp(-jq(d_{12} + d_{13})) \ \exp(-jqd_{13}) \ \exp(-jq(d_{13} + d_{12})) \ \exp(-jq(2d_{13}))]^T \quad (9)$$

从上式看出第 5、6、8、9 项对应虚拟天线阵元, 但第 6、8 项相同。照此分析, 空间阵列的实际天线阵元数为 $M=3$, 虚拟阵列扩展后的天线阵元数为 $M(M+1)/2 = 6$, 如图 1 所示。

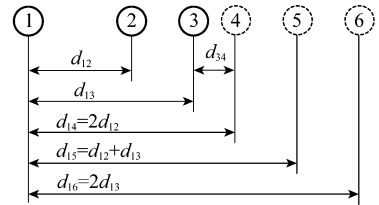


图 1 虚拟阵列扩展原理图

文献[9]指出, 式(6)构成的 $M^2 \times M^2$ 维矩阵 \mathbf{R}_4 的秩为

$$\text{rank}(\mathbf{R}_4) = N \quad (10)$$

当 $N \geq M$ 时, 特征分解后仍然存在噪声子空间, 可以构造空间谱函数。这也就说明阵列可以分辨大于等于 M 个信号, 阵列扩展出了新的阵元。

根据以上分析, FOC-MUSIC 算法的确可以实现虚拟阵列扩展。文献[8]中指出: 对于任意天线阵列, 采用不同的四阶累积量定义时, 虚拟阵列扩展后的天线阵元个数最多为 $M(M+1)/2$ 或 $M^2 - M + 1$ 。

2 改进的 FOC-MUSIC 算法

2.1 MFOC-MUSIC 算法的提出

图 1 中, 当天线阵列是间距为 d 的均匀线阵时, 其导向矢量式(8)变为

$$\mathbf{a}(\theta) = [1 \quad \exp(-jqd) \quad \exp(-j2qd)]^T \quad (11)$$

而式(9)也可化简为

$$\mathbf{b}(\theta) = \mathbf{a}(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta) = [1 \quad \exp(-jqd) \quad \exp(-j2qd) \quad \exp(-jqd) \quad \exp(-j2qd) \quad \exp(-j3qd) \quad \exp(-j2qd) \quad \exp(-j3qd) \quad \exp(-jq4d)]^T \quad (12)$$

可以看出,上式存在大量冗余,只有第 1 到第 M 项,和所有第 $k \times M(k=2, \dots, M)$ 项是有效的,其他都是重复项。因此,由式(6)得到的 \mathbf{R}_4 中必然也存在大量重复值,造成计算量的急剧增加。本文提出的算法,就是在去除这些冗余的同时,实现虚拟阵列扩展。

2.2 MFOC-MUSIC 算法的构造

由式(12)可知,通过算法一共获得了 $2M-1$ 个阵元,即式(6)的 \mathbf{R}_4 中只有不重复的 $2M-1$ 行元素。由其共轭对称性可知, \mathbf{R}_4 中也只有 $2M-1$ 列不重复的元素。现将矩阵 \mathbf{R}_4 的第 1 到第 M 行和所有第 $k \times M(k=2, \dots, M)$ 行取出按原顺序排列,再将新矩阵的第 1 到第 M 列和所有第 $k \times M(k=2, \dots, M)$ 列取出按原顺序排列,得到新构造的去掉数据冗余后的 $(2M-1) \times (2M-1)$ 维四阶累积量矩阵,其过程表示为

$$\mathbf{R}_{4(M^2, M^2)} \rightarrow \mathbf{R}_{4(2M-1, M^2)} \rightarrow \mathbf{R}_{4(2M-1, 2M-1)}$$

新构造的矩阵 \mathbf{R}_4 中包含了所有阵列扩展的信息,这能保证实现虚拟阵列扩展。在应用时,不必求出全部 M^2 个四阶累积量的值,只需求出矩阵 $\mathbf{R}_{4(M^2, M^2)}$ 下三角或上三角中的第 1 到第 M 行和所有第 $k \times M(k=2, \dots, M)$ 行的数据,根据矩阵的共轭对称性,就可以得到矩阵 $\mathbf{R}_{4(2M-1, 2M-1)}$ 全部的元素。再加上新矩阵维数的降低,新算法的计算量就比 FOC-MUSIC 算法减小了许多。

同 FOC-MUSIC 算法一样,将矩阵 \mathbf{R}_4 进行特征值分解,得到 N 个大的特征值。其余 $2M-1-N$ 个小特征值对应的特征向量张成新的噪声子空间 \mathbf{U}_N ,得到新的空间谱函数公式

$$P_{\text{MFOC-MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{b}^H(\theta)\mathbf{U}_N\mathbf{U}_N^H\mathbf{b}(\theta)} \quad (13)$$

式中,导向向量 $\mathbf{b}(\theta)$ 为列向量 $\mathbf{a}(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta)$ 中的第 1 到第 M 个元素,和所有第 $k \times M(k=2, \dots, M)$ 个元素,即

$$\mathbf{b}(\theta) = [1 \quad \exp(-jqd) \quad \dots \quad \exp(-j(2M-2)qd)] \quad (14)$$

式(13)中 N 个极大值对应的角度即目标信号的来向。

2.3 MFOC-MUSIC 算法的步骤

综上所述,可以总结出均匀线阵时 MFOC-MUSIC 算法的实现步骤:

步骤 1 根据四阶累积量定义和式(6),求出矩阵 $\mathbf{R}_{4(M^2, M^2)}$ 下三角或上三角中的第 1 到第 M 行和所有第 $k \times M(k=2, \dots, M)$ 行数据。

步骤 2 利用共轭对称性,得到矩阵 $\mathbf{R}_{4(2M-1, 2M-1)}$ 的全部元素。

步骤 3 对矩阵 $\mathbf{R}_{4(2M-1, 2M-1)}$ 进行特征分解,得到噪声子空间 \mathbf{U}_N 。

步骤 4 根据式(14)定义新的阵列导向向量 $\mathbf{b}(\theta)$ 。

步骤 5 根据式(13)构造 MFOC-MUSIC 算法的空间谱函数,并搜索谱峰,得到信号的来向。

不失一般性,当阵列为非均匀线阵时,不妨先求出任意角度的 $\mathbf{a}(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta)$,找出不重复数据所在的位置。依此求出矩阵 $\mathbf{R}_{4(M^2, M^2)}$ 上三角或下三角中的相应行,同样根据共轭对称性,构造出新的矩阵 \mathbf{R}_4 ,再对 \mathbf{R}_4 进行后续运算。需要注意的是,新的空间谱函数公式中应当用对应的新导向向量 $\mathbf{b}(\theta)$ 。

3 仿真分析

实验 1 应用 Matlab 软件仿真,分析新算法的性能,并与传统 MUSIC 算法和 FOC-MUSIC 算法进行比较。设置阵列为三元间距半波长的均匀线阵,实验对一个来向为 40° 的信号进行了 200 次独立实验,搜索步长为 0.1° 。图 2 为算法的估计方差与快拍数的关系,噪声为高斯白噪声,信噪比为 20 dB。图 3 为算法的估计方差与信噪比的关系,分高斯白噪声和色噪声两种环境,实验的快拍数为 500。

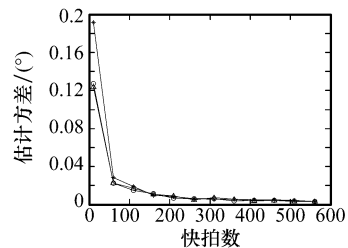


图 2 算法的估计方差与快拍数的关系

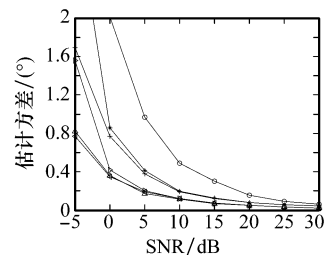


图 3 算法的估计方差与信噪比的关系

通过图 2 和图 3 可知, MFOC-MUSIC 算法和 FOC-MUSIC 算法的性能接近。在白噪声背景下,两种四阶累积量算法和二阶的 MUSIC 算法比优势不明显。当快拍数和信噪比足够大时,3 种算法性能接近。但是在色噪声背景中, MFOC-MUSIC 算法和 FOC-MUSIC 算法性能优于传统的 MUSIC 算法。不过信噪比太低的情况下, MFOC-MUSIC 算法误差比较大。从表 1 可以看出, MFOC-MUSIC 算法比 FOC-MUSIC 算法运算时间快二十几倍。

表1 相同条件下3种算法所需计算时间 s

算法	MFOC-MUSIC	FOC-MUSIC	MUSIC
所需时间	0.5	11.3	0.4

实验2 应用 Matlab 软件仿真,分析算法的虚拟阵列扩展效果。设置阵列为三元间距半波长的均匀线阵,实验针对 -60.5° 、 7.5° 、 40° 的3个空间独立信号。实验的信噪比为20 dB,快拍数为2 000,搜索步长为 0.5° 。图4为3个信号时的空间谱图。

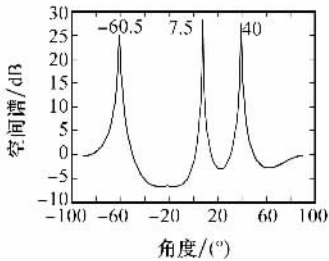


图4 3个信号时MFOC-MUSIC算法的空间谱图

从图4可以看出,MFOC-MUSIC算法可以准确地分辨出3个目标信号,实现了虚拟阵列扩展性能。理论上,按本文的方法,3个等距阵元可以扩展成5个阵元,至多能分辨4个目标。仿真实验中能准确地分辨4个目标,但需要5 000以上的快拍数,计算量太大。联合图2的显示可知,要分辨的目标越多,需要的快拍数也越多。

实验3 实测数据仿真,测试算法的性能。采用课题组自研的二维测向系统进行实验。系统接收天线为六元非均匀圆阵,为了对本文提出的算法进行测试,取水平线上的3个非等距阵元为接收天线,运用MFOC-MUSIC算法对空间信号进行一维测向。噪声背景为实验室噪声环境,快拍数为100,搜索步长为 1° 。图5中上图为一个信号时的一维空间谱图,下图为两个独立信号时的一维空间谱图。

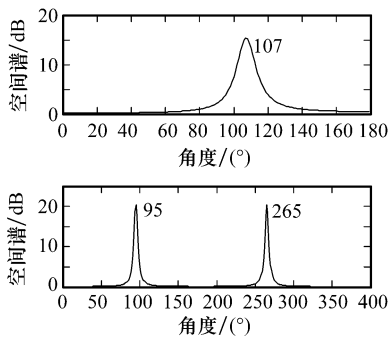


图5 实测时MFOC-MUSIC算法的空间谱图

从图5中可以看出:在实际测向系统中,对一个信号或两个独立信号,MFOC-MUSIC算法仍然有良好的性能,而

且运算时间基本能满足系统实时性的要求。由于课题组条件有限,没有更多的信号源,因此无法做虚拟阵列扩展实验验证。

4 结论

本文在基于四阶累积量 MUSIC 算法基础上提出了一种改进的 FOC-MUSIC 算法。新算法进行了无损降维处理,大大减小了计算量。它只是去除了原矩阵的数据冗余,保留了原算法的全部有效数据,因此新算法也继承了原算法的所有优点。MFOC-MUSIC 算法和原算法一样具有虚拟阵列扩展性能,同时对有色高斯噪声干扰有一定的抑制作用。利用 MFOC-MUSIC 算法快速扩展出了新的阵元,扩大了阵列的孔径,提高了阵列的空间分辨能力。这能为空间平滑和 ESPRIT 等优秀算法补偿一些牺牲的孔径。实际应用中,结合不同的算法,发挥它们各自的优点,可以更快速准确地实现波达方向估计。唯一不足的是,该算法仅在线阵,特别是均匀线阵中有良好的测向性能。计算机仿真和实测数据仿真都证实了该算法的有效性。

参考文献:

- [1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276 - 280.
- [2] Roy R, Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984 - 995.
- [3] Shan T J, Wax M, Kailath T. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals[J]. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1985, 33(4): 806 - 811.
- [4] Dogan M C, Mendel J M. Applications of cumulants to array processing-part I: aperture extension and array calibration[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(5): 1200 - 1216.
- [5] 刁鸣, 吴小强, 李晓刚. 基于四阶累积量的测向方法研究[J]. *系统工程与电子技术*, 2008, 30(2): 226 - 228. (Diao Ming, Wu Xiaoqiang, Li Xiaogang. Study on DOA estimation based on fourth-order cumulant[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(2): 226 - 228.)
- [6] 丁卫安, 马远良. 虚拟阵列变换法解相干信号 MUSIC 算法研究[J]. *微波学报*, 2008, 24(2): 27 - 30.
- [7] 陈建, 王树勋. 基于高阶累积量虚拟阵列扩展的 DOA 估计[J]. *电子与信息学报*, 2007, 29(5): 1041 - 1044.
- [8] 王永良, 陈辉, 彭应宁, 等. *空间谱估计理论与算法*[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [9] Boaz Porat, Benjamin Friedlander. Direction finding algorithms based on high-order statistics[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1991, 39(9): 2016 - 2024.