第 32 卷　第 1 期
2010 年 1 月

Vol. 32　No. 1
Jan. 2010

文章编号:1001-506X(2010)01-0158-04

不确定奇异系统的 Terminal 滑模控制

樊仲光[1,3]，梁家荣[2]，肖　剑[1]

(1. 广西大学数学与信息科学学院，广西 南宁 530004；
2. 广西大学计算机与电子信息学院，广西 南宁 530004；
3. 河池学院教师教育学院，广西 宜州 546300)

摘　要：针对一类不确定奇异系统,研究其 Terminal 滑模控制问题。通过非奇异线性变换把不确定奇异系统变换成受限等价形式,利用 Lyapunov 函数方法,首次提出了一种新的 Terminal 滑模控制策略,给出了特殊的 Terminal 滑模超曲面,设计了相应的滑模控制器,实现了滑模运动,保证了系统状态变量在有限时间内收敛到平衡点。给出数值算例,说明了方法的有效性。

关键词：不确定奇异系统；Terminal 滑模控制；受限等价；有限时间收敛

中图分类号：TP 13　　　**文献标志码**：A

Terminal sliding mode control for uncertain singular systems

FAN Zhong-guang[1,3], LIANG Jia-rong[2], XIAO Jian[1]

(*1. School of Mathematics and Information Science, Guangxi Univ., Nanning 530004, China*;
2. School of Computer and Electronic Information Science, Guangxi Univ., Nanning 530004, China;
3. School of Teacher Education, Hechi Univ., Yizhou 546300, China)

Abstract: Terminal sliding mode control for a class of uncertain singular systems is studied. Uncertain singular systems are transformed into the form of restricted equivalence by a nonsingular linear transformation. By the method of Lyapunov function, a new terminal sliding mode control strategy based on the form of restricted equivalence is proposed for the first time, and the hypersurface of a special terminal sliding mode is given. A terminal sliding mode controller is designed correspondingly such that the motion of sliding mode can be guaranteed and the systems state variables can converge to the equilibrium point in a finite time. Finally, a numerical example is presented to illustrate the validity of the approach.

Keywords: uncertain singular system; terminal sliding mode control; restricted equivalent; finite time convergence

0　引　言

奇异系统又称广义系统(generalized systems)、微分代数系统(differential-algebraic systems)及描述系统(descriptor systems)等,由于其广泛存在于电路系统、电力系统、机器人和石油化工、经济管理、生物工程以及航空航天等技术领域的应用之中,引起了众多国内外数学界、控制界等学者的广泛兴趣[1-4]。滑模变结构控制方法由于具有对系统内外部干扰的自适应性和易于实现的优点,因而成为许多学者研究奇异系统镇定问题的重要方法,这方面的研究也已经取得了较多的成果[5-7]。经典的滑模变结构控制的基本原理是:首先选取一个线性滑动超平面,然后使用一个不连续的高频切换控制器,迫使闭环系统的运动到达预先选定的滑动面或者其一个很小的邻域之上,通过控制器结构的改变以使系统达到良好的动态性能,保证系统状态在有限时间内到达滑动面,在滑模面上,系统的运动渐近稳定或者说系统状态的跟踪误差渐近地收敛到零。但是,在线性滑模变结构控制设计中是采用线性的超平面作为切换面,理论上,滑动模态的运动只是渐近稳定,但无论如何系统的状态不会在有限时间内收敛到平衡点,而在实际的系统中,系统状态要求在有限时间内到达平衡点。

基于有限时间的机理,人们提出了一种终端滑模——Terminal 滑模(terminal sliding mode,TSM)控制策略[8-9]。TSM 控制的基本思想是:在滑动超平面的设计中引入非线性函数,采用非线性超曲面为切换面,非线性函数的引入使得在滑动面上系统状态在有限时间内收敛到平衡点。

收稿日期:2008－10－10；**修回日期**:2009－04－10。

基金项目:国家自然科学基金(60564001);教育部“新世纪优秀人才支持计划”基金(NCET－06－0756)资助课题

作者简介:樊仲光(1972－),男,讲师,硕士,主要研究方向为广义系统、变结构控制。E-mail:fanzg0899@126.com

Terminal 滑模变结构控制除了具有普通滑模控制所具有的鲁棒性外,还能使系统状态有限时间收敛并具有较高的稳态跟踪精度,国内外众多学者在 TSM 控制方面做了很多研究和应用工作[10-19]。然而,遗憾的是在奇异控制系统,尚未见到利用 Terminal 滑模变结构控制的方法来研究的报道。另外,通常实际的系统在建模时不可避免地受到各种随机因素和未建模部分的影响,也就是系统具有不确定性,因此不确定控制系统具有更为实际的意义。在本文中,我们首次引入了 Terminal 滑模变结构方法对不确定奇异系统进行研究。

1　预备知识

考虑如下满足匹配条件的不确定奇异系统

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{X}) \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 是状态变量;$\boldsymbol{f}\in\mathbf{R}^n$ 是系统的不确定项;$\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$ 是系统的控制输入(由于通常情况下,广义系统为多输入多输出系统,情况十分复杂,因此本文考虑 $n=2m$ 这一类情况,其他更一般情形有待进一步研究);$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times(n-m)}$ 为相容的定常矩阵;$\boldsymbol{E}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为奇异矩阵,rank $\boldsymbol{E}=r<n$。

为了设计的需要,作如下假设:

假设 1　$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ R-能控,rank $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})=n$,rank $\boldsymbol{B}=m$;

假设 2　$f(t,\boldsymbol{X})\in \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{B}$;

注:假设 2 的目的是使得 $f(t,\boldsymbol{X})$ 能够由 $\boldsymbol{B}$ 的列表示,同时使得原广义系统可以进行受限等价变换。

假设 3　$\|f(t,\boldsymbol{X})\|\leqslant\rho(\|\boldsymbol{E}\boldsymbol{X}\|)$,$\rho$ 为连续函数,$\rho(0)=0$。

引理 1[5]　对于系统(1),在假设 1～假设 3 的条件下,存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 使得系统受限等价于

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{X}_2 \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{E}_2\dot{\boldsymbol{X}}_2=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}_2 \tag{2b}$$

并且$(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12})$能控,其中 $\boldsymbol{X}_1\in\mathbf{R}^m$,$\boldsymbol{X}_2\in\mathbf{R}^m$

$$\boldsymbol{QEP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{QAP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{QB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}_2$ 可逆,$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Qf}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{f}_2(t,X_1,X_2)\end{pmatrix}$。

引理 2[11]　假设连续的正定函数 $V(t)$ 满足微分不等式

$$\dot{V}(t)\leqslant-\alpha V^{\eta}(t),\ \forall t\geqslant 0 \tag{3}$$

式中,α 和 η 均为常数,且 $\alpha>0$,$0<\eta<1$,则 $V(t)$ 满足不等式

$$V^{1-\eta}\leqslant V^{1-\eta}(0)-\alpha(1-\eta)t,\ 0\leqslant t\leqslant t_r \tag{4}$$

并且有

$$V(t)=0,\ \forall t\geqslant t_r \tag{5}$$

有限时间为

$$t_r=\frac{V^{1-\eta}(0)}{\alpha(1-\eta)} \tag{6}$$

引理 3[9]　对于一阶动力学系统,如果其滑动模取为

$$s=\dot{x}_1+\alpha x_1+\beta x_1^{\frac{q}{p}}=0 \tag{7}$$

则对于给定初始状态 $x_1(0)\neq 0$,系统将在有限时间

$$t_s=\frac{p}{\alpha(1-q)}\ln\frac{\alpha x_1(0)^{(p-q)/p}+\beta}{\beta} \tag{8}$$

内到达平衡点 $x_1=0$。式中,$x_1\in\mathbf{R}^1$,$\alpha,\beta>0$ 为常数,$p>q$ 为正奇数。

定义 1

$$X_1^{\frac{q}{p}}=(x_1^{\frac{q}{p}},x_2^{\frac{q}{p}},\cdots,x_m^{\frac{q}{p}})^{\mathrm{T}}$$

$$\int X_1^{q/p}=\left(\int x_1^{q/p},\int x_2^{q/p},\cdots,\int x_m^{q/p}\right)^{\mathrm{T}}$$

2　主要结果

利用 Terminal 滑模变结构控制的方法研究不确定奇异系统(1)的镇定问题可分为两步。第一步,根据引理 3,引入非线性项,设计 Terminal 滑模超曲面 $\boldsymbol{S}=0$,使得系统在滑动模 $\boldsymbol{S}=0$ 上具有所希望的品质:系统的状态在有限时间内收敛到零点或其一较小的邻域内;第二步,设计 Terminal滑模变结构控制器,使系统在滑模 $\boldsymbol{S}=0$ 之外的轨线在有限时间内到达滑动模上,实现滑动模运动。

定理 1　对于不确定奇异系统(1),在引理 1 的条件下,如果取 Terminal 滑模为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{C}_3\int\boldsymbol{X}_1^{q/p}+\xi \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}=&-(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{X}_1-\\&(\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{X}_1^{\frac{q}{p}}\end{aligned} \tag{10}$$

则在 $\boldsymbol{S}=0$ 上,系统状态在有限时间内收敛到零点。

式中,$\boldsymbol{C}_1\in\mathbf{R}^{m\times m}$,$\boldsymbol{C}_3\in\mathbf{R}^{m\times m}$;$p$、$q$ 均为正奇数,且 $p>q$;$\boldsymbol{K}_1$、$\boldsymbol{K}_2$ 分别满足

$$\sigma(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{K}_1)\subset\mathbf{C}^- \tag{11}$$

其中,$\mathbf{C}^-$ 为左半复平面。

$$\sigma(\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{K}_2)\subset\mathbf{C}^-,\deg(\det(\lambda\boldsymbol{E}_2-K_2))=\operatorname{rank}\boldsymbol{E}_2 \tag{12}$$

证明　容易看出,存在 $\boldsymbol{K}_2$ 使式(12)成立,又由引理 1 可知,$(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12})$能控,故存在 $\boldsymbol{K}_1$ 使得式(11)成立。

在 $\boldsymbol{S}=0$ 上,$\dot{\boldsymbol{S}}=0$,因此有

$$\boldsymbol{C}_1\dot{\boldsymbol{X}}_1+\boldsymbol{E}_2\dot{\boldsymbol{X}}_2+\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{X}_1^{\frac{q}{p}}+\dot{\xi}=0$$

由上式可得

$$\begin{gathered}\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{X}_2)+(\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}_2)+\\ \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{X}_1^{\frac{q}{p}}-(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{X}_1-\\ (\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{X}_1^{\frac{q}{p}}=0\end{gathered}$$

即

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{A}_{21}-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{X}_1+\\ (\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}+\boldsymbol{f}_2=0\end{gathered}$$

因此得到等效控制为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}=-\boldsymbol{B}_2^{-1}[(\boldsymbol{A}_{21}-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{X}_1+\\ (\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{f}_2]\end{gathered}$$

把上式代入式(2),得到理想滑动模运动为

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{X}_2 \tag{13}$$

$$\boldsymbol{E}_2\dot{\boldsymbol{X}}_2 = (\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{X}_1 + (\boldsymbol{K}_2 + \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{X}_2 \tag{14}$$

令

$$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 \tag{15}$$

则理想滑动模运动方程(13)和方程(14)变为

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1 = (\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{E}_2\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{y} \tag{17}$$

由广义系统理论可知,对于式(17),根据式(12),存在常数 $\beta>0$,使得 $t>t_0$ 时

$$\|\boldsymbol{y}(t)\| \leqslant \|\boldsymbol{y}_0\|\exp(-\beta(t-t_0)),\ \boldsymbol{y}_0 \in \mathbf{R}^m \tag{18}$$

对于方程(16),有

$$\boldsymbol{X}_1(t) = \exp[(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{K}_1)(t-t_0)]\boldsymbol{X}_1(t_0) + \int_{t_0}^{t}\exp[-(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{K}_1)(\tau - t)]\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

注意到式(11),得

$$\|\boldsymbol{X}_1(t)\| \leqslant \|\boldsymbol{X}_1(t_0)\|\exp(-\beta(t-t_0)) + \int_{t_0}^{t}\exp(-\beta t + \beta\tau)\|\boldsymbol{A}_{12}\|\ \|y_0\|\exp(-\beta(\tau - t_0))\mathrm{d}\tau = \exp(-\beta(t-t_0))(\|\boldsymbol{X}_1(t_0)\| + \|\boldsymbol{A}_{12}\|\ \|\boldsymbol{y}_0\|(t-t_0))$$

所以,当 $t>t_0$ 时有

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{X}_1(t) = 0 \tag{19}$$

又由式(15)和式(18)得

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{X}_2(t) = 0 \tag{20}$$

所以,在 $\boldsymbol{S}=0$ 上,有 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{X}(t)=0$,系统(1)渐近稳定。

另外,$\boldsymbol{S}=0$ 时,由 $\dot{\boldsymbol{S}}=0$ 得到

$$\boldsymbol{C}_1\dot{\boldsymbol{X}}_1 + (\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{X}_2 + \xi)' + \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{X}_1^{\frac{q}{p}} = 0 \tag{21}$$

可变形为

$$-\boldsymbol{C}_1\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{X}_1^{\frac{q}{p}}\mathrm{d}t + (\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{X}_2 + \xi)'\mathrm{d}t \tag{22}$$

取定矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{C}_3$,使它们可以进行相同的行变换变为对角形式,因此,不失一般性,假设

$$\boldsymbol{C}_1 = \mathrm{diag}(c_{111}, c_{122}, \cdots, c_{1mm}),\ \boldsymbol{C}_3 = \mathrm{diag}(c_{311}, c_{322}, \cdots, c_{3mm})$$

又令

$$g(\boldsymbol{X}_2, \xi) = (\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{X}_2 + \xi)' = (g_1(\boldsymbol{X}_2,\xi), g_2(\boldsymbol{X}_2,\xi), \cdots, g_m(\boldsymbol{X}_2,\xi))$$

不失一般性,存在 $N\geqslant 0, M>0$,且 $N\leqslant M$,使得

$$N \leqslant g_i(X_2,\xi)x_i^{-\frac{q}{p}} \leqslant M,\ i=1,2,\cdots,m \tag{23}$$

则式(22)可改写为

$$-c_{1ii}x_i^{-\frac{q}{p}}\mathrm{d}x_i = g_i(X_2,\xi)x_i^{-\frac{q}{p}}\mathrm{d}t + c_{3ii}\mathrm{d}t,\ i=1,2,\cdots,m \tag{24}$$

将式(24)积分,有

$$-c_{1ii}\int_{x_i(0)}^{0}x_i^{-\frac{q}{p}}\mathrm{d}x_i = \int_0^{t_{si}}g_i(\boldsymbol{X}_2,\xi)x_i^{-\frac{q}{p}}\mathrm{d}t + \int_0^{t_{si}}c_{3ii}\mathrm{d}t \tag{25}$$

所以由式(23)可得

$$\frac{pc_{1ii}}{p-q}x_i(0)^{-\frac{q}{p}+1} \leqslant (M + c_{3ii})t_{s_i} \tag{26}$$

$$\frac{pc_{1ii}}{p-q}x_i(0)^{-\frac{q}{p}+1} \geqslant (N + c_{3ii})t_{s_i} \tag{27}$$

式中,$x_i(0)$ 为状态 x_i 在滑动模上的初始时间,t_{s_i} 为状态 x_i 到达平衡点的时间,从式(26)和式(27)可以容易看出,t_{s_i} 有界,即状态 x_i 在有限时间内到达零点。

综上所述,系统的状态 $\boldsymbol{X}_1$ 必定在有限时间内收敛到零点,再由式(15)、式(19)和式(20)得知,状态 $\boldsymbol{X}_2$ 也在有限时间内收敛到零点;即系统的状态在有限时间内收敛到零点。

证毕

定理 2 对于不确定奇异系统(1),在引理 1 的条件下,如果取 Terminal 滑模变结构控制为

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{B}_2^{-1}[(\boldsymbol{A}_{21} - \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{X}_1 + (\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12} - \boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{S}^r + \varepsilon\boldsymbol{S} + \|\boldsymbol{Q}\|\rho(\|\boldsymbol{EX}\|)\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{S}] \tag{28}$$

则系统(1)的状态在有限时间内到达滑模面 $\boldsymbol{S}=0$。

式中,$\boldsymbol{S}^r = [\boldsymbol{S}_1^r, \boldsymbol{S}_2^r, \cdots, \boldsymbol{S}_m^r]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$,$\varphi_i>0(i=1,\cdots,m)$;$r$ 为常数,满足 $r=\dfrac{r_1}{r_2}$,$r_1<r_2$ 均为正奇数。

证明 $\boldsymbol{S}$ 沿着式(2a)、式(2b)和式(18)的系统的轨道对 t 的导数为

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{C}_1\dot{\boldsymbol{X}}_1 + \boldsymbol{E}_2\dot{\boldsymbol{X}}_2 + \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{X}_1^{\frac{q}{p}} + \dot{\xi} = \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{X}_2) + (\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}_2) + \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{X}_1^{\frac{q}{p}} - (\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{X}_1 - (\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{K}_2 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{X}_1^{\frac{q}{p}} = \boldsymbol{f}_2(t,\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2) - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{S}^r - \varepsilon\boldsymbol{S} - \|\boldsymbol{Q}\|\rho(\|\boldsymbol{EX}\|)\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{S}$$

取 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}(t)$$

则

$$\dot{V}(t) = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_2(t,\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2) - \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{S} - \varepsilon\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\|\boldsymbol{Q}\|\rho(\|\boldsymbol{EX}\|)\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{S}$$

又由于

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{m}\varphi_i s_i^{r+1} \geqslant \min_i(\varphi_i)\left[\left(\sum_{i=1}^{m}s_i^2\right)^{\frac{r+1}{2}}\right] = \min_i(\varphi_i)\|\boldsymbol{S}\|^{r+1}$$

因此

$$\dot{V}(t) \leqslant \|\boldsymbol{S}\|\,\boldsymbol{f}_2(t,X_1,X_2)\| - \min_i(\varphi_i)\|\boldsymbol{S}\|^{r+1} - \varepsilon\|\boldsymbol{S}\|^2 - \|\boldsymbol{S}\|\ \|\boldsymbol{Q}\|\rho(\|\boldsymbol{EX}\|) \leqslant -\min_i(\varphi_i)\|\boldsymbol{S}\|^{r+1} + \|\boldsymbol{S}\|(\|\boldsymbol{f}_2\| - \|\boldsymbol{Q}\|\rho(\|\boldsymbol{EX}\|)) \leqslant -\min_i(\varphi_i)\|\boldsymbol{S}\|^{r+1} = -\min_i(\varphi_i)(2V)^{\frac{r+1}{2}} = -\alpha_1 V^{\eta_1}$$

式中,$\alpha_1 = 2^{\frac{r+1}{2}}\min\limits_i(\varphi_i)>0$,$\eta_1 = \dfrac{r+1}{2}<1$。

根据引理 2,如果 $\|\boldsymbol{S}\|\neq 0$,则系统状态将在有限时间

$$t_r = \frac{V^{1-\eta_1}(0)}{\alpha_1(1-\eta_1)} \tag{29}$$

内到达 Terminal 滑模面 $\boldsymbol{S}=0$,实现了滑模运动。

3 数值算例

考虑如下不确定奇异系统

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&-1&0&1\\-1&1&0&0\\-2&1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}(t)+$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{X}) \tag{30}$$

式中,$\|\boldsymbol{f}(t,X)\|\leqslant 0.5x_3^2\mathrm{e}^{-t}$。

容易验证,定理 1 的条件成立。取

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

则式(30)的受限等价形式为

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_1+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_2$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\dot{\boldsymbol{X}}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_1+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_2+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}_2$$

根据定理 1 和定理 2 进行综合设计,取 Terminal 滑动模为

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_1+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_2+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\int\boldsymbol{X}_1^{3/5}+\boldsymbol{\xi}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_1-\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_2-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_1^{3/5}$$

控制律取为

$$\boldsymbol{u}=-\left[\begin{pmatrix}4&1\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_1+\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}_2+\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}\boldsymbol{S}^{3/5}+\right.$$

$$\left.0.01\boldsymbol{S}+0.2x_3^2\mathrm{e}^{-t}\|\boldsymbol{Q}\|\operatorname{sgn}\boldsymbol{S}\right]$$

则系统状态在有限时间 t 内收敛到零点。

$$t=\frac{5}{2}x(0)^{2/5}+\frac{V^{0.2}(0)}{0.2\times 2^{0.8}}$$

式中,$x(0)=\max\{x_1(0),x_2(0),x_3(0),x_4(0)\}$,$V(0)=\frac{1}{2}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{S}(0)$均为由系统的初始状态确定的量。

4　结束语

本文通过非奇异线性变换把一类不确定奇异系统变换为受限等价形式,把 Terminal 滑模变结构控制的方法引入到了不确定奇异系统镇定问题的研究之中,提出了一种特殊的 Terminal 滑模超曲面,并设计了相应的 Terminal 滑模变结构控制器,使滑模面外的系统状态在有限时间内到达滑动模超曲面,在滑模超曲面上,系统的状态在有限时间内收敛到零点,整个设计简单有效。进而,鉴于 Terminal 变结构控制的方法具有独到的优点,它对于状态矩阵含不确定项和状态矩阵为有界的时变函数矩阵的更复杂的不确定奇异系统的研究,必定具有更为重要的实际意义和理论价值。

参考文献:

[1] 杨冬梅,张庆灵,姚波. 广义系统[M]. 北京:科学出版社,2004.

[2] 高志伟,王先来,李光泉. 前馈广义分散控制系统的真镇定[J]. 自动化学报,1998,24(6):754 - 760.

[3] 高志伟,王先来,李光泉. 真镇定广义系统分散正常动态补偿器的设计[J]. 系统工程理论与实践,1999,19(1):1 - 8.

[4] 高志伟. 广义系统降阶正常观测—控制器与双互质分解[J]. 自动化学报, 2000,26(1):24 - 31.

[5] 刘永清,温香彩. 广义系统的变结构控制[M]. 广州:华南理工大学出版社,1997.

[6] 梁家荣. 滞后广义系统的变结构控制[J]. 系统工程与电子技术,2001,23(12):65 - 67.(Liang Jiarong. Variable structure control for singular system with time-delay[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2001, 23(12):65-67.)

[7] 岳东,刘永清. 广义系统滑动模控制的研究[J]. 控制与决策,1997,12(1):58 - 63.

[8] Man Z H, Paplinski A P, Wu H R. A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*,1994, 39(12):2464 - 2469.

[9] Yu S H, Yu X H, Man Z H. Robust global terminal sliding mode control of SISO nonlinear uncertain systems[C]// *Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*,2000:2198 - 2203.

[10] Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. *Automatica*, 2005,41(10):1957 - 1964.

[11] Feng Y, Sun L X, Yu X H. Finite-time synchronization of chaotic systems with unmatched uncertainties[C]// *The 30th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*,2004:2911 - 2916.

[12] Liu J K, Sun F C. A novel dynamic terminal sliding mode control of uncertain nonlinear systems [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2007,5(2):189 - 193.

[13] Hong Y G, Yang G W, Cheng D Z, et al. Finite time convergent control using terminal sliding mode[J]. *Journal of Control Theory and Applications*,2004,2(1):69 - 74.

[14] Yu S H, Ma Z, Yang X H. Nonsmooth finite-time control of uncertain second-order nonlinear systems[J]. *Journal of Control Theory and Applications*,2007,5(2):171 - 176.

[15] Yu X H, Xu J X, Hong Y G, et al. Analysis of discrete-time systems with power rule[J]. *Automatica*,2007,43(1):562 - 566.

[16] Zheng X M, Zhao L, Feng Y, et al. TSM control of delayed input system[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2007,14(6):783 - 792.

[17] Guo Y S, Chen L. Terminal sliding mode control for coordinated motion of a space rigid manipulator with external disturbance[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008,29(5):583 - 590.

[18] 鲍晟,冯勇,郑雪梅. 非匹配不确定 MIMO 线性系统的终端滑模控制[J]. 控制与决策,2003,18(5):531 - 534.

[19] 王艳敏,冯勇,韩向伟. 不确定多变量系统的高阶滑模控制[J]. 控制与决策,2008,23(4):455 - 459.