

文章编号: 0258-1825(2012)04-0471-06

GMRES 算法在悬停旋翼数值模拟中的应用

罗东明^{1,2}, 陈平剑², 吴希明²

(1. 南京航空航天大学 飞行器先进设计技术国防重点学科实验室, 江苏 南京 210016;

2. 中国直升机设计研究所, 江西 景德镇 333001)

摘要:发展了一种基于广义极小残差(GMRES)算法的悬停旋翼数值模拟方法,并对 GMRES 算法中矩阵与向量乘积的两种计算方法进行了分析和讨论。应用该方法在旋转坐标系中采用非结构混合网格和格点格式有限体积法对以绝对速度为变量的欧拉方程进行了直接求解,其中对流项的离散应用了基于 Roe 的 Riemann 近似解的迎风格式。对 Caradonna-Tung 旋翼跨声速悬停流场进行了数值模拟,计算结果与相关实验数据吻合较好,并与 LU-SGS 方法进行了对比,表明 GMRES 算法可以有效地加速流场的收敛,提高计算效率。

关键词:广义极小残差算法;悬停旋翼;Euler 方程

中图分类号:V211.3 **文献标识码:**A

0 引言

旋翼计算流体力学一直是计算流体力学领域具有挑战性的课题,为使旋翼 CFD 技术能够在工程实际中得到广泛应用,发展一种高效的旋翼计算流体力学分析方法具有重要意义。与固定翼相比,旋翼流场更加复杂。首先,旋翼流场既包含了桨尖的跨声速流动区域,同时又包含了桨根的不可压流动区域,而在用时间推进方法求解低速流场时会遇到所谓“刚性”问题,降低了收敛速度;其次,直升机旋翼每片桨叶拖出的桨尖涡需要较长时间的充分发展,同时,为能准确捕捉尾涡,需要在流场相应区域布置足够密度的网格,这又会引起网格数量的急剧增加。所有这些特点导致数值求解悬停旋翼流场的收敛速度要明显低于固定翼流场的收敛速度。为提高旋翼 CFD 方法的计算效率,迫切需要发展一种高效的时间推进方法。

在旋翼 CFD 领域,时间推进方法经历了由显式格式到隐式格式的发展过程。显式格式受稳定性条件限制,时间步长取的很小,造成计算时间很长,虽然用到了残差光顺和当地时间步长等加速收敛措施,但计算效率仍难满足实际要求。与显式格式相比,隐式方法放宽了对时间步长的限制,提高了时间迭代效率。其中应用广泛的隐式方法为 Jameson 和 Yoon

提出的隐式 LU 分解对称高斯赛德尔迭代(LU-SGS)方法,Srinivasan^[1]首先将这种算法用于悬停旋翼的计算当中,后来这一方法陆续被国内外学者在旋翼 CFD 领域采用^[2]。由于 LU-SGS 方法对方程组的系数矩阵采用了近似分解,其只具有线性敛速。为进一步提高计算效率,在固定翼 CFD 领域具有平方敛速的 Newton 迭代隐式算法得到了应用。这种方法在不存在截断误差的前提下只需 N 步就可得到方程组的解,这里 N 为方程组中方程的数目。其中具有代表性的 Newton 迭代算法为 Saad 和 Schultz 提出的广义极小残差(GMRES)算法^[3],为了提高 GMRES 算法的效率,采用预处理的方法被更多采用^[4-5]。而在旋翼 CFD 领域还未见有关采用 GMRES 算法的文献。

为提高旋翼 CFD 方法的计算效率,深入研究 GMRES 算法在旋翼流场中的收敛特性,本文将 GMRES 算法应用到悬停旋翼数值模拟中。为提高复杂外形处理能力,文中采用非结构混合网格对流场进行离散。同时,由于在非结构网格中网格节点及边的数量要明显小于相对应的网格和面的数量,所以为进一步提高计算效率,本文将流动变量直接存储于网格节点中,采用格点格式有限体积法对在旋转坐标系中以绝对速度为变量的欧拉方程进行直接求解,其中

* 收稿日期:2011-06-14; 修订日期:2011-09-14

作者简介:罗东明(1968-),男,讲师,研究方向:飞机总体设计、计算空气动力学。

对流项的离散应用基于 Roe 的 Riemann 近似解的迎风格式。为了检验该方法,本文对 Caradonna-Tung 旋翼^[6]跨声速悬停流场进行了数值模拟,在收敛速度方面与 LU-SGS 方法进行了对比,并将计算结果与相关实验数据进行比较,以对该方法的计算效率及精度进行评价。

1 控制方程及数值方法

1.1 旋转坐标系下的控制方程

将坐标系固连于以角速度 Ω 旋转的桨叶上,设 y 轴沿旋转轴, x 轴由桨叶前缘指向后缘, z 轴由桨尖指向桨叶根部,原点取在桨毂中心,则在旋转坐标系下用绝对速度表示的无粘的积分形式的控制方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dV + \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{G} dV \quad (1)$$

式中守恒变量 $\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E_r]^T$, 无粘通量及源项为:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho H_r \end{bmatrix} ((\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_\Omega) \cdot \mathbf{n}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho n_x \\ \rho n_y \\ \rho n_z \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho \omega \Omega \\ 0 \\ \rho u \Omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中绝对速度矢量 $\mathbf{V}_a = (u, v, w)^T$, \mathbf{V}_Ω 为牵连速度, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$ 为控制体表面微元外法向单位矢量, ρ 为流体的密度, E_r 及 H_r 分别为单位质量的总转能和总转焓。

1.2 控制方程的离散及边界条件

将守恒变量存储于网格节点中,采用格点格式有限体积法对控制方程进行空间离散得:

$$V_i \frac{dU_i}{dt} = - \sum_{j=1}^{n_{\text{face}}} F_{ij} \cdot S_{ij} + G_i V_i = R_i \quad (2)$$

上式中 R_i 为残差向量,下标 i, j 代表控制体, ij 代表两相邻控制体的交接面, n_{face} 代表控制体的界面数量。界面上的通量 F_{ij} 采用二阶 Roe 的 Riemann 问题近似解方法^[7]计算,其中节点上的守恒变量梯度应用最小二乘法^[4]求解,并采用 Venkatakrishnan 限制器^[8]对其进行限制。

采用 Euler 后差隐式时间离散方法,并对残差向

量进行线性化处理,则式(2)成为:

$$\left[\frac{\mathbf{V}_i}{\Delta t} \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{R}_i^n}{\partial \mathbf{U}} \right] \Delta \mathbf{U} = \mathbf{R}_i^n \quad (3)$$

式中上标 n 代表时间层, \mathbf{I} 为 5 阶单位矩阵,守恒变量增量 $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$ 。将每个控制单元的离散方程组合在一起,则可以写成如下矩阵方程组的形式:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (4)$$

其中 \mathbf{A} 为 $N \times N$ 阶块矩阵, N 为控制单元个数,矩阵 \mathbf{A} 中的每个元素又为 5×5 阶矩阵, \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 为 $5 \times N$ 维列向量,其元素分别由每个节点的守恒变量增量和残差向量构成。

为使方程可解,需补充边界条件。其中远场边界条件由直升机动量理论给出^[9]。由于悬停状态流场的旋转对称性,只需对一片桨叶进行计算,并采用周期边界条件来计入其他桨叶的影响。

1.3 GMRES 算法

对线性方程组(4)采用 GMRES 算法。对于每一时间步,设 X_0 为解的初始预估值,该时间步解的近似值为 $X_n = X_0 + X'$, 其中 X' 为 X_0 的修正值。GMRES 算法以 Galerkin 原理为基础,首先建立 k 维 Krylov 子空间 $\{V_1, AV_1, A^2V_1, \dots, A^{k-1}V_1\}$, 其中 $V_1 = AX_0 - Y$, 然后在该向量空间寻找解的修正值 X' , 使其满足向量 $V_1 + AX'$ 的 2 范数为最小值。为了提高 GMRES 算法的收敛性,本文采用了改进的左预处理重启型 GMRES 算法^[4], 其具体过程如下:

(1) 生成 Krylov 子空间第一个标准基向量 \bar{V}_1 (M 为预处理矩阵):

$$P_0 = M^{-1}(Y - AX_0) \quad (5)$$

$$\bar{V}_1 = P_0 / \|P_0\| \quad (6)$$

(2) 开始内迭代,令 $j=1, 2, \dots, k$, 生成 Krylov 子空间其余标准基向量 $\bar{V}_2, \bar{V}_3, \dots, \bar{V}_k$ 和 $(k+1) \times k$ 维上 Hessenberg 矩阵 H_k :

$$V'_{j+1} = M^{-1} A \bar{V}_j \quad (7)$$

$$h_{i,j} = V'_{j+1} \cdot \bar{V}_j, \quad i = 1, 2, \dots, j \quad (8)$$

$$V_{j+1} = V'_{j+1} - h_{i,j} \bar{V}_i, \quad i = 1, 2, \dots, j \quad (9)$$

$$h_{j+1,j} = \|V_{j+1}\| \quad (10)$$

$$\bar{V}_{j+1} = V_{j+1} / h_{j+1,j} \quad (11)$$

上面各式中 $h_{i,j}$ 为矩阵 H_k 的非零元素。

(3) 令 $k+1$ 维列向量 $e = [\|P_0\|, 0, \dots, 0]^T$ 解的修正值 $X' = \sum_{i=1}^k z_i \bar{V}_i$, 令列向量 $Z = [z_1, z_2, \dots, z_k]^T$, 求解 z_j 使 $\|e - H_k Z\|$ 具有最小值。如果 $\|e - H_k Z\| \leq \epsilon$ ($\epsilon = 10^{-6}$), 则该时间步计算结束,有 $X_n =$

$X_0 + X'$ 。否则,由 $X_0 + X'$ 代替 X_0 并重新回到第一步,即为重启型 GMRES 算法。

在 GMRES 算法的内迭代过程中要多次对系数矩阵与向量的乘积进行计算,本文分别对两种计算方法进行了对比研究。式(4)中的系数矩阵 A 由两部分构成,即

$$A = D - \bar{A} = D - \frac{\partial R}{\partial U} \quad (12)$$

其中 D 为块对角阵,其对角线上每个元素又为对角阵,因此矩阵 D 与向量的乘积可直接进行计算。对于 Jacobian 矩阵 \bar{A} 与向量的乘积,第一种方法为矩阵与向量乘积的近似计算方法^[4],即

$$\bar{A}P = \frac{\partial R}{\partial U}P \approx \frac{R(U + \epsilon P) - R(U)}{\epsilon} \quad (13)$$

其中 $R(U + \epsilon P)$ 为守恒变量 U 加上小扰动量后的残差向量, ϵ 为一代数值,其取值为

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_{\text{machine}} / \bar{P}} \quad (14)$$

其中 $\epsilon_{\text{machine}}$ 是由硬件决定的“机器零”,在本文中取 10^{-14} , \bar{P} 为向量 P 中元素的均方根值。这种近似计算方法的优点是不需要构造复杂的 Jacobian 矩阵,计算机内存消耗少;缺点是在每一次近似计算中需要进行一次通量计算,在 GMRES 算法的内迭代过程中计算量增加。

第二种方法是直接构造 Jacobian 矩阵方法。为了降低 Jacobian 矩阵的复杂程度,减少内存消耗,本文在构造 Jacobian 矩阵时界面无粘通量采用一阶精度,这样每个网格节点上的 Jacobian 矩阵只与其相邻节点值有关。由于 Jacobian 矩阵为大型稀疏矩阵,为进一步节省内存,在程序编写中只存储 Jacobian 矩阵非零元素值,即 Jacobian 矩阵对角元素存储在网格节点数据结构中,非对角元素存储在边数据结构中。与第一种方法相比,第二种方法由于方程组(4)左右两边无粘通量离散精度不一致,收敛速度会降低,其次内存消耗增加;优点是在每一次 GMRES 算法的内迭代之前只需计算一次 Jacobian 矩阵,无须多次的通量计算,计算时间会有所减少。

2 计算结果及分析

计算模型为 Caradonna-Tung 旋翼,该旋翼包括两片展弦比为 6 的矩形无扭转桨叶,其翼型为 NACA0012。计算条件为总距 8° 、桨尖马赫数 0.877,计算在双核 CPU 2.0GHz 和 2G 内存的微机上进行。

根据旋翼悬停流场不同区域的流动特点,为方便

对网格的类型及密度进行合理的布局,本文采用非结构混合网格对流场进行离散,如图 1 所示。桨叶表面及两端分别由结构和非结构面网格生成;为有利于尾涡的捕捉,在紧邻桨叶下方桨尖以内 2 倍弦长、以下 6 倍弦长内布置半环形结构网格,其网格数量为 $24 \times 60 \times 100$ (分别对应径向、轴向和周向),在紧邻桨叶附近网格轴向间距为 0.05 倍弦长;流场其余区域由四面体和金字塔网格填充。全部网格数量为单元总数 744247 个、节点总数 236434 个。

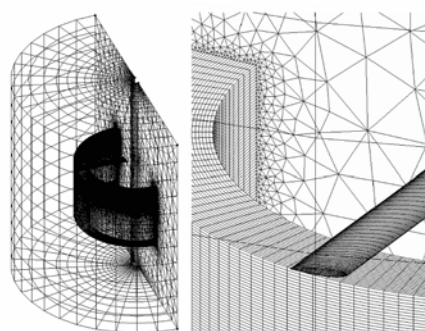


图 1 旋翼流场计算网格示意图

Fig. 1 Schematic of grids for rotor simulation

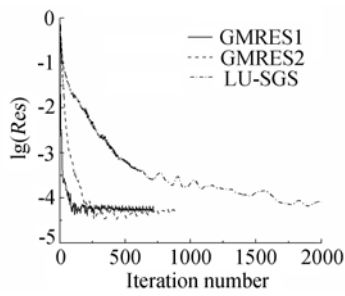
2.1 收敛速度对比

为了检验 GMRES 算法的计算效率,本文与隐式 LU-SGS 方法进行了对比。图 2 和图 3 分别为残差和拉力系数随迭代步数及计算时间的收敛曲线,图中 GMRES1 代表系数矩阵与向量乘积的近似算法,GMRES2 代表系数矩阵与向量直接相乘算法。由图 2 残差收敛曲线可看出,两种 GMRES 算法分别在约 100 步和 250 步就已收敛,而 LU-SGS 算法约在 2000 步才能收敛,GMRES 算法的收敛速度要远高于 LU-SGS 算法。在计算时间上,虽然 GMRES 算法每一迭代步耗时要高于 LU-SGS 算法,但因其收敛步数要远小于 LU-SGS 算法,所以前者总的计算时间也明显小于后者,由图中可看出,两种 GMRES 算法分别在约 70 分钟和 100 分钟收敛,而 LU-SGS 算法约在 300 分钟收敛,GMRES 算法的计算效率要比 LU-SGS 算法提高两到三倍。

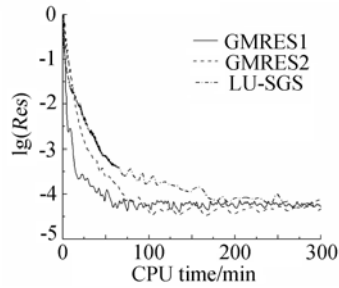
同样由图 3 拉力系数收敛曲线可看出拉力系数的收敛速度与残差收敛速度相当,但两种 GMRES 算法的拉力系数收敛速度几乎一样,说明由于方程组左右两端无粘通量离散精度不一致对残差收敛速度的影响比较明显,而对于拉力系数的收敛速度影响很小。

2.2 计算精度验证

图 4 给出了旋翼桨叶四个剖面上的计算压力系数分布与实验值的对比,可以看到本文计算结果和实



(a) 随迭代步数收敛曲线

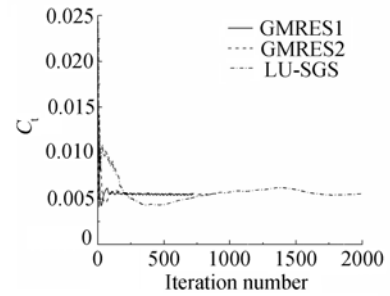


(b) 随计算时间收敛曲线

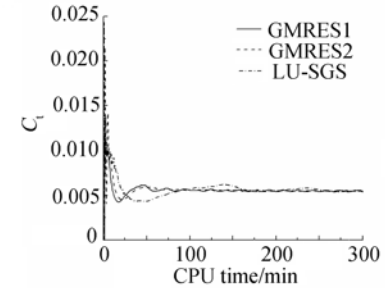
图 2 残差收敛曲线

Fig. 2 Residual convergence history

验值吻合良好。在 $r/R=0.89$ 剖面激波位置计算准确,且未出现抹平现象,说明二阶 Roe 迎风格式具有较小的数值耗散特性。但在靠近桨尖处所计算出的激波位置略微偏后,且峰值低于实验值。究其原因,是因为无粘的欧拉方程无法计及激波/边界层干扰的粘性效应。



(a) 随迭代步数收敛曲线



(b) 随计算时间收敛曲线

图 3 拉力系数收敛曲线

Fig. 3 Thrust coefficient convergence history

图 5 为在桨叶后方周向不同剖面角 Ψ 的流场涡量等值线分布,无量纲涡量模的等值线取值范围为 0.03~0.25。在图中可清晰地辨别出不同尾迹角涡心的位置,并准确描述出了桨尖涡向下、向内收缩的运动特点,说明欧拉方程可以准确描述旋涡的流动及本文的数值离散方法具有低数值耗散性质。图 6 为

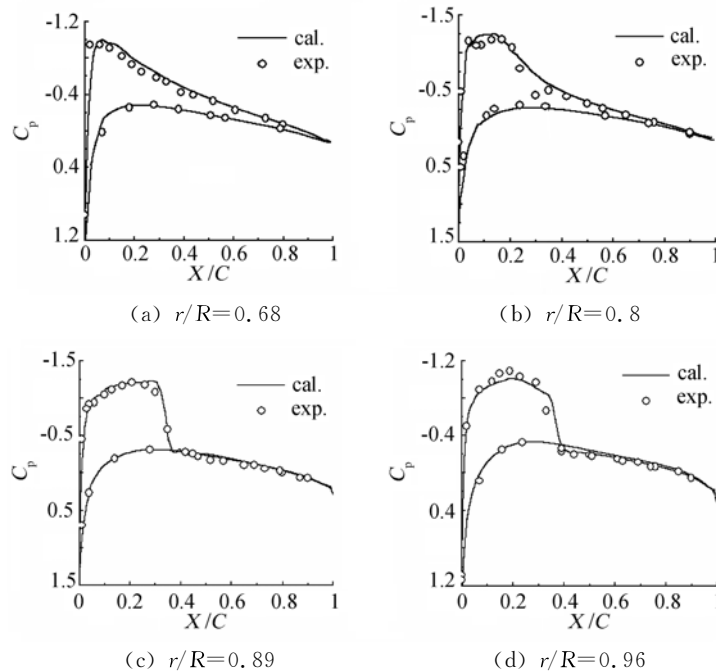


图 4 桨叶表面压力系数分布

Fig. 4 Distribution of pressure coefficient on blade

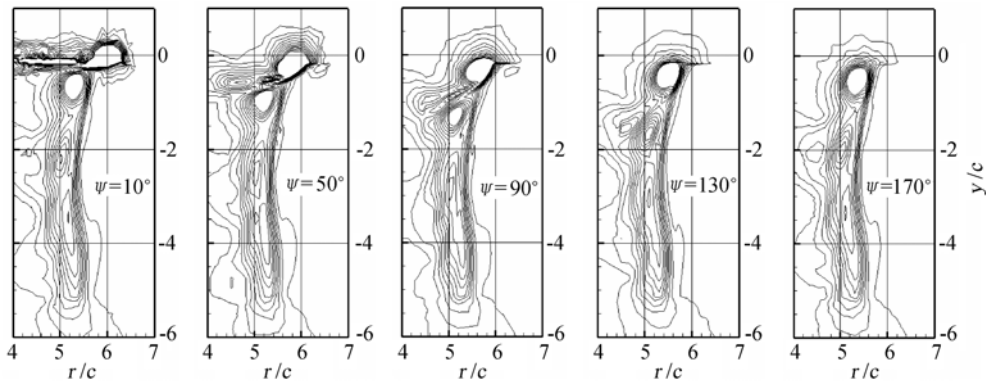


图 5 不同方位流场涡量等值线分布

Fig. 5 Vorticity contours at different radial crosssection

桨尖涡空间位置计算值与实验值的比较,从图中也可以清楚地看到桨尖涡下降以及向内收缩的过程及当尾迹角大于 180° 时,前一片桨叶拖出的桨尖涡与下一片桨叶相遇之后尾迹下降速度明显加快的特点。但由图也可看出随着尾迹角的增大计算误差逐渐增大,说明随着网格间距的增加数值耗散也越来越大。图 7 为无量纲涡量的模 $|\bar{\omega}| = 0.25$ 时的涡量等值面图,可以看到尾涡在周向的持续角度超过 600° ,说明本文的计算方法具有较高的尾涡分辨能力。

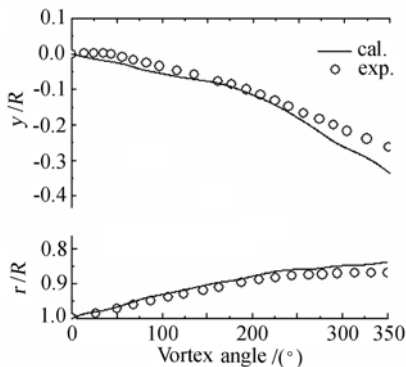


图 6 桨尖涡空间位置比较

Fig. 6 Comparisons of the spatial locations of the blade-tip vortex

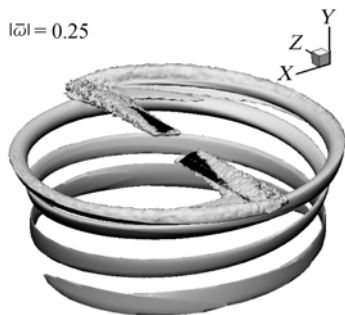


图 7 桨尖涡涡量等值面图

Fig. 7 Iso-contour of the vorticity of the blade-tip vortex

3 结 论

本文发展了一种基于 GMRES 算法的旋翼悬停流动数值模拟方法,对 Caradonna-Tung 旋翼跨声速悬停流场进行了数值模拟,验证了计算方法的精度与效率。主要结论如下:

- (1) 在保证计算精度的前提下,GMRES 算法可以显著地加速流场的收敛,与 LU-SGS 方法相比计算效率提高显著,加快了旋翼尾涡流场的收敛速度,且两种 GMRES 算法在旋翼拉力系数的收敛方面计算速度相当;
- (2) 应用二阶 Roe 迎风格式和非结构混合网格技术,提高了激波及尾涡的分辨能力;
- (3) 本文方法在悬停流场计算中具有较高的效率,在旋翼性能分析方面具有很大的工程应用潜力。

参 考 文 献:

- [1] SRINIVASAN G R, BAEDER J D. Flowfield of lifting rotor in hover: a Navier-Stokes simulation[J]. *AIAA Journal*, 1992, 30(10): 2371-2378.
- [2] 叶靓, 招启军, 徐国华. 基于非结构嵌套网格和逆风格的旋翼悬停流场数值模拟[J]. *空气动力学学报*, 2009, 27(1): 62-66.
- [3] SAAD Y, SCHULTZ M H. A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems [J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1986, 7: 856-869.
- [4] BARTH T J, LINTON S W. An unstructured mesh newton solver for compressible fluid flow and its parallel implementation[R]. AIAA Paper 95-0221.

- [5] 宁方飞, 徐利平. 二维定常湍流计算中的 GMRES 算法 [J]. 力学学报, 2001, 33(4): 443-451.
- [6] CARADONNA F X, TUNG C. Experimental and analytical studies of a model helicopter rotor in hover[R]. NASA-TM-281232, 1981.
- [7] CHEN C L, MCCROSKEY W J, OBAYASHI S. Numerical solutions of forward-flight rotor flow using an upwind method [J]. *Journal of Aircraft*, 1991, 28(6): 374-380.
- [8] VENKATAKRISHNAN V. On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions[R]. AIAA Paper 93-0880, 1993.
- [9] STRAWN R C, BARTH T J. A finite-volume euler solver for computing rotary-wing aerodynamics on unstructured meshes[J]. *Journal of American Helicopter Society*, 1993, 38(2): 61-67.

Application of GMRES algorithm to hovering rotor simulation

LUO Dong-ming^{1,2}, CHEN Ping-jian², WU Xi-ming²

(1. Key Laboratory of Fundamental Science for National Defense-Advanced Design Technology of Flight Vehicle, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. China Helicopter Research and Development Institute, Jingdezhen Jiangxi 333001, China)

Abstract: A GMRES algorithm for hovering rotor simulation is presented. Two calculation methods of matrix-vector product in this algorithm are discussed. The Euler equations with absolute variables on rotating coordinates are directly solved by this way. The flow solver utilizes unstructured mixed grid and cell-vertex finite-volume scheme based on the Upwind Roe's approximate Riemann solver. Using this method a transonic hovering flow fields of Caradonna-Tung rotor are simulated. The computed results show good agreement with experimental results. The efficiency of the GMRES algorithm and LU-SGS algorithm is compared. The comparing results show that the GMRES algorithm can remarkably speed up the convergence rate of the rotor flow.

Key words: GMRES algorithm; hovering rotor; Euler equations