

文章编号: 0258-1825(2012)02-0137-08

受宽带噪声激励的二元机翼随机振动系统的 矩 Lyapunov 指数

黄勇, 刘先斌

(南京航空航天大学 机械结构力学及控制国家重点实验室, 江苏 南京 210016)

摘要:通过计算受宽带噪声激励的二元机翼随机振动系统的矩 Lyapunov 指数,研究了系统的矩稳定和概率 1 稳定。首先在经典二元机翼颤振方程中加入随机激励,通过随机平均法、Girsanov 定理和 Feynmann-Kac 公式得到关于矩 Lyapunov 指数的特征值问题。其次采用 Fourier 余弦级数对特征函数进行正交展开,得到系统矩 Lyapunov 指数的近似解析式。最后,通过 Monte Carlo 仿真验证了矩 Lyapunov 指数近似解析式的可信性,并讨论了系统参数、来流平均速度以及随机噪声谱密度对机翼稳定性的影响。

关键词:矩 Lyapunov 指数;机翼颤振;随机平均法;宽带实噪声

中图分类号:O324 文献标识码:A

0 引言

在所有气动弹性问题中,颤振问题无疑是在科学和工程上最受关注的问题之一^[1]。这不仅仅是由于这种气动弹性稳定性问题具有重大的实际意义和应用价值,而且还由于它具有深刻的数学物理内涵。一直以来,人们对在随机气流激励下的飞行器颤振行为十分关注,这是因为飞行器颤振是由结构非线性和气动非线性相耦合而导致的复杂的非线性动力学行为,随机激励(尤其是参数激励)的介入会导致随机失稳和随机分岔等复杂的随机动力学行为。

对于确定性机翼颤振,国内外学者已进行了大量的研究。而对于机翼随机颤振的研究由于其动力学行为的复杂性,目前的研究成果还十分有限。近年来,随着非线性随机振动理论不断发展,基于 FPK 方程的半解析概率方法正在越来越多地被人们用来处理随机颤振问题。较为著名的有 Ibrahim 等人^[2-3]的工作,通过将面内载荷和气压分量设为不相关的、零均值宽带随机过程,他们使用 FPK 方程方法和累积量截断方法,研究了超声速气流中的壁板受面内随机激励的颤振机理。D. Poirel 和 S. J. Price^[4-5]研究了考虑气动弹性和湍流随机扰动的随机颤振,得到的

结果从概率统计的角度能更好地解释机翼颤振的机理。然而工程应用中人们还常常会关心系统响应的一、二阶统计矩稳定性,这从随机颤振的早期研究内容可以得到证实。

矩 Lyapunov 指数对于随机分岔研究的意义在于,最大 Lyapunov 指数只是矩 Lyapunov 指数关于 p 的一阶项的系数,因此根据系统的矩 Lyapunov 指数同样可以得到 D-分岔点^[6]以确定系统的概率 1 稳定的边界。此外,针对某些系统,矩 Lyapunov 指数还可以确定其 P-分岔点。因此相较于系统的最大 Lyapunov 指数,矩 Lyapunov 指数具有更重要的动力学意义,但是有关系统矩 Lyapunov 指数的计算却比最大 Lyapunov 指数的计算困难得多。

矩 Lyapunov 指数是随机动力系统研究的重要部分,其定义如下:

$$\Lambda(p, x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \lg E[\|x(t, x_0)\|^p]$$

这里 $x(t, x_0)$ 是随机动力系统的解, $E[\cdot]$ 表示数学期望, $\|x(t, x_0)\|$ 表示向量范数。如果 $\Lambda(p, x_0) < 0$, 那么由定义可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $E[\|x(t, x_0)\|^p] \rightarrow 0$, 说明系统是 p 阶矩稳定的。矩 Lyapunov 指数的概念是由 Arnold^[7] 在研究线性随机动力系统时提出的, 并且得到在一定条件下, 上式极限存在, 是与 x_0 独

* 收稿日期:2010-10-25; 修订日期:2011-03-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11072107,91016022);高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20093218110003)

作者简介:黄勇(1984-),男,江苏海门人,博士研究生,研究方向:非线性随机动力学. E-mail: huangyong@nuaa.edu.cn

立的关于 p 的凸解析函数,因此矩 Lyapunov 指数可以表示为 $\Lambda(p)$, $\Lambda(p)/p$ 是递增的,且:

$$\lambda = \frac{d}{dp} \Lambda(p) \Big|_{p=0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \lg \|x(t, x_0)\|, p \in R$$

是最大 Lyapunov 指数。而 $\Lambda(p)=0$ 的一个非零解 δ_p 称为矩 Lyapunov 指数的稳定性指标。之后,Arnold 在文献[7]中分别获得了实噪声和白噪声激励下线性随机系统的完整结果。Kozin and Sugimoto^[8]研究了线性 Itô 微分方程非平凡解的矩稳定性和几乎肯定稳定性的联系,得到了在参数空间中几乎肯定稳定区域是 p 阶矩稳定区域在 $p \rightarrow 0$ 时的极限。

尽管矩 Lyapunov 指数在研究随机动力系统的稳定性中是非常重要的,但在实际情况下,研究起来很困难,关于它的研究结果也很有限,而且大部分的研究结果都是基于渐近的分析方法,如随机平均法、摄动方法等获得的。对在白噪声和实噪声激励下的两维和四维系统,Arnold 等^[9]和 Namachchivaya^[10]等获得了矩 Lyapunov 指数关于小噪声和小 p 的渐近展开,Khasminskii 和 Moshchuk^[11]研究了白噪声激励下,系统矩阵有两个纯虚特征值的二维系统,对有限的 p 值,证明了 p 阶矩 Lyapunov 指数能展开为小噪声强度的级数。对实噪声激励下的四维系统,应用 Arnold 在文献[7]介绍的扰动展开方法,Sri Namachchivaya 和 Roessel^[12]获得了矩 Lyapunov 指数关于小扰动参数的展开。Xie^[13]应用与 Khasminskii^[11]类似的方法获得了二维系统在实噪声和有界噪声激励下矩 Lyapunov 指数、Lyapunov 指数和稳定性指标关于小扰动参数的渐近展开。刘先斌^[14]等讨论了受实噪声参数激励的 Van der Pol-Duffing 振子的有限 p 阶矩 Lyapunov 指数。在他们的工作中,实噪声激励被取为一个定义于有界闭区域上的 n 维 Ornstein-Uhlenbeck 过程的光滑非线性函数,并最终计算了 p 阶矩 Lyapunov 指数的渐近展式。

本文主要研究了随机宽带噪声作用下,机翼颤振系统的矩 Lyapunov 指数及其相应的稳定性指标,推导出系统矩 Lyapunov 指数的近似解析解,并讨论了所有系统参数对系统矩 Lyapunov 指数的影响。

1 运动方程

二元机翼具有两个自由度,其广义坐标通常选取为上下平移 h 及俯仰角 θ (如图 1 所示)。在考虑定常气动力作用时,具有粘性阻尼及立方俯仰刚度的颤振系统的无量纲运动方程为(详细推导过程参见文献

[15-16]):

$$\begin{aligned} \ddot{h} + x_\theta \ddot{\theta} + c_h \dot{h} + (\bar{\omega})^2 h &= -2(u^2/\mu)\theta \\ x_\theta \dot{h} + r_\theta^2 \ddot{\theta} + c_\theta \dot{\theta} + r_\theta^2 \theta + k_3 \theta^3 &= du^2 \theta \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2}$, ρ 为空气密度, m 为机翼质量, b 为半弦长, $d = \frac{2a+1}{\mu}$, a 为弹性轴 E 在半弦点后的距离, $x_\theta b$ 是重心 G 在弹性轴 E 后的距离, $r_\theta b$ 是机翼对弹性轴的回转半径, c_h 、 c_θ 分别为无量纲俯仰和扭转阻尼系数, k_3 是无量纲非线性扭转弹簧刚度, $\bar{\omega} = \omega_h/\omega_0$, ω_h 、 ω_0 为只有线性平移刚度或线性俯仰刚度的单自由度系统的固有频率, $u = V/b\omega_0$, V 为平均风速。

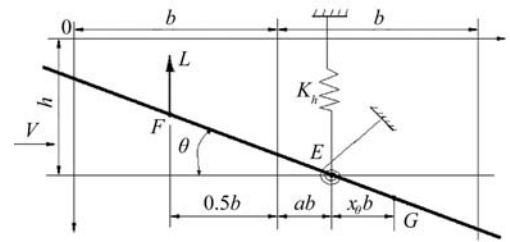


图 1 二元机翼模型

Fig. 1 Sketch of the two-dimensional airfoil

本文研究在参激宽带噪声作用下非线性系统的矩 Lyapunov 指数,而对于此非线性系统,本质上我们更关心界定系统概率 1 稳定边界的最大 Lyapunov 指数。根据 Oseledec 乘法遍历定理^[7]可知,一个非线性系统的最大 Lyapunov 指数与其在平衡点邻域中的线性化系统的最大 Lyapunov 指数完全一致,因此在本文中,我们只研究这个非线性系统在其平衡点邻域内的线性化系统的矩 Lyapunov 指数。同时,在系统无量纲速度 u 中加入宽带噪声 $\xi(t)$,并假设系统的阻尼项 ϵ^2 阶小量、随机项均为 ϵ 阶小量。

$$\begin{aligned} \ddot{h} + x_\theta \ddot{\theta} + \epsilon^2 c_h \dot{h} + (\bar{\omega})^2 h + (2(u^2 + 2\epsilon u \xi(t))/\mu)\theta &= 0 \\ x_\theta \dot{h} + r_\theta^2 \ddot{\theta} + \epsilon^2 c_\theta \dot{\theta} + r_\theta^2 \theta - d(u^2 + 2\epsilon u \xi(t))\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

由于 $(\epsilon \xi(t))^2$ 为更高阶小量,对系统基本没有影响,所以上式中未包含此项。通过进一步变换可以得到以下运动方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{A} \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} = -\epsilon^2 \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - \epsilon 2u \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} \xi(t) \quad (3)$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\omega}^2 r_\theta^2}{r_\theta} & \frac{-\mu x_\theta r_\theta^2 + u^2 (2r_\theta^2 + \mu x_\theta d)}{\mu r_\theta} \\ -\frac{\bar{\omega}^2 x_\theta}{r_\theta} & \frac{\mu r_\theta^2 - u^2 (2x_\theta + \mu d)}{\mu r_\theta} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \frac{r_\theta^2 c_h}{r_0} & -\frac{x_\theta c_\theta}{r_0} \\ -\frac{x_\theta c_h}{r_0} & \frac{c_\theta}{r_0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2r_\theta^2}{r_0\mu} + \frac{x_\theta d}{r_0} \\ 0 & -\frac{2x_\theta}{r_0\mu} - \frac{d}{r_0} \end{pmatrix},$$

$$r_0 = r_\theta^2 - x_\theta^2 \quad (4)$$

下面令系统阻尼和噪声均为零,得到以下派生系统

$$\begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{A} \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

由式(5)解出系统固有频率为

$$\omega_{1,2}^2 = \left[\frac{\mu r_\theta^2 (\bar{\omega}^2 + 1) - u^2 (2x_\theta + \mu d)}{2\mu r_0} \right] \pm \left[\left(\frac{\mu r_\theta^2 (\bar{\omega}^2 - 1) + u^2 (2x_\theta + \mu d)}{2\mu r_0} \right)^2 + \frac{\mu \bar{\omega}^2 x_\theta^2 r_\theta^2 - u^2 \bar{\omega}^2 x_\theta (2r_\theta^2 + \mu x_\theta d)}{\mu r_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

引进变换:

$$\begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} r_0 \omega_2^2 - \bar{\omega}^2 r_\theta^2 & r_0 \omega_1^2 - \bar{\omega}^2 r_\theta^2 \\ \bar{\omega}^2 x_\theta & \bar{\omega}^2 x_\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

代入式(3),系统化成

$$\mathbf{T}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{q} = -\epsilon^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} - \epsilon^2 u^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{T}\mathbf{q} - \epsilon^2 \mathbf{A}_3 (\mathbf{T}\mathbf{q})^3 - \epsilon^2 u \mathbf{A}_2 \mathbf{T}\mathbf{q}\xi(t) \quad (8)$$

代入各系数矩阵可得:

$$\ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \epsilon^2 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \epsilon \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \mathbf{q}\xi(t) = 0 \quad (9)$$

其中:

$$a_1 = \frac{-\omega_1^2 (\omega_2^2 r_0 - \bar{\omega}^2 r_\theta^2)}{\bar{\omega}^2 r_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} c_h + \frac{\omega_1^2 - \bar{\omega}^2}{r_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} c_\theta,$$

$$a_2 = \frac{-\omega_1^2 (\omega_1^2 r_0 - \bar{\omega}^2 r_\theta^2)}{\bar{\omega}^2 r_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} c_h + \frac{\omega_1^2 - \bar{\omega}^2}{r_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} c_\theta,$$

$$a_3 = \frac{\omega_2^2 (\omega_2^2 r_0 - \bar{\omega}^2 r_\theta^2)}{\bar{\omega}^2 r_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} c_h - \frac{\omega_2^2 - \bar{\omega}^2}{r_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} c_\theta,$$

$$a_4 = \frac{\omega_2^2 (\omega_1^2 r_0 - \bar{\omega}^2 r_\theta^2)}{\bar{\omega}^2 r_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} c_h - \frac{\omega_2^2 - \bar{\omega}^2}{r_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} c_\theta,$$

$$b_1 = b_2 = \frac{2u\bar{\omega}^2 d\mu - 2u\omega_1^2 (2x_\theta + d\mu)}{r_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \mu},$$

$$b_3 = b_4 = \frac{2u\bar{\omega}^2 d\mu - 2u\omega_2^2 (2x_\theta + d\mu)}{r_0 (\omega_1^2 - \omega_2^2) \mu} \quad (10)$$

2 近似 Markov 过程

由于系统阻尼、噪声的 sin 和 cos 谱密度均为 ϵ^2 阶无穷小量且 $\xi(t)$ 为宽带噪声,因此可以对(9)式采用随机平均法得到系统的近似 Itô 随机微分方程。给出噪声 $\xi(t)$ 的 sin 和 cos 功率谱密度分别为

$$S(\omega) = 2 \int_0^\infty E[\xi(t)\xi(t+\tau)] \cos \omega \tau d\tau,$$

$$\Psi(\omega) = 2 \int_0^\infty E[\xi(t)\xi(t+\tau)] \sin \omega \tau d\tau \quad (11)$$

$E[\cdot]$ 为期望算子。

通过引入如下变换:

$$q_i = h_i \cos \theta_i, \quad \dot{q}_i = -h_i \omega_i \sin \theta_i,$$

$$\theta_i = \omega_i t + \vartheta_i, \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

代入(9)式,即可得到关于 $h_1, \varphi_1, h_2, \varphi_2$ 的四个一阶微分方程:

$$\dot{h}_1 = -\epsilon^2 (a_1 \sin^2 \theta_1 h_1 + a_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} h_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \frac{\epsilon}{\omega_1} (\frac{1}{2} b_1 h_1 \sin 2\theta_1 + b_2 h_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2) \xi(t),$$

$$\dot{\vartheta}_1 = -\epsilon^2 (\frac{1}{2} a_1 \sin 2\theta_1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{h_2}{h_1} a_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2) + \frac{\epsilon}{\omega_1} (b_1 \cos^2 \theta_1 + \frac{h_2}{h_1} b_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) \xi(t),$$

$$\dot{h}_2 = -\epsilon^2 (\frac{\omega_1}{\omega_2} a_3 h_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + a_4 h_2 \sin^2 \theta_2) + \frac{\epsilon}{\omega_2} (b_3 h_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} b_4 h_2 \sin 2\theta_2) \xi(t),$$

$$\dot{\vartheta}_2 = -\epsilon^2 (\frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{h_1}{h_2} a_3 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} a_4 \sin^2 \theta_2) + \frac{\epsilon}{\omega_2} (\frac{h_1}{h_2} b_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + b_4 \cos^2 \theta_2) \xi(t) \quad (13)$$

通过假设系统的固有频率 ω_1, ω_2 相差比较大,可以得到经过随机平均之后的振幅 $h_i(t)$ 和相位角 $\vartheta_i(t)$ 是解耦的。同时随着 ϵ 的减小,系统(13)的解耦收敛,并近似为一个扩散的 Markov 过程。下面对系统方程(13)采用随机平均法,得到 Itô 控制方程:

$$dh_i = m_i dt + \sigma_i dW_h,$$

$$d\vartheta_i = n_i dt + \mu_i dW_\vartheta, \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

其中, W_h 和 W_ϑ 为两个相互独立的 Wiener 过程。此处采用随机平均法的主要目的就是让平均振幅过程 $h_i(t)$ 和相位角过程 $\varphi_i(t)$ 解耦,从而对于系统方程(13)的研究就可以转化为对平均振幅 $h_i(t)$ 的研究,这样可以显著降低系统维数,减小问题的求解难度。

因此,下面只需给出系统(14)中第一个随机微分方程的系数表达式即可:

$$\begin{aligned} m_1 &= \left[-\frac{1}{2}a_1 + \frac{3b_1^2}{16\omega_1^2}S(2\omega_1) + \frac{b_2b_3}{8\omega_1\omega_2}S^- \right] h_1 + \frac{b_2^2 S^+}{16\omega_1^2} \frac{h_2^2}{h_1} \\ m_2 &= \left[-\frac{1}{2}a_1 + \frac{3b_1^2}{16\omega_1^2}S(2\omega_1) + \frac{b_2b_3}{8\omega_1\omega_2}S^- \right] h_2 + \frac{b_3^2 S^+}{16\omega_2^2} \frac{h_1^2}{h_2} \\ (\sigma\sigma^T)_{11} &= \frac{b_1^2 h_1^2}{8\omega_1^2} S(2\omega_1) + \frac{b_2^2 h_2^2}{8\omega_1^2} S^+ \\ (\sigma\sigma^T)_{22} &= \frac{b_1^2 h_2^2}{8\omega_2^2} S(2\omega_2) + \frac{b_3^2 h_1^2}{8\omega_2^2} S^+ \\ (\sigma\sigma^T)_{12} &= (\sigma\sigma^T)_{21} = \frac{b_2b_3}{8\omega_1\omega_2} h_1 h_2 S^- \\ S^\pm &= S(\omega_1 + \omega_2) \pm S(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (15)$$

3 矩 Lyapunov 指数

为了进一步得到系统的矩 Lyapunov 指数,下面对 Itô 控制方程(14)中的振幅方程 $h_i(t)$ 进行极坐标变换。

令: $h_1 = r\cos\varphi, h_2 = r\sin\varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 由 Itô 微分公式可以得到关于变量 r, φ 的 Itô 随机微分方程:

$$\begin{cases} dr = \bar{m}_1(\varphi)rdt + \bar{\sigma}_1(\varphi)rdW \\ d\varphi = \bar{m}_2(\varphi)rdt + \bar{\sigma}_2(\varphi)rdW \end{cases} \quad (16)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{m}_1(\varphi)r &= m_i \frac{\partial r}{\partial h_i} + \frac{1}{2}(\sigma\sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2 r}{\partial h_i \partial h_j} \\ \bar{m}_2(\varphi) &= m_i \frac{\partial \varphi}{\partial h_i} + \frac{1}{2}(\sigma\sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial h_i \partial h_j} \\ \bar{\sigma}_1(\varphi)r &= \sigma_i \frac{\partial r}{\partial h_i} \\ \bar{\sigma}_2(\varphi) &= \sigma_i \frac{\partial \varphi}{\partial h_i} \end{aligned} \quad (17)$$

由矩 Lyapunov 指数的定义可知:

$$\Lambda(p; q_0) = \Lambda(p; r_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E[r^p] \quad (18)$$

同时,式(16)中第一个微分方程的解 $r(t; r_0)$ 的 p 次幂为:

$$\begin{aligned} r^p(t; r_0) &= r_0^p \exp \left[p \int_0^t \bar{m}_1(\varphi(s)) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2(\varphi(s)) ds + p \int_0^t \bar{\sigma}_1(\varphi(s)) dW(s) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

上式的期望为:

$$\begin{aligned} E[r^p(t; r_0)] &= r_0^p E \left\{ \exp \left[Z(t) + p \int_0^t \bar{m}_1(\varphi(s)) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2(\varphi(s)) ds + \frac{p^2}{2} \int_0^t \bar{\sigma}_1^2(\varphi(s)) ds \right] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

其中:

$$Z(t) = p \int_0^t \bar{\sigma}_1(\varphi(s)) dW(s) - \frac{p^2}{2} \int_0^t \bar{\sigma}_1^2(\varphi(s)) ds \quad (21)$$

根据 Girsanov 定理,由式(20)可以得到:

$$\begin{aligned} E[r^p(t; r_0)] &= r_0^p E \left\{ \exp \left[p \int_0^t \bar{m}_1(\zeta(s)) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2(\zeta(s)) ds + \frac{p^2}{2} \int_0^t \bar{\sigma}_1^2(\zeta(s)) ds \right] \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

其中:

$$d\zeta = [\bar{m}_2(\zeta) + p\bar{\sigma}_1(\zeta)\bar{\sigma}_2(\zeta)]dt + \bar{\sigma}_2(\zeta)dW \quad (23)$$

通过 Feynmann-Kac 公式将随机微分方程(16)的解的函数的期望 $E[r^p(t)] = f(\zeta, p, t)$ 转化为下列线性偏微分方程的解:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - [\bar{m}_2(\varphi) + p\bar{\sigma}_1(\varphi)\bar{\sigma}_2(\varphi)] \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_2^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - p \left[\bar{m}_1(\varphi) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2(\varphi) \right] - \frac{p^2}{2} \bar{\sigma}_1^2(\varphi) \right\} f = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

根据 Arnold^[17]可知,矩 Lyapunov 指数就是稳定算子的最大特征值,即:

$$L(p)T(\varphi) = \Lambda(p)T(\varphi) \quad (25)$$

其中,稳定性算子为:

$$\begin{aligned} L(p) &= [\bar{m}_2(\varphi) + p\bar{\sigma}_1(\varphi)\bar{\sigma}_2(\varphi)] \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_2^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + p \left[\bar{m}_1(\varphi) - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_1^2(\varphi) \right] + \frac{p^2}{2} \bar{\sigma}_1^2(\varphi) \end{aligned} \quad (26)$$

根据 Wedig^[17]和 Bolotin^[18], $T(\varphi)$ 能展开为正交 Fourier 余弦级数:

$$T(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \cos(2n\varphi) \quad (27)$$

将式(27)代入式(25)并在两边同乘 $\cos(2m\varphi)$ 以后,对 φ 积分得到:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} z_n = \Lambda(p) z_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

其中:

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \cos(2n\varphi) \cos(2m\varphi) d\varphi, \\ m, n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (29)$$

由上述元素构成的矩阵为:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (30)$$

若令 $\mathbf{Z} = [z_0 \quad z_1 \quad z_2 \quad z_3 \cdots z_n \cdots]^T$, 则式(28)即可转化为:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{Z} = 0, \quad \mathbf{I} \text{ 为单位阵} \quad (31)$$

如果方程(31)关于 \mathbf{Z} 存在非零解,那么它的系数行列式 $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ 应该等于0。因此,求 $\Lambda(p)$ 就转化为求矩阵 $\mathbf{A}=(a_{nm})$ 的无穷个子矩阵的特征值,这样得到了一个特征值的无穷序列,它的每一个元素都是 $\Lambda(p)$ 的近似值。因此当 $n \rightarrow \infty$ 时,通过这种方法求出的近似特征值序列应该收敛于 $\Lambda(p)$ 的近似值的真实值,否则,就是不正确的。然而随着 n 的增加,计算量呈指数型增长,为此,我们用截断的方法,即取 n 为有限数,来获取 $\Lambda(p)$ 的近似值。例如,当 $n=0$ 时,得到 $\Lambda(p)=a_{00}$ 。当 $n=1$ 时, $\Lambda(p)$ 的近似值是 \mathbf{A} 的二阶子矩阵的特征值。当 $n=2$ 时, $\Lambda(p)$ 的近似值是 \mathbf{A} 的三阶子矩阵的特征值。由于矩阵 \mathbf{A} 中元素的复杂性,我们仅仅列出 \mathbf{A} 的三阶子矩阵中的元素的表达式。

$$a_{00} = \frac{1}{8} p(8m_{11} + 8m_{12} + 8m_{21} + 8m_{22} - 2c_1 + 2c_2 - 2c_3 + 2c_4 - 4c_5) + \frac{1}{8} p^2(3c_1 + c_2 + 3c_3 + c_4 + 2c_5)$$

$$a_{01} = (m_{11} + 3m_{12} - m_{21} - 3m_{22} - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 - \frac{1}{2}c_4) + p(m_{11} + m_{12} + m_{21} + m_{22} + \frac{1}{4}c_1 + \frac{3}{4}c_2 - \frac{3}{4}c_3 - \frac{1}{4}c_4 - \frac{1}{2}c_5) + p^2(\frac{3}{8}c_1 + \frac{1}{8}c_2 + \frac{3}{8}c_3 + \frac{1}{8}c_4 + \frac{1}{4}c_5)$$

$$a_{02} = (-8m_{12} - 8m_{22} + \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 - \frac{1}{2}c_4 - c_5) + p(m_{11} + m_{12} + m_{21} + m_{22} + \frac{1}{4}c_1 - \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{4}c_3 - \frac{1}{4}c_4 - \frac{3}{2}c_5) + p^2(\frac{3}{8}c_1 + \frac{1}{8}c_2 + \frac{3}{8}c_3 + \frac{1}{8}c_4 + \frac{1}{4}c_5)$$

$$a_{10} = \frac{1}{4} p(2m_{11} - 2m_{12} - 2m_{21} + 2m_{22} - c_1 - c_2 + c_3 + c_4) + \frac{1}{4} p^2(c_1 - c_3)$$

$$a_{11} = (-2m_{12} - 2m_{22} - \frac{1}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2 - \frac{1}{4}c_3 - \frac{3}{4}c_4 + \frac{1}{2}c_5) + p(\frac{1}{2}m_{11} - \frac{1}{2}m_{12} - \frac{1}{2}m_{21} + \frac{1}{2}m_{22} - \frac{1}{8}c_1 - \frac{3}{8}c_2 + \frac{3}{8}c_3 + \frac{1}{8}c_4 -$$

$$\frac{1}{4}c_5) - \frac{1}{4} p^2(c_1 + c_3)$$

$$a_{12} = (m_{11} + 7m_{12} - m_{21} - 7m_{22} - \frac{1}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 - \frac{3}{2}c_4) + p(-\frac{1}{2}m_{21} + \frac{1}{2}m_{11} - c_1 - c_3 + c_4 + \frac{1}{2}m_{22} - \frac{1}{2}m_{12} + \frac{1}{2}c_2) + \frac{1}{4} p^2(c_1 - c_3)$$

$$a_{20} = \frac{1}{16} p(-2c_1 + 2c_4 + 2c_2 + 4c_5 - 2c_3) + \frac{1}{16} p^2(c_1 - c_2 + c_3 - c_4 - 2c_5)$$

$$a_{21} = (\frac{1}{4}c_1 + \frac{3}{4}c_2 - \frac{1}{4}c_3 - \frac{3}{4}c_4 - \frac{1}{2}m_{11} + \frac{1}{2}m_{12} + \frac{1}{2}m_{21} - \frac{1}{2}m_{22}) + p(-\frac{3}{8}c_1 - \frac{1}{8}c_2 + \frac{1}{8}c_3 + \frac{3}{8}c_4 + \frac{1}{4}c_5) + \frac{1}{16} p^2(c_1 - c_2 + c_3 - c_4 - 2c_5)$$

$$a_{22} = (-4m_{12} - 4m_{22} - c_1 - 3c_2 - c_3 - 3c_4 + 2c_5) + \frac{1}{8} p(-c_1 + c_2 - c_3 + c_4 + 2c_5) + \frac{1}{16} p^2(c_1 - c_2 + c_3 - c_4 - 2c_5) \quad (32)$$

其中,

$$m_{11} = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{3b_1^2}{16\omega_1^2} S(2\omega_1) + \frac{b_2 b_3}{8\omega_1 \omega_2} S^-,$$

$$m_{21} = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{3b_1^2}{16\omega_2^2} S(2\omega_2) + \frac{b_2 b_3}{8\omega_1 \omega_2} S^-,$$

$$m_{12} = \frac{b_2^2}{16\omega_1^2} S^+, \quad m_{22} = \frac{b_3^2}{16\omega_2^2} S^+,$$

$$c_1 = \frac{b_1^2}{8\omega_1^2} S(2\omega_1), \quad c_2 = \frac{b_2^2}{8\omega_1^2} S^+,$$

$$c_3 = \frac{b_1^2}{8\omega_2^2} S(2\omega_2), \quad c_4 = \frac{b_3^2}{8\omega_2^2} S^+,$$

$$c_5 = \frac{b_2 b_3}{8\omega_1 \omega_2} S^- \quad (33)$$

4 数值验证

下面我们将通过对系统(9)采用 Monte Carlo 仿真,得到系统矩 Lyapunov 指数的数值解^[19],来验证近似解析解得可靠性。令 $x_1 = q_1, x_2 = q_1', x_3 = q_2, x_4 = q_2'$,系统(9)可化为:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}dt + \mathbf{B}\mathbf{X} \circ d\mathbf{W} \quad (34)$$

其中:

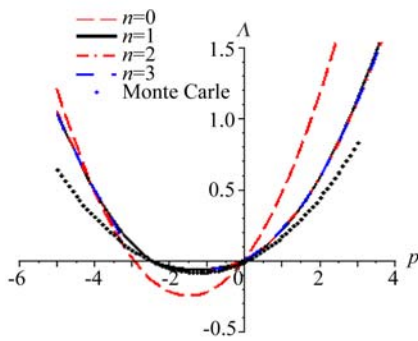
$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -\epsilon^2 a_1 & 0 & -\epsilon^2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\epsilon^2 a_3 & -\omega_2^2 & -\epsilon^2 a_4 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon b_1 & 0 & -\epsilon b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon b_3 & 0 & -\epsilon b_4 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{35}$$

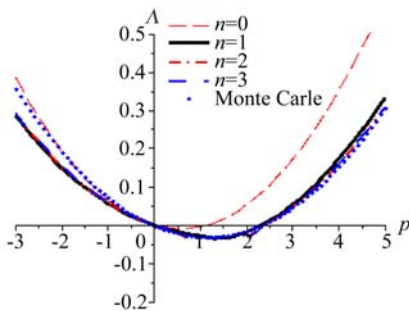
由于此处扩散矩阵的特殊性, Wong-Zakai 修正项为零, 所以 Stratonovich 方程的漂移项和 Itô 方程的漂移项是一致的。因此 Itô 方程为:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}dt + \mathbf{B}\mathbf{X}dW \tag{36}$$

对 Itô 方程(36)直接采用 Monte Carlo 仿真即可得系统(9)矩 Lyapunov 指数的数值解。根据方程(31), 分别取矩阵 \mathbf{A} 的 1~4 阶子矩阵的特征值作为系统矩 Lyapunov 指数 $\Lambda(p)$ 的近似值, 画出相应矩 Lyapunov 指数 $\Lambda(p)$ 关于 p 变化曲线, 如图 2 所示。由图可知, 随着 n 的增大, 矩 Lyapunov 指数 $\Lambda(p)$ 近似值的偏离程度越来越小, 而且当 $n \geq 1$ 时, 得到的矩 Lyapunov 曲线基本重合, 表明用上述方法求出的特



(a) $u=2.2$



(b) $u=1.7$

$x_0=0.25, r_0^2=0.5, c_n=c_0=0.1, \bar{\omega}=0.2, \mu=20, d=0.04,$

$$S(2\omega_1) = S(2\omega_2) = S(\omega_1 + \omega_2) = S(\omega_1 - \omega_2) = 1$$

图 2 矩 Lyapunov 指数近似解析解与数值解比较

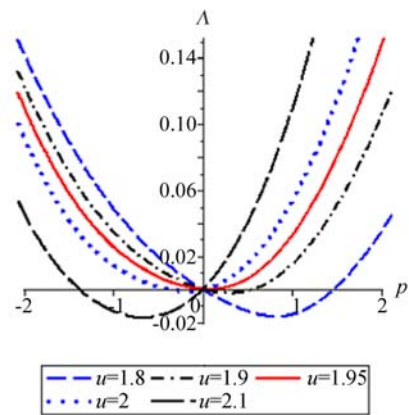
Fig. 2 Comparison of the approximate analytical and numerical results of the moment Lyapunov exponent

征值序列是收敛的, 而且只需求出 $n=3$ 时的特征值作为系统矩 Lyapunov 指数的近似解析解就已足够。同时, 图 2(a) 中当 $-2.5 < p < 0$ 时, 图 2(b) 中当 $0 < p < 2.4$ 时, $\Lambda(p) < 0$, 系统是矩稳定的。图 2(a) 中 $\Lambda'(p)|_{p=0} > 0$, 说明最大 Lyapunov 指数是正的, 显示这种情况下, 系统是几乎肯定不稳定的。而图 2(b) 中 $\Lambda'(p)|_{p=0} < 0$, 说明最大 Lyapunov 指数是负的, 显示这种情况下, 系统是几乎肯定稳定的。最后与系统(9)矩 Lyapunov 指数的 Monte Carlo 数值解进行比较可以得出: Monte Carlo 仿真得到的数值解和本文推导的矩 Lyapunov 指数的近似解析解基本重合, 表明本文所得出的近似解析解是可信的。

5 讨论

下面通过研究矩 Lyapunov 指数与系统各参数之间的关系, 可以得到以下对工程实际具有指导价值的结论。

首先通过调整参数 u , 得到系统矩 Lyapunov 指数曲线随 u 增大不断向左移动, 如图 3 所示, 稳定性指标 δ_p 不断减小, 这将直接影响系统矩稳定的区域; 而随着 u 的增大, 系统的最大 Lyapunov 指数也会由负变正, 说明系统由几乎肯定稳定变为几乎肯定不稳定。根据参数 u 在上文中的表达式可知 u 主要由平均来流速度 V 所决定。也就是说, 随着平均来流速度 V 的增大, 系统的矩稳定性会随之降低; 当 V 达到某临界值时, 系统最大 Lyapunov 指数大于零, 发生概率 1 意义失稳, 出现颤振。这就是从随机的角度刻画了颤振发生的机理, 因此我们可以从这个角度进一步研究系统各参数对随机颤振的影响。



$x_0=0.25, r_0^2=0.5, c_n=c_0=0.1, \bar{\omega}=0.2, \mu=20, d=0.04,$

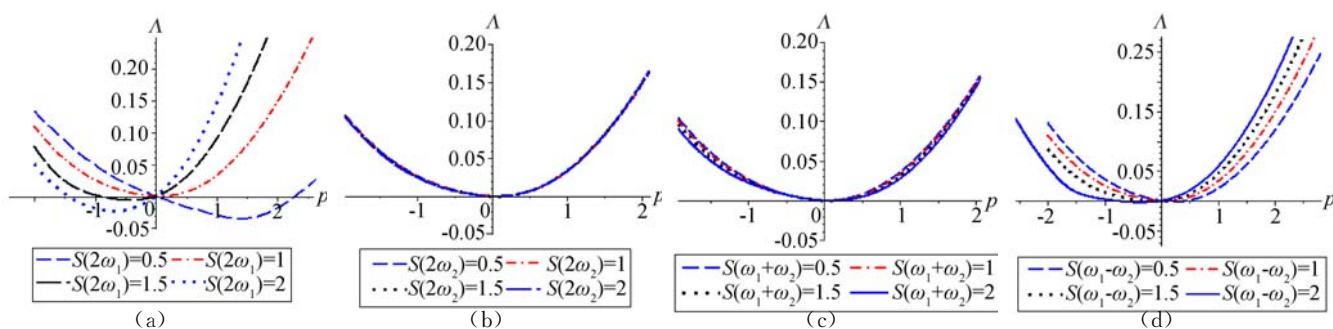
$$S(2\omega_1) = S(2\omega_2) = S(\omega_1 + \omega_2) = S(\omega_1 - \omega_2) = 1$$

图 3 参数 u 对矩 Lyapunov 指数的影响

Fig. 3 Effect of u on the moment Lyapunov exponent

其次,通过调整宽带噪声各频率 cos 谱密度,可以得到系统矩 Lyapunov 指数对随机噪声各频率谱密度的敏感性,如图 4 所示。由图可知,随着噪声 $2\omega_2$ 、 $\omega_1 + \omega_2$ 的 cos 谱密度的增加,系统的矩 Lyapunov 指数曲线均重合在一起,未发生显著变化,如图 4(b、c)所示,说明噪声的 $2\omega_2$ 、 $\omega_1 + \omega_2$ 的 cos 谱密度对系统的矩 Lyapunov 指数没有影响,因此在实际工程中可以不用关注随机噪声中 $2\omega_2$ 、 $\omega_1 + \omega_2$ 的 cos 谱密度的变化。而随着其余两个频率的 cos 谱密度的增加,系统矩 Lyapunov 指数曲线不断向左移动,表明稳定性指标 δ_p 不断减小,系统的矩稳定性区域不断向左移动;系统的最大 Lyapunov 指数也会由负

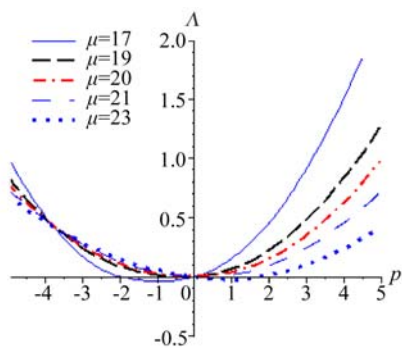
变正,表明系统由几乎肯定稳定变为几乎肯定不稳定。但是,系统对这两个个频率的敏感性是不一样的。由图 4(a、d)可知,系统矩 Lyapunov 指数曲线相对于宽带噪声 $2\omega_1$ 的 cos 谱密度的变化幅度大于相对于宽带噪声 $\omega_1 - \omega_2$ 的 cos 谱密度的变化幅度,说明系统对宽带噪声 $2\omega_1$ 的 cos 谱密度更为敏感。所以,在工程实际中一定要重点监测随机激励 $2\omega_1$ 的 cos 谱密度变化,当然 $\omega_1 - \omega_2$ 的 cos 谱密度的变化也应适当关注。对于随机激励各频率的 sin 功率谱密度,由于在进行随机平均法时,积分全部为零,因此可以不用关注各频率的 sin 功率谱密度的变化。



$x_0 = 0.25, r_0^2 = 0.5, c_h = c_g = 0.1, \bar{\omega} = 0.2, \mu = 20, d = 0.04, S(2\omega_1) = S(2\omega_2) = S(\omega_1 + \omega_2) = S(\omega_1 - \omega_2) = 1$

图 4 噪声对矩 Lyapunov 指数的影响

Fig. 4 Effect of the noise on the moment Lyapunov exponent



$x_0 = 0.25, r_0^2 = 0.5, c_h = c_g = 0.1, \bar{\omega} = 0.2, \mu = 1.95, d = 0.04, S(2\omega_1) = S(2\omega_2) = S(\omega_1 + \omega_2) = S(\omega_1 - \omega_2) = 1$

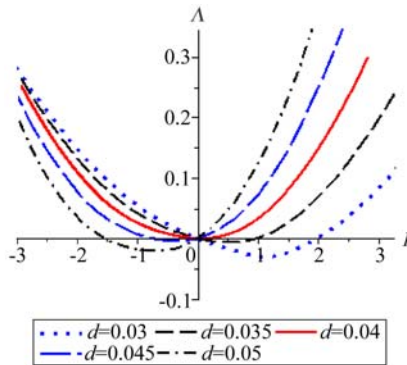
图 5 无量纲质量 μ 对矩 Lyapunov 指数的影响

Fig. 5 Effect of μ on the moment Lyapunov exponent

然后,我们通过适当变动参数 μ ,得到无量纲质量 μ 对系统稳定性的影响。由图 5 可知,随着系统无量纲质量 μ 的增加,系统的稳定性不断增强。但是,在实际工程中,机翼的质量总是有限的,而且尽可能取小,因此会和我们此处的结论产生冲突。此时,我们可以进一步计算无量纲质量的增加或减小对系统临界速度的提高或降低的影响,根据这个影响的大小在适当的范围内确定最优无量纲质量。对最优无量

纲质量的确定,本文不作进一步讨论。

最后,通过对参数 d 分析发现:随着 d 的增大,系统矩 Lyapunov 指数曲线逐渐向左移动,系统的矩稳定性指标 δ_p 不断减小,系统的矩稳定性不断降低,如图 6 所示。而参数 d 主要由弹性轴在半弦点后的距离与半弦长的比值 a 所决定。也就是说,随着弹性轴 E 不断向后移动,系统的矩稳定性不断降低。因此在实际设计中应考虑系统的弹性轴适当靠前。



$x_0 = 0.25, r_0^2 = 0.5, c_h = c_g = 0.1, \bar{\omega} = 0.2, \mu = 20, u = 1.95, S(2\omega_1) = S(2\omega_2) = S(\omega_1 + \omega_2) = S(\omega_1 - \omega_2) = 1$

图 6 参数 d 对矩 Lyapunov 指数的影响

Fig. 6 Effect of d on the moment Lyapunov exponent

7 结 论

本文主要研究了在随机宽带噪声作用下,机翼的矩 Lyapunov 指数的表达式及其相应的随机稳定性问题。通过对矩 Lyapunov 指数的表达式的研究,得出机翼颤振的矩 Lyapunov 稳定性主要由其参数 u 、 μ 、 d 以及随机激励各频率的 \cos 谱密度所决定。进一步研究得到 u 、 μ 、 d 、 $S(2\omega_1)$ 、 $S(\omega_1 - \omega_2)$ 等参数变化对系统矩 Lyapunov 指数的影响。以上结果表明,噪声对非线性系统的稳定性有着重要的影响,建议相关设计部门在进行可靠性分析时,除一般的强度分析以外,还应将噪声纳入考虑的范畴。

参 考 文 献:

- [1] FORSEHING H W, 沈克扬译, 管德校. 气动弹性力学原理[M]. 上海: 上海科技文献出版社, 1982. (FORSEHING HW, SHEN KY, GUAN D. Aeroelasticity theory [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and technological Literature Publishing House, 1982.)
- [2] IBRAHIM R, ORONO P, MADABOOSI S. Stochastic flutter of a panel subjected to random in-plane forces. I- Two mode interaction[J]. *AIAA Journal*, 1990, 28(4): 694-702.
- [3] IBRAHIM R, ORONO P. Stochastic nonlinear flutter of a panel subjected random in-plane forces[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1991, 26(6): 867-883.
- [4] POIREL D, PRICE S J. Random binary(coalescence) flutter of a two-dimensional linear airfoil[J]. *Journal of Fluids Structure*, 2003, 18(1): 23-42.
- [5] POIREL D, PRICE S J. Bifurcation characteristics of a two-dimensional structurally nonlinear airfoil in turbulent flow[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 48: 423-435.
- [6] 朱位秋. 非线性随机振动与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 280-281. (ZHU Wei-qiu. Nonlinear stochastic dynamics and control[M]. Beijing: Science Press, 2003: 280-281.)
- [7] ARNOLD L. Random dynamical systems[M]. Springer, Berlin, 1998.
- [8] KOZIN F, SUGIMOTO S. Relations between sample and moment stability of linear stochastic differential equations. Proceedings of Conference on Stochastic Differential Equations and Applications. Academic Press, New York, 1977: 145-162.
- [9] ARNOLD L, DOYLE M M, NAMACHCHIVAYA N S. Small noise expansion of moment Lyapunov exponents for two-dimensional systems[J]. *Dynamics and Stability of Systems*, 1997, 12(3): 187-211.
- [10] NAMACHCHIVAYA N S, ROESSEL H J V, DOYLE M M. Moment Lyapunov exponent for two coupled oscillators driven by real noise[J]. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1996, 56: 1400-1423.
- [11] KHASHMINSKII R Z, MOSHCHUK N. Moment Lyapunov exponent and stability index for linear conservative system with small random perturbation[J]. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1998, 58(1): 245-256.
- [12] NAMACHCHIVAYA N S, ROESSEL H J V. Moment Lyapunov exponent and stochastic stability of two coupled oscillators driven by real noise[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2001, 68: 903-914.
- [13] XIE W C. Moment Lyapunov exponents of a two-dimensional system under real noise excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239(1): 139-155.
- [14] LIU X B, LIEW K M. On the stability properties of a Van der Pol-Duffing oscillator that is driven by a real noise[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 285(1-2): 27-49.
- [15] ZHAO L C, YANG Z C. Chaotic Motions of an airfoil with non-linear stiffness in incompressible flow [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 138(2): 245-254.
- [16] 刘济科, 赵令诚. 不可压气流中二元机翼的分叉分析[J]. *应用力学学报*, 1992, 9(1): 37-43. (LIU J K, ZHAO L C. Bifurcation analysis of airfoils in incompressible flow[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1992, 9(1): 37-43.)
- [17] WEDIG W. Lyapunov exponent of stochastic systems and related bifurcation problems. in: S. T. Ariaratnam, G. I. Schueller, I. Elishakoff(Eds.), *Stochastic Structural Dynamics: Progress in Theory and Applications*, Elsevier Applied Science, New York, 1988: 315-327.
- [18] BOLOTIN V V. The dynamic stability of elastic system. Holded-Day, San Francisco, 1964.
- [19] XIE W C, HUANG Q H. On the Monte Carlo simulations of moment Lyapunov exponents[J]. *Solid Mechanics and Its Applications*, 2006, 140: 627-636.