一致收敛

定义：对于函数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 如果：1）存在有极限函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), (a<x<b)$;2) 对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 和 $a<x<b$ 时，有 $\left|f(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$ 成立，则称这个函数在区间 (a,b) 内一致收敛。

柯西判别法：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 和 $p>0$，$a<x<b$ 时，有 $\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$。

M-判别法：

阿贝尔判别法：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛；函数 $b_n(x)$ 全体是有界的并且对每一个 x 形成单调序列，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛。

迪里克来判别法：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体是有界的；序列 $b_n(x)$ 对每一个 x 形成单调序列，并且当 $n\to\infty$ 时在 (a,b) 内一致趋向于 0，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛。

例 1：证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

证 对通项 $u_n(x)=x^n(1-x)^2$ 求导，令 $u_n{}'(x)=nx^{n-1}(1-x)^2-2x^n(1-x)=0$，得出全部极值点 $x=0,1,\dfrac{n}{n+2}$。经检验可知 $u_n(\dfrac{n}{n+2})$ 为 $u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值。因此

$$u_n(x)=x^n(1-x)^2\le(\frac{n}{n+2})^n(1-\frac{n}{n+2})^2\le(1-\frac{n}{n+2})^2=(\frac{n}{n+2})^2\le\frac{4}{n^2}$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

例 2：证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{2x}{x^2+n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

例 3：证明：$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛。

例 4：假设 $b>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛。

例 5：证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{x^2}+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 在任何有穷区间上一致收敛。

例 6：证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内一致收敛。

（Dini 定理）设 $u_n(x)\ge 0$，在 $[a,b]$ 上连续，又 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 $f(x)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

例 7：在区间 $[0,1]$ 上

（1） 证明：函数列 $(1+\frac{x}{n})^n$ 一致收敛；

（2） 证明：函数列 $f_n(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}+(1+\frac{x}{n})^n}$ 一致收敛；

（3） 求极限 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{e^{\frac{x}{n}}+(1+\frac{x}{n})^n}$。

作业：设 $u_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k}$，证明 $u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。