

广义对流传热定律下多级热机系统功率优化的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程和动态规划法

夏少军, 陈林根*, 孙丰瑞

海军工程大学研究生院, 武汉 430033

* 联系人, E-mail: lgchenna@yahoo.com; lingenchen@hotmail.com

2010-02-10 收稿, 2010-07-05 接受

国家自然科学基金(10905093)、教育部新世纪优秀人才资助计划(NCET-04-1006)和全国优秀博士学位论文作者专项资金(200136)资助项目

摘要 研究了有限热容高温流体热源和无限热容低温环境间工作的多级内可逆卡诺热机系统, 考虑热源与工质间传热服从广义对流传热定律 $[q \propto (\Delta T)^m]$, 在初态时刻和驱动流体初态温度均一定的条件下, 应用最优控制理论导出了最大输出功率与流体温度最优构型相关的连续 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程. 基于普适的优化结果, 进一步导出了牛顿传热定律($m=1$)下的解析解; 对于非牛顿传热定律($m \neq 1$), 优化问题不存在解析解, 将连续 HJB 方程离散化, 运用动态规划方法编程实现获得了其完整的数值解, 并深入讨论了系统最大输出功率与过程时间、流体温度三者间的关联耦合关系. 研究结果对实际能量转化系统的最佳设计与运行具有一定理论指导作用.

关键词

广义对流传热定律
多级热机
最大功率
最优控制
有限时间热力

有限时间热力学研究的基本问题是确定给定热力过程的目标极值及其相互之间的关系, 和求出给定最优目标时与其最佳值对应的最优热力过程^[1-14]. 前一类问题属于静态优化问题, 运用简单的函数求极值法即可得到解决, 后一类问题属于动态优化问题, 它需要用到最优控制理论, 仅对于极少数问题存在解析解. Sieniutycz 等人^[3,5,15-19], Szwast 和 Sieniutycz^[20]首先研究了牛顿传热定律下有限热容高温流体热源和无限热容低温环境间工作的多级连续内可逆卡诺热机系统最大输出功率及与其对应的高温流体温度最优构型^[3,5,15-17,19], 并将研究结果进一步推广到多级离散内可逆卡诺热机系统^[3,5,18,20]. Sieniutycz 等人^[21,22]还研究了内不可逆性对多级卡诺热机系统最大输出功率及与其对应的流体温度最优构型的影响. Li 等人^[23,24]进一步考虑高、低温侧均为有限热容流体热源, 研究了牛顿传热定律下多级连续内可逆^[23]和不可逆^[24]卡诺热机系统的最大输出功率优

化. 实际传热规律不总是服从牛顿传热定律的, 导热规律不仅影响给定热力过程的性能^[25-29], 而且影响给定优化目标时的最优热力过程^[30-51]. Sieniutycz 和 Kuran^[44,45], Kuran^[46]和 Sieniutycz^[5,47-49]研究了辐射传热定律下有限高温热源多级连续不可逆卡诺热机系统的最大输出功率及与其对应的高温流体温度最优构型, 由于单纯的辐射传热定律不存在解析解, 文献^[5,45-49]采用传热系数 $\alpha(T^3)$ 与高温流体温度的立方成正比的牛顿传热定律即伪牛顿(pseudo-Newtonian)传热定律 $[q \propto \alpha(T^3)(\Delta T)]$ 近似代替辐射传热定律给出了优化问题的解析解. Sieniutycz^[50]进一步研究了一类非线性传热定律 $[q \propto \alpha(T^3)(\Delta T)]$ 也即传热系数 $\alpha(T^n)$ 与高温流体温度的 n 次方成正比的牛顿传热定律下有限高温热源多级连续不可逆卡诺热机系统的最大功率输出. Li 等人^[51]研究了伪牛顿传热定律下高、低温侧均为有限热容热源时多级连续内可逆卡诺热机系统的最大输出功率. 除文献^[3,5,15-24,44-51]中

英文版见: Xia S J, Chen L G, Sun F R. Hamilton-Jacobi-Bellman equations and dynamic programming for power-optimization of multistage heat engine system with generalized convective heat transfer law. Chinese Sci Bull, 2010, 55, doi: 10.1007/s11434-010-4095-2

讨论的各种特殊传热规律外, 还存在一种普适的传热规律即广义对流传热定律 $[q \propto (\Delta T)^m]$ ^[25,27-29,36]. 本文将在文献[3,5,15~24,44~51]的基础上, 考虑热源与工质间传热服从广义对流传热定律, 进一步研究多级内可逆卡诺热机系统的最大输出功率优化, 并基于普适的优化结果, 导出牛顿传热定律($m=1$)下的解析解; 对于非牛顿传热定律, 将连续 HJB 控制方程离散化并运用动态规划方法编程实现以获得其完整的数值解.

1 物理模型

如图 1 所示为多级连续内可逆卡诺热机系统模型, 流体 1(驱动流体)沿坐标 x 的方向流动, 微卡诺热机连续排列放置在两流体边界层之间, 每一微卡诺热机都是完全相同的, 在微长度 dx 上, 微卡诺热机从流体 1 吸热, 对环境 2 放热, 在最后输出累积功率. 高温流体热容是有限的, 由于多级热机的吸热, 流体 1 在流动的过程中温度逐渐降低, 因此该多级连续内可逆卡诺热机系统的流体热源是非稳态的. 虽然多级连续热机系统的高温流体热源是非稳态的, 但是对于每一微元级卡诺热机其高温侧热源却可认为是稳态的. 这里首先导出单级稳态热源微内可逆卡诺热机的基本特性, 然后导出多级连续非稳态流体热源热机系统的基本特性.

1.1 单级稳态内可逆卡诺热机基本特性

对于图 1 中的每一微元级内可逆卡诺热机, 均可作为单级稳态热源下内可逆卡诺热机来分析. 令 q_1 和 q_2 分别为热机内工质的吸、放热流率, T_1 和 T_2 分别

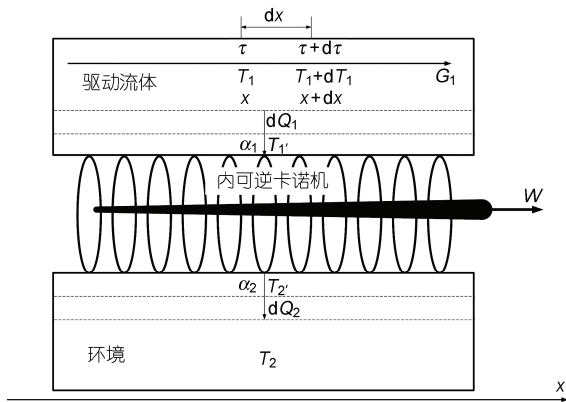


图 1 多级连续内可逆卡诺热机系统模型

为高温热源和低温热源(环境)的温度, T_1 和 T_2 分别为高、低温侧工质的温度. 考虑热源与工质间传热服从广义对流传热定律 $[q \propto (\Delta T)^m]$, 则有

$$q_1 = k_1(T_1 - T_1')^m, \quad q_2 = k_2(T_2 - T_2')^m, \quad (1)$$

式中 k_1 和 k_2 分别为高、低温侧传热过程热导率. 热机为内可逆, 由热力学第二定律可得熵平衡方程如下:

$$k_1(T_1 - T_1')^m / T_1' = k_2(T_2 - T_2')^m / T_2'. \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可得内可逆热机的输出功率 P 和热效率 η 分别为

$$P = q_1 \eta, \quad \eta = 1 - T_2' / T_1'. \quad (3)$$

根据文献 [3,5,21,22,44~50,52] 定义变量 $T' \equiv T_2 T_1' / T_2'$, 由式(3)进一步可得 $\eta = 1 - T_2' / T'$, 而同等条件下可逆热机的效率即卡诺效率为 $\eta = 1 - T_2' / T'$, 对比 η 和 η_c 可知两者形式极为相似, 因此 T' 也称为卡诺温度^[3,5,21,22,44~50,52]. 循环熵产率 σ 为

$$\sigma = q_2 / T_2 - q_1 / T_1 = q_1(1/T' - 1/T_1). \quad (4)$$

将 $T_2' \equiv T_2 T_1' / T'$ 代入式(2)可得

$$T_1' = T_1 - \frac{(k_2)^{1/m} (T_1 - T')}{(k_1)^{1/m} (T'/T_2)^{(m-1)/m} + (k_2)^{1/m}}. \quad (5)$$

将式(5)代入式(1)进一步可得

$$q_1 = k_1 k_2 \frac{(T_1 - T')^m}{[(k_1)^{1/m} (T'/T_2)^{(m-1)/m} + (k_2)^{1/m}]^m}. \quad (6)$$

将 $\eta = 1 - T_2' / T'$ 和式(6)代入式(3)可得

$$P = k_1 k_2 \frac{(T_1 - T')^m}{[(k_1)^{1/m} (T'/T_2)^{(m-1)/m} + (k_2)^{1/m}]^m} \left(1 - \frac{T_2}{T'} \right). \quad (7)$$

将式(6)代入式(4)进一步可得熵产率 σ 为

$$\sigma = k_1 k_2 \frac{(T_1 - T')^m}{[(k_1)^{1/m} (T'/T_2)^{(m-1)/m} + (k_2)^{1/m}]^m} \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T_1} \right). \quad (8)$$

1.2 多级连续内可逆卡诺热机系统基本特性

对于图 1 的多级连续内可逆卡诺热机系统, G 为高温侧驱动流体的摩尔流率, C_p 为其摩尔定压热容, 则有流体的摩尔热容率为 $G_c = G C_p$. 假定 G 和 C_p 均与温度 T_1 无关, 对于 G 和 C_p 随温度变化的情形, 应用与本文相同方法也可作类比分析. 令 α_1 和 α_2 分别为高、低温侧传热系数, α_{v1} 为单位体积驱动流体与热机

高温侧工质的热交换面积, F_1 为驱动流体的横截面积. 文献[3,5,15~24]定义牛顿传热定律下的传热单元高度 $H_{TU}=G_c/(\alpha a_{v1}F_1)$, 式中 $\alpha=\alpha_1\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)$ 称为当量传热系数. 为了使推导过程更具有有一般性以及获得非线性传热定律下的优化结果, 与文献[3,5,15~24]中 H_{TU} 的定义方式不同, 这里定义传热单元高度 $H_{TU}=G_c/(\alpha_1 a_{v1}F_1 T_2^{m-1})$, 它也具有长度的单位. 根据热力学第一定律, 可得

$$q_1/(k_1 T_2^{m-1}) = -G_c dT_1 / (\alpha_1 a_{v1} F_1 T_2^{m-1} dx) \\ = -G_c dT_1 / (\alpha_1 a_{v1} F_1 T_2^{m-1} v dt) \equiv -dT_1 / d\tau, \quad (9)$$

式中 v 为驱动流体的流速, $\tau=x/H_{TU}=vt/H_{TU}$ 为无量纲时间. 在牛顿传热定律下, τ 为高温侧总热导率与驱动流体热容率之比, 即为传热单元数, 这里将其推广到一类非牛顿传热定律系统, 称为广义传热单元数. 以 τ 为变量和以位置 x 和物理时间 t 为变量优化是等价的. 由式(9)可得每一微元内可逆卡诺热机的热导率 k_1 为

$$k_1 = G_c d\tau / T_2^{m-1}. \quad (10)$$

对于给定的积分区域 $[\tau_i, \tau_f]$, 流体的边界温度可表示为 $T_{1i}=T_1(\tau_i)$ 和 $T_{1f}=T_1(\tau_f)$, 输出功率和熵产率分别为

$$\dot{W} = -\int_{T_{1i}}^{T_{1f}} G_c \left(1 - \frac{T_2}{T'}\right) dT_1 = -\int_{\tau_i}^{\tau_f} G_c \left(1 - \frac{T_2}{T'}\right) \dot{T}_1 d\tau, \quad (11)$$

$$\sigma_s = -\int_{T_{1i}}^{T_{1f}} G_c \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T_1}\right) dT_1 = -\int_{\tau_i}^{\tau_f} G_c \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T_1}\right) \dot{T}_1 d\tau, \quad (12)$$

式中 $\dot{T}_1 = dT_1/d\tau$. 若多级内可逆卡诺热机变为可逆卡诺热机, 有 $T'=T_1$, 由式(11)可得

$$\dot{W}_{rev} = G_c [T_{1i} - T_{1f} - T_2 \ln(T_{1i}/T_{1f})], \quad (13)$$

式中 \dot{W}_{rev} 即为可逆输出功率性能界限. 若进一步有 $T_{1f}=T_2$, 可逆输出功率性能界限变为经典流体热力学火用函数 A_{class} . 对于这里的内可逆卡诺热机系统, 由于存在有限速率传热引起的不可逆损失, 而且有限时间内高温流体温度不可能降为低温环境温度 T_2 , 所以式(11)的最大值必定比 \dot{W}_{rev} 小. 联立式(6)和(9)可得

$$\frac{dT_1}{d\tau} = -k_2 \frac{(T_1 - T')^m}{[(k_1/k_2)^{1/m} (T'/T_2)^{(m-1)/m} + (k_2)^{1/m}]^m T_2^{m-1}}. \quad (14)$$

将式(14)代入式(11)可得

$$\dot{W} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} G_c \frac{(T_1 - T')^m}{[(k_1/k_2)^{1/m} (T'/T_2)^{(m-1)/m} + 1]^m T_2^{m-1}} \\ \times \left(1 - \frac{T_2}{T'}\right) d\tau. \quad (15)$$

2 优化问题的 HJB 方程

现在的问题为在式(14)的约束下求式(15)的最大值. 由于控制变量 $T' \equiv T_2 T_1 / T_2$, 对于热机满足关系式 $T_1 > T_1 > T_2 > T_2$, 所以有 $T_2 \leq T' \leq T_1$. 因此该最优控制问题属于控制有闭集约束的变分问题, 可采用 Pontryagin 极小值原理或 Bellman 动态规划理论求解^[53,54]. 优化问题的 HJB 控制方程为

$$\frac{\partial \dot{W}_{max}}{\partial \tau} + \max_{T'(\tau) \in \Omega} \left\{ G_c \left(1 - \frac{T_2}{T'}\right) - \frac{\partial \dot{W}_{max}}{\partial T_1} \right\} \\ \times \frac{(T_1 - T')^m}{[(k_1/k_2)^{1/m} (T'/T_2)^{(m-1)/m} + 1]^m T_2^{m-1}} = 0. \quad (16)$$

式(16)仅对牛顿传热定律存在解析解, 对于其他传热规律则需要采用数值计算. 由式(16)可得离散化方程:

$$\dot{W}^N = \sum_{i=1}^N \left\{ G_c^i \left(1 - \frac{T_2}{T^i}\right) \right. \\ \left. \times \frac{(T_1^i - T^i)^m \theta^i}{[(k_1/k_2)^{1/m} (T^i/T_2)^{(m-1)/m} + 1]^m T_2^{m-1}} \right\}, \quad (17)$$

$$T^i - T^{i-1} = -\frac{(T_1^i - T^i)^m}{[(k_1/k_2)^{1/m} (T^i/T_2)^{(m-1)/m} + 1]^m T_2^{m-1}} \theta^i, \quad (18)$$

$$\tau^i - \tau^{i-1} = \theta^i. \quad (19)$$

最优控制问题变为在离散等式约束式(18)和(19)的基础上求解式(17)的最大值. 由式(17)~(19)可得如下 Bellman 逆向递推方程:

$$\dot{W}_{max}^i(T_1^i, \tau^i) = \max_{T^i, \theta^i} \left\{ G_c^i \left(1 - \frac{T_2}{T^i}\right) \right. \\ \times \frac{(T_1^i - T^i)^m}{[(k_1/k_2)^{1/m} (T^i/T_2)^{(m-1)/m} + 1]^m T_2^{m-1}} \theta^i + \dot{W}_{max}^{i-1} \\ \left. \times \left(T_1^i + \theta^i \frac{(T_1^i - T^i)^m}{[(k_1/k_2)^{1/m} (T^i/T_2)^{(m-1)/m} + 1]^m T_2^{m-1}}, \tau^i - \theta^i \right) \right\}. \quad (20)$$

3 特例分析

当 $m=1$, 即工质与热源间传热服从牛顿传热定律时, 式(14)和(16)分别变为

$$dT_1/d\tau = (T' - T_1)/[(k_1/k_2) + 1], \quad (21)$$

热源温度 T_1 和卡诺温度 T' 随无量纲时间 τ 的最优变化规律分别为

$$\frac{\partial \dot{W}_{\max}}{\partial \tau} + \max_{T'(\tau) \in \Omega} \left\{ G_C \left(1 - \frac{T_2}{T'} \right) - \frac{\partial \dot{W}_{\max}}{\partial T_1} \right\} \frac{(T_1 - T')}{[(k_1/k_2) + 1]} = 0, \quad (22)$$

$$T_1(\tau) = T_{li} (T_{1f}/T_{li})^{(\tau - \tau_i)/(\tau_f - \tau_i)}, \quad (23)$$

$$T'(\tau) = T_{li} [(1 + k_1/k_2) \ln(T_{1f}/T_{li}) / (\tau_f - \tau_i) + 1] (T_{1f}/T_{li})^{(\tau - \tau_i)/(\tau_f - \tau_i)}. \quad (24)$$

将式(23)和(24)代入式(15)可得最大输出功率为

$$\begin{aligned} \dot{W}_{\max} &= G_C \left(T_{li} - T_{1f} - T_2 \ln \frac{T_{li}}{T_{1f}} \right) \\ &\quad - \frac{G_C T_2 [\ln(T_{li}/T_{1f})]^2}{(\tau_f - \tau_i) / [1 + (k_1/k_2)] - \ln(T_{li}/T_{1f})} \\ &= \dot{W}_{\text{rev}} - T_2 \sigma_s. \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)与文献[3,5,15~24]的结果是一致的,且本文的推导过程更具有一般性.由式(24)和(25)可见,当初始时刻 τ_i 、初始状态 T_{li} 等参数给定时,最优控制 T' 和最大输出功率 \dot{W}_{\max} 为 τ_f , T_{1f} 的函数.由于 $T_2 \leq T' \leq T_1$, 而由式(24)可见, $T'(\tau)$ 为 τ 的单调递减函数,同时为使各级能量转化系统均工作在热机模式即有热效率 $\eta = 1 - T_2/T' \geq 0$, 所以卡诺温度 T' 必须满足约束 $T'(\tau_f) \geq T_2$, 由此可得

$$T_{1f} [(1 + k_1/k_2) \ln(T_{1f}/T_{li}) / (\tau_f - \tau_i) + 1] \geq T_2. \quad (26)$$

由式(26)可见,在 τ_f 为有限值下,对于热机系统有 $T_{1f}/T_{li} < 1$, 所以不等式 $(1 + k_1/k_2) \ln(T_{1f}/T_{li}) / (\tau_f - \tau_i) < 0$ 总是成立的,因此高温侧流体末态温度 T_{1f} 高于低温热源(环境)温度 T_2 , 并且存在一个下限值 \bar{T}_{1f} . 可通过将式(26)的不等式变为等式,然后数值求解超越方程得到 T_{1f} 的下限值 \bar{T}_{1f} . 当末态温度 T_{1f} 固定时,由式(25)可见, \dot{W}_{\max} 为 τ_f 的单调递增函数,由 $\dot{W}_{\max} = 0$, 可得 τ_f 的阈值 $\bar{\tau}_f$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_f &= \frac{(1 + k_1/k_2) [\ln(T_{li}/T_{1f})]^2 T_2}{T_{li} - T_{1f} - T_2 \ln(T_{li}/T_{1f})} \\ &\quad + (1 + k_1/k_2) \ln(T_{li}/T_{1f}) + \tau_i. \end{aligned} \quad (27)$$

也就是说当末端时刻 τ_f 自由、末态温度 T_{1f} 固定时, τ_f

必须大于 $\bar{\tau}_f$, 多级热机系统才有功率输出. 当 τ_f 给定且满足 $\tau_f > \bar{\tau}_f$ 时, 由式(25)可得 $\dot{W}_{\max} < \dot{W}_{\text{rev}}$, 这表明最大输出功率 \dot{W}_{\max} 是比经典可逆性能界限 \dot{W}_{rev} 更为真实、严格的性能界限, 并且当 $\tau_f \rightarrow \infty$, $T_{1f} \rightarrow T_2$ 时, $\dot{W}_{\max} \rightarrow A_{\text{class}}$, 即多级热机最大输出功率趋近于经典热力学焓. 当末端时刻 τ_f 一定, 末端状态 T_{1f} 自由时, 由式(25)可见, 随着末态温度 T_{1f} 的降低, 可逆输出功率 \dot{W}_{rev} 在增加, 而焓损失 $T_2 \sigma_s$ 也在增加, 此时在闭区间 $[\bar{T}_{1f}, T_{li}]$ 上存在最佳末态温度 T_{1f}^* 使热机系统输出功率最大, T_{1f}^* 不存在解析解, 可通过数值求解得到, 这是不同于文献[3,5,15~24,44~51]的新结果.

当 $m=1.25$, 即工质与热源间传热服从 Dulong-Petit 传热定律^[55]. 此时只能采用动态规划算法求数值解.

4 数值算例与讨论

本文研究的问题仅对牛顿传热定律下存在解析解, 对于非牛顿传热定律需要采用数值方法计算, 问题最终便归结为求解基本递推方程式(20). 由式(26)和前述分析可知, 过程时间 τ_f 为有限值时, 高温侧流体末态温度 T_{1f} 高于低温热源(环境)温度 T_2 , 并且存在在一个下限值, 文献[3,5,15~24]忽略了这一点, 同时由于牛顿传热定律下最大输出功率及高温流体温度最优构型存在解析解, 所以文献[3,5,15~24]均简单处理, 将末态温度 T_{1f} 取定为低温热源温度 T_2 分析. 本文研究发现当高温流体初态温度一定、末态温度自由时, 存在一个最佳的末态温度 T_{1f}^* 使得热机系统总输出功率最大. T_{1f}^* 可由式(25)通过数值求解代数方程 $d\dot{W}_{\max}/dT_{1f} = 0$ 或图像法得到. 这是一个静态优化问题, 求解也较为简单. 在非牛顿传热定律下, 最大功率输出及高温流体温度最优构型需要用动态规划算法数值求解, 这是一个动态优化问题. 为了便于区分, 这里将前一种优化方法称为“解析优化”, 后一种方法称为“数值优化”. 同时为了检验动态规划算法的有效性, 对于牛顿传热定律同时采用了以上两种方法, 并分末态温度 T_{1f} 自由和末态温度 T_{1f} 固定两种不同边界条件来分析, 对于 Dulong-Petit 传热定律则采用动态规划方法, 最后将两种不同传热定律下两种不同边界条件的优化结果分别进行了比较.

假设高温侧驱动流体的摩尔流率为 $G=1 \text{ mol/s}$, 摩尔定压热容为 $C_p=52.8 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$, 故有 $G_C=GC_p=$

52.8 W/K. 驱动流体初始温度为 $T_{1i}=2800$ K, 流体流速为 $v=1$ m/s, 低温侧环境温度为 $T_2=300$ K. 牛顿传热定律下传热单元的高度为 $H_{TU}=Gc/(\alpha_1\alpha_{v1}F_1)=25$ m, Dulong-Petit 传热定律下为 $H_{TU} = G_C / (\alpha_1 a_{v1} F_1 T_2^{0.25}) = 29.5$ m. 令 $\tau_i=0$, 若流体流动总时间为 $t_1=150$ s, 由 $\tau=x/H_{TU}=vt/H_{TU}$, 对于牛顿传热定律有无限末态时间 $\tau_f=6$, 对于 Dulong-Petit 传热定律有 $\tau_f=5.085$. 令 $k_1=k_2$, 热机的总级数为 $N=100$, 对时间轴 τ 采用线性网格划分, 对于牛顿和 Dulong-Petit 传热定律分别有 $\theta^i=0.06$ 和 $\theta^i=0.051$.

4.1 牛顿传热定律下的数值算例

(i) 末态温度 T_{1f} 一定下的数值算例. 图2为牛顿传热定律下 T_{1f} 的下限值 \bar{T}_{1f} 随过程时间 t_1 的变化规律. 由图2可见, 在过程总时间 t_1 为有限值时, 驱动流体末态温度 T_{1f} 不可能降为环境温度 T_2 , 它存在一个下限值 \bar{T}_{1f} , 当 $t_1=150$ s 时, $\bar{T}_{1f} = 609.1$ K, 这表明为了使系统最大功率输出时各级能量转化器均工作在热机模式, 末态温度 T_{1f} 必须大于 609.1 K. 当末态温度 T_{1f} 给定时, 为了分析末态温度 T_{1f} 变化对优化结果的影响, T_{1f} 分别取 1000, 1200 和 1400 K. 图3和4分别为多级热机系统最大总输出功率 \dot{W}_{max} 和相应的熵产率 σ_{smin} 随末态时刻 τ_f 的变化规律. 由图3可见, 在末态温度 T_{1f} 给定时, τ_f 存在一个下限值 $\bar{\tau}_f$, 即末态时刻 τ_f 必须满足 $\tau_f > \bar{\tau}_f$, 多级热机系统才有功率输出; 当 τ_f 满足 $\tau_f > \bar{\tau}_f$ 且其值较小时, 随着 T_{1f} 的降低, 多级热机系统总输出功率在减少, 这表明同等条件下

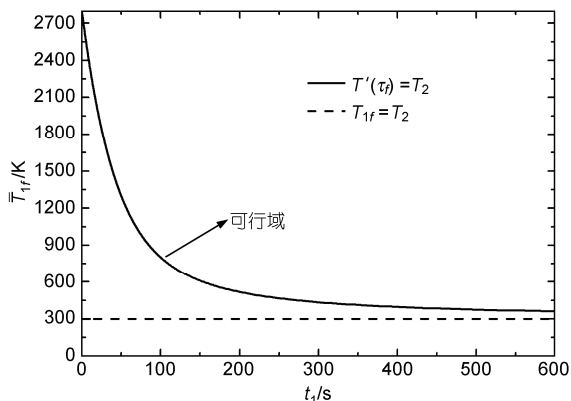


图2 牛顿传热定律下 T_{1f} 的下限值 \bar{T}_{1f} 随过程时间 t_1 的变化规律

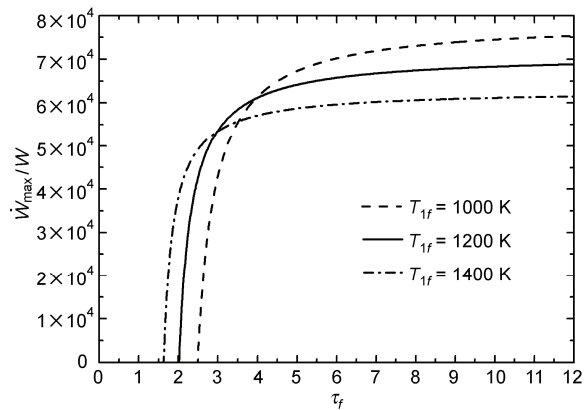


图3 牛顿传热定律下多级热机系统总输出功率 \dot{W}_{max} 随末态时刻 τ_f 的最优变化规律

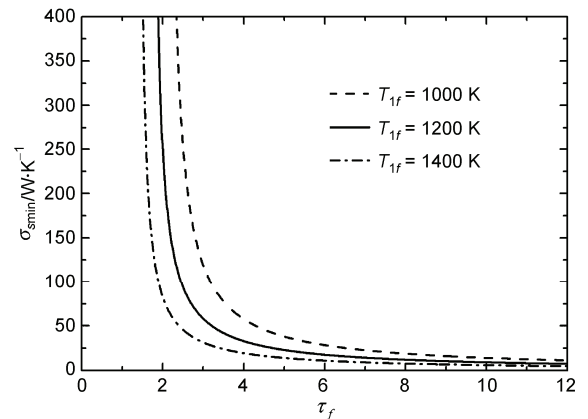


图4 牛顿传热定律下多级热机系统总熵产率 σ_{smin} 随末态时刻 τ_f 的变化规律

多级热机系统的功率并不一定会随着驱动流体末态温度的降低而增大; 当 τ_f 较大时, 随着 T_{1f} 的降低, 多级热机系统总输出功率在增加, 这主要是由于驱动流体末态温度越低其最大作功能力在增大, 即可逆输出功率性能界限 \dot{W}_{rev} 在增大, 随着末态时刻 τ_f 的增加, 多级热机系统总输出功率 \dot{W}_{max} 增加, 当过程时间趋于无限长时, 其趋近于其可逆热力学性能界限 \dot{W}_{rev} . 随着末态时刻 τ_f 的增加, 多级热机系统总熵产率 σ_{smin} 在减少, 当过程时间趋于无限长时, 总熵产率趋于零, 即此时系统性能界限由有限时间热力学性能界限 \dot{W}_{max} 转化为经典可逆热力学性能界限 \dot{W}_{rev} . 同时, 熵产率越小多级热机输出功率越大, 因此当驱动流体末态温度 T_{1f} 给定时, 最大输出功率优化目标等价于最小熵产生率优化目标.

图 5 和 6 分别为牛顿传热定律下过程总时间 $t_1=150$ s 和末态温度 T_{1f} 固定时系统最大功率输出时驱动流体温度 T_1 和卡诺温度 T' 随无量纲时间 τ 的最优变化规律, 图 7 为其相应各级热机输出功率 \dot{W}_i 随级数 i 的最优变化规律. 在图 5~7 中连续线型表示的是解析优化的结果, 离散点表示的是数值优化的结果, 对于数值优化结果, 总 $N=100$ 级热机在图 5~7 中仅以步长为 2 表示出来. 由计算结果可知, 运用动态规划数值算法得到的关键参数优化结果与其相应解析解之间相对误差最大仅为 0.89%. 随着时间 τ 的增加, 驱动流体温度 T_1 和卡诺温度 T' 均呈指数规律下降. 文献[1,4,36,37]研究表明牛顿传热定律下往复式内可逆热机最大输出功时高温热源与相应侧工质温度均随时间呈指数规律递减且两者之比为常数, 文

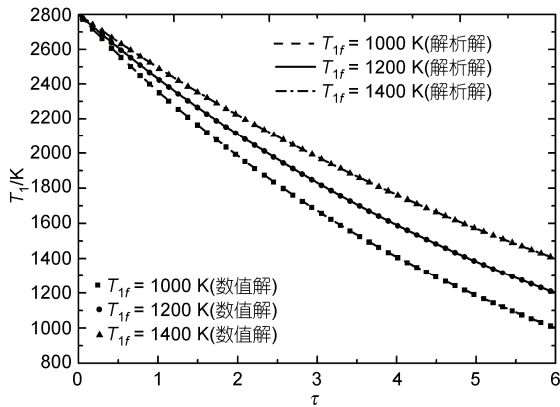


图 5 牛顿传热定律下驱动流体温度 T_1 随无量纲时间 τ 的最优变化规律(T_{1f} 固定)

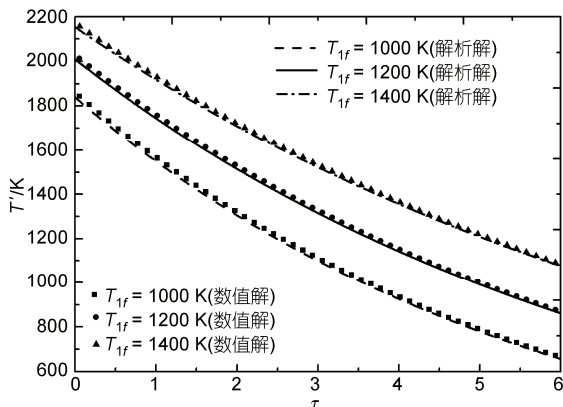


图 6 牛顿传热定律下卡诺温度 T' 随无量纲时间 τ 的最优变化规律(T_{1f} 固定)

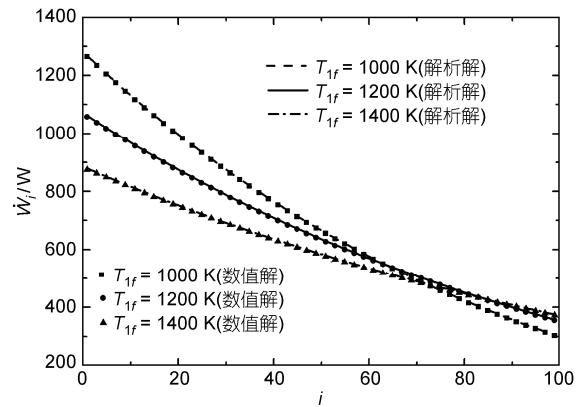


图 7 牛顿传热定律下各级热机输出功率 \dot{W}_i 随级数 i 的最优变化规律(T_{1f} 固定)

献[1,11,30~34]研究也表明牛顿传热定律下换热过程熵产生最小时高、低温热源温度均随时间呈指数规律变化且两者之比为常数, 而当末态温度固定时, 对于这里的优化问题, 输出功率最大目标等价于熵产率最小目标, 这是一类牛顿传热定律下系统动态优化的统一特征. 由计算结果可知, 当 $T_{1f}=1000$ K 时, $T'(0)=1839.0$ K, $\dot{W}_{\max}=7.02 \times 10^4$ W; 当 $T_{1f}=1200$ K 时, $T'(0)=2009.2$ K, $\dot{W}_{\max}=6.58 \times 10^4$ W; 当 $T_{1f}=1400$ K 时, $T'(0)=2153.1$ K, $\dot{W}_{\max}=5.96 \times 10^4$ W, 即随着末态温度 T_{1f} 的增加, 初始卡诺温度 $T'(0)$ 在增加, 系统最大输出功率 \dot{W}_{\max} 在减少, 可见末态温度不同, 牛顿传热定律下多级热机系统最大输出功率及与其对应的最优控制均不同. 当级数 i 较小时, 随着末态温度 T_{1f} 的增加, 输出功率 \dot{W}_i 在减少, 而当级数 i 较大时, 随着末态温度 T_{1f} 的增加, 输出功率 \dot{W}_i 在增加, 可见不同末态温度 T_{1f} 下, 各级热机输出功率 \dot{W}_i 随级数 i 的最优变化规律也不同. 这表明边界温度的变化对多级热机功率输出优化结果有较大影响.

(ii) 末态温度 T_{1f} 自由下的数值算例. 当末态温度 T_{1f} 自由时, 为了分析过程时间 t_1 变化对优化结果的影响, t_1 分别取 50, 100 和 150 s. 图 8 和 9 分别为多级热机系统总输出功率 \dot{W}_{\max} 和总熵产率 σ_s 随末态温度 T_{1f} 的变化规律. 存在一最佳末态温度 T_{1f}^* 使多级热机系统输出功率最大; 当末态温度 T_{1f} 一定时, 随着过程总时间 t_1 的增加, 输出功率 \dot{W}_{\max} 在增加. 由图 9 可见, 在总时间 t_1 一定的条件下, 随着末态温度 T_{1f} 的增加, 多级热机系统的总熵产率 σ_s 在减小. 显然, 输出功率并不会随着系统总熵产率的减少而增加,

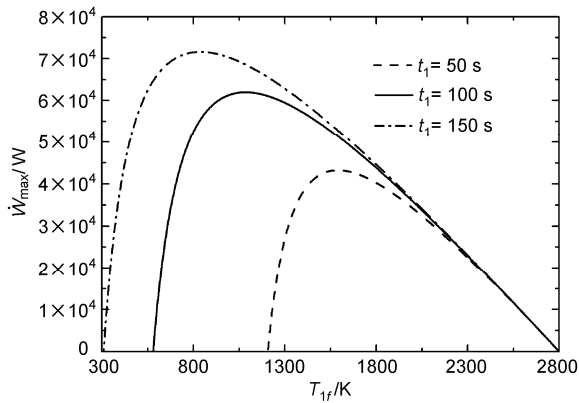


图8 牛顿传热定律下多级热机系统总输出功率 \dot{W}_{\max} 随末态温度 T_{1f} 的变化规律

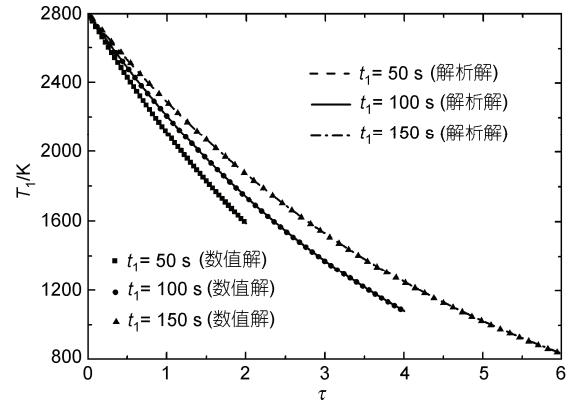


图10 牛顿传热定律下驱动流体温度 T_1 随无量纲时间 τ 的最优变化规律 (T_{1f} 自由)

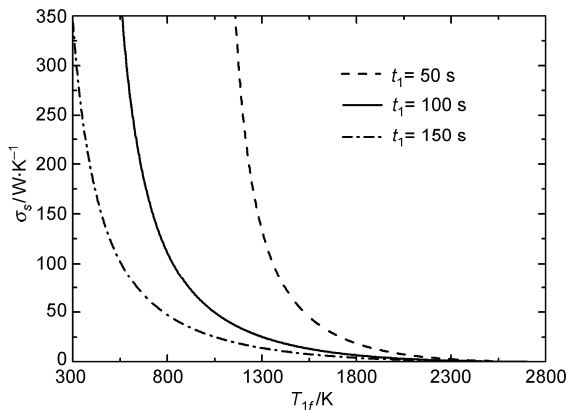


图9 牛顿传热定律下多级热机系统总熵产率 σ_g 随末态温度 T_{1f} 的变化规律

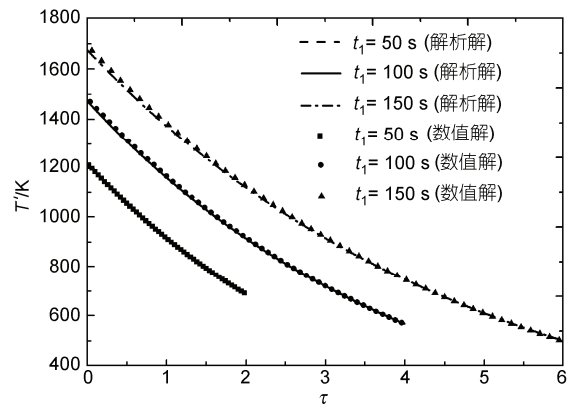


图11 牛顿传热定律下卡诺温度 T' 随无量纲时间 τ 的最优变化规律 (T_{1f} 自由)

因此当驱动流体末态温度 T_{1f} 自由时, 最大输出功率目标与最小熵产生率目标不等价. 由计算结果可知, 当 $t_1 = 50$ s 时, $T_{1f}^* = 1590.9$ K, $T'(0) = 1217.1$ K, $\dot{W}_{\max}^* = 4.32 \times 10^4$ W; 当 $t_1 = 100$ s 时, $T_{1f}^* = 1083.8$ K, $T'(0) = 1471.2$ K, $\dot{W}_{\max}^* = 6.20 \times 10^4$ W; 当 $t_1 = 150$ s 时, $T_{1f}^* = 838.0$ K, $T'(0) = 1674.1$ K, $\dot{W}_{\max}^* = 7.16 \times 10^4$ W, 随着总时间 t_1 的增加, 最佳末态温度 T_{1f}^* 在降低, 系统最大输出功率 \dot{W}_{\max}^* 在增加, 初始卡诺温度 $T'(0)$ 在增加. 因此, 总时间约束 t_1 不同, 牛顿传热定律下多级热机系统最大输出功率 \dot{W}_{\max}^* 及与其对应的最佳末态温度 T_{1f}^* 和最优控制 $T'(0)$ 均不同.

图10和11分别为牛顿传热定律下末态温度 T_{1f} 自由时多级热机最大输出功率时驱动流体温度 T_1 和卡诺温度 T' 随无量纲时间 τ 的最优变化规律, 图12为

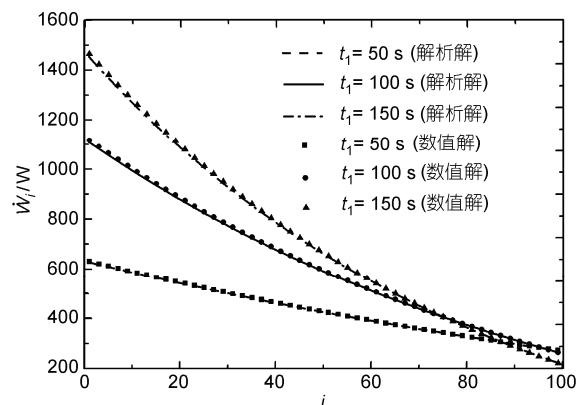


图12 牛顿传热定律下各级热机输出功率 w_i 随级数 i 的最优变化规律 (T_{1f} 自由)

各级热机输出功率 \dot{W}_i 随级数 i 的最优变化规律。随着时间 τ 的增加, 驱动流体温度 T_1 和卡诺温度 T' 均随时间 τ 呈指数规律下降。总时间 t_1 不同, 最优末态温度 T_{1f}^* 不相等, 温度 T_1 和 T' 随时间 τ 的最优变化规律也不同, 这表明总时间约束大小影响多级热机系统最大功率输出时的驱动流体温度分布及相应的最优控制。各级热机输出功率 \dot{W}_i 随着级数 i 的增加而减少, 这主要是由于驱动流体温度 T_1 随着时间 τ 的增加在不断地降低; 当级数 i 较小时, 随着总时间 t_1 的增加, 输出功率 \dot{W}_i 在增加, 而当级数 i 较大时, 随着总时间 t_1 的增加, 输出功率 \dot{W}_i 在减少, 不同总时间 t_1 下输出功率 \dot{W}_i 沿级数 i 的最优分配规律也不同。因此, 总时间约束的变化对多级热机功率输出有较大影响。

4.2 不同传热定律下优化结果的比较

(i) 末态温度 T_{1f} 一定时优化结果的比较。此时令总时间 $t_1=150$ s, 末态温度 $T_{1f}=1000$ K。图 13 为不同传热规律下末态温度 T_{1f} 一定时流体温度 T_1 和卡诺温度 T' 随时间 t 的最优变化规律。图 14 为不同传热规律下各级热机输出功率 \dot{W}_i 随级数 i 的最优变化规律。当末态温度一定时, 牛顿传热定律下驱动流体最优温度 T_1 略高于 Dulong-Petit 传热定律下驱动流体最优温度, 同时牛顿传热定律下最优卡诺温度 T' 也高于 Dulong-Petit 传热定律最优卡诺温度 T' 。由计算结果可知, 牛顿传热定律下系统最大输出功率为 $\dot{W}_{\max} = 7.02 \times 10^4$ W, 最优控制为 $T'(0)=1839.0$ K; Dulong-Petit 传热定律下系统最大输出功率为 $\dot{W}_{\max} = 6.59 \times 10^4$ W, 最优控制为 $T'(0)=1574.6$ K, 这表明末态温度 T_{1f} 一定时, 传热规律影响多级热机系统最大输出功率及与其对应的驱动流体温度最优构型。Dulong-Petit 传热定律下各级热机输出功率 \dot{W}_i 要略小于牛顿传热定律下相应的优化结果, 并且随着级数 i 的增加, 两者的差别在增大。

(ii) 末态温度 T_{1f} 自由时优化结果的比较。此时令总时间 $t_1=150$ s。图 15 为不同传热规律下末态温度 T_{1f} 自由时流体温度 T_1 和卡诺温度 T' 随时间 t 的最优变化规律。图 16 为不同传热规律下各级热机输出功率 \dot{W}_i 随级数 i 的最优变化规律。当末态温度自由时, 牛顿传热定律下驱动流体最优温度 T_1 要低于 Dulong-Petit 传热定律下驱动驱动流体最优温度, 这与末态温度固定情形时的规律相反, 但牛顿传热定

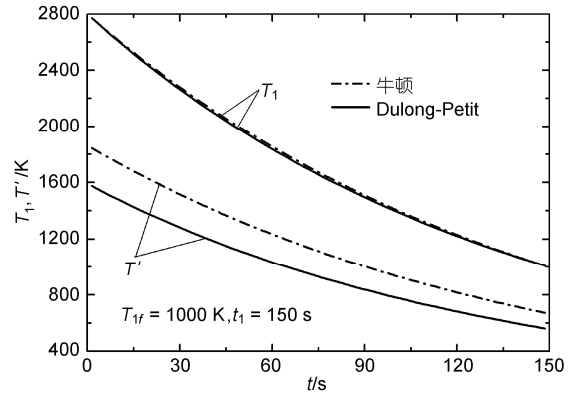


图 13 不同传热规律下流体温度 T_1 和卡诺温度 T' 随时间 t 的最优变化规律(T_{1f} 固定)

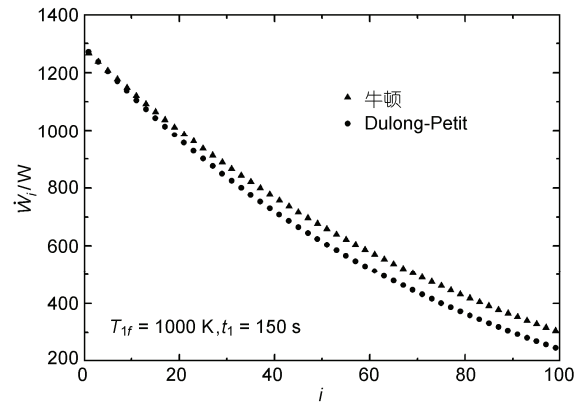


图 14 不同传热规律下各级热机输出功率 \dot{W}_i 随级数 i 的最优变化规律(T_{1f} 固定)

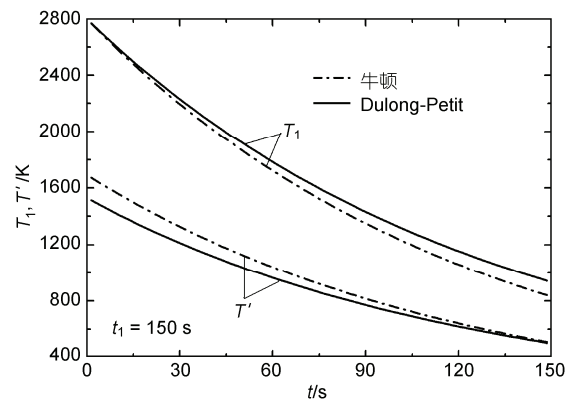


图 15 不同传热规律下流体温度 T_1 和卡诺温度 T' 随时间 t 的最优变化规律(T_{1f} 自由)

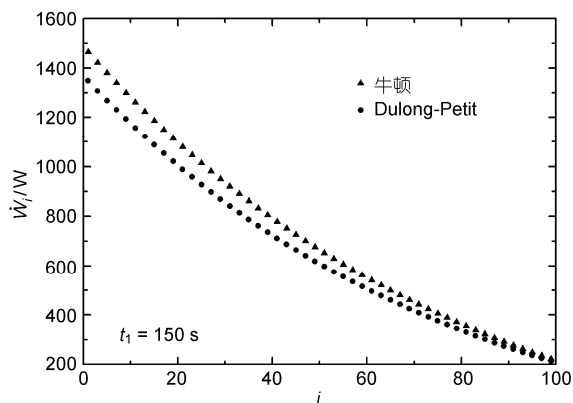


图 16 不同传热规律下各级热机输出功率 \dot{W}_i 随级数 i 的最优变化规律 (T_{lf} 自由)

律下最优卡诺温度 T' 依然要高于 Dulong-Petit 传热定律最优卡诺温度 T' . 由计算结果可知, 牛顿传热定律下最优末态温度 $T_{lf}^* = 838.0$ K, 最优控制为 $T'(0) = 1674.1$ K, 最大功率输出 $\dot{W}_{\max}^* = 7.16 \times 10^4$ W; Dulong-Petit 传热定律下最优末态温度 $T_{lf}^* = 933.6$ K, 最优控制为 $T'(0) = 1512.4$ K, 最大功率输出 $\dot{W}_{\max}^* = 6.61 \times 10^4$ W, 这表明末态温度 T_{lf} 自由时, 传热规律影响多级热机系统最大输出功率及与其对应的驱动流体温度最优构型. Dulong-Petit 传热定律下各级热机输出功率 \dot{W}_i 要小于牛顿传热定律下相应的优化结果, 同时随着级数 i 的增加, 两者的差别在减少, 这与末态温度 T_{lf} 一定时得到的结论正好相反. 由此可见, 传热规律和边界条件约束的变化两者均对多级热机最大功率输出优化有较大影响.

5 结论

在文献[3,5,15~24,44~51]的基础上, 本文进一步研究了有限热容高温流体热源和无限热容低温环境间工作的多级内可逆卡诺热机系统, 考虑热源与工质间传热服从广义对流传热定律, 在初态时刻和驱动流体初态温度一定的条件下, 应用最优控制理论

导出了最大功率输出时与流体温度最优构型相关的连续 HJB 方程. 基于普适的优化结果, 进一步导出了牛顿传热定律下的解析解; 对于非牛顿传热定律, 将连续 HJB 方程离散化, 运用动态规划方法编程实现获得了其完整的数值解. 给出了牛顿传热、Dulong-Petit 传热两种特殊传热定律和末态温度一定与末态温度自由两类不同边界条件共 4 种不同情形下的数值算例, 并将各种不同情形下的优化结果进行了比较. 结果表明, 当过程总时间一定时, 流体末态温度下限值的要大于低温侧环境温度, 即有限时间内高温侧驱动流体的温度不可能降为低温侧环境温度; 当流体末态温度一定时, 过程总时间存在一个下限值, 即过程时间必须大于此值系统才有功率输出, 同时以最大功率输出为目标优化等价于以熵产率最小为目标优化, 当过程总时间趋于无限长时, 多级热机系统的最大功率输出趋近于其经典可逆性能界限; 当过程总时间和流体末态温度均一定时, 存在一个最优控制使多级热机系统总输出功率最大, 并且末态温度不同, 其最大输出功率及相应的最优控制策略也不同; 当流体末态温度自由时, 以最大输出功率为目标优化与以熵产率最小为目标优化不等价, 但存在一个最佳末态温度使多级热机系统输出功率最大, 总时间约束不同, 其最大输出功率及相应的最优控制策略也不同; 当过程时间趋于无限长且流体末态温度趋于环境温度时, 多级热机系统最大输出功率趋近于经典流体热力学火用; 牛顿传热定律热机系统最大功率输出时驱动流体温度随时间呈指数规律递减变化, Dulong-Petit 传热定律热机系统最大功率输出时高温流体温度随时间的最优变化规律与牛顿传热定律下优化结果显著不同. 优化目标、边界条件、热阻模型等均对优化问题的优化结果有较大影响, 在实际优化问题中这些关键因素的变化均需予以详细考虑和界定. 本文的研究结果为流体流动热功转换过程提供了一个与经典热力学不同的新热力学性能界限, 对实际能量转化、传递过程和系统的最优设计与运行具有一定理论指导作用.

参考文献

- 1 Berry R S, Kazakov V A, Sieniutycz S, et al. Thermodynamic Optimization of Finite Time Processes. Chichester: Wiley, 1999
- 2 Chen L, Wu C, Sun F. Finite time thermodynamic optimization or entropy generation minimization of energy systems. J Non-Equilib Thermodyn, 1999, 24: 327—359
- 3 Sieniutycz S. Hamilton-Jacobi-Bellman framework for optimal control in multistage energy systems. Phys Rep, 2000, 326: 165—285
- 4 陈林根. 不可逆过程和循环的有限时间热力学分析. 北京: 高等教育出版社, 2005

- 5 Sieniutycz S, Jezowski J. *Energy Optimization in Process Systems*. Oxford: Elsevier, 2009
- 6 王建辉, 何济洲, 毛之远. 谐振子系统量子热机循环性能. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2006, 36: 591—605
- 7 夏丹, 陈林根, 孙丰瑞. 广义不可逆四源等温化学势变换器的最优性能. *中国科学 B 辑: 化学*, 2008, 38: 492—503
- 8 舒礼伟, 陈林根, 孙丰瑞. 线性唯象传热规律下热驱动二元分离过程的最小平均耗热量. *中国科学 B 辑: 化学*, 2009, 39: 183—192
- 9 何济洲, 何弦, 唐威. 不可逆谐振子量子 Otto 制冷循环性能特征. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2009, 39: 1046—1051
- 10 刘晓威, 陈林根, 吴锋, 孙丰瑞. 不可逆谐振子卡诺热机生态学优化. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2009, 39: 1687—1698
- 11 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 换热器焓耗散最小优化. *科学通报*, 2009, 54: 2240—2246
- 12 丁泽民, 陈林根, 孙丰瑞. 空间周期性温度场中布朗热泵的热力学特性. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2010, 40: 16—25
- 13 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 有限势库化学机最大输出功时循环最优构型. *中国科学: 化学*, 2010, 40: 492—500
- 14 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 液-固相变过程火积耗散最小化. *中国科学: 技术科学*, 2010, 40: 待发表
- 15 Sieniutycz S. Hamilton-Jacobi-Bellman theory of dissipative thermal availability. *Phys Rev E*, 1997, 56: 5051—5064
- 16 Sieniutycz S. Irreversible Carnot problem of maximum work in a finite time via Hamilton-Jacobi-Bellman theory. *J Non-Equilib Thermodyn*, 1997, 22: 260—284
- 17 Sieniutycz S. Nonlinear thermokinetics of maximum work in finite time. *Int J Engng Sci*, 1998, 36: 577—597
- 18 Sieniutycz S. Endoreversible modeling and optimization of multi-stage thermal machines by dynamic programming. In: Wu C, Chen L, Chen J. eds. *Recent Advances in Finite Time Thermodynamics*. New York: Nova Science Publishers, 1999. 189—219
- 19 Sieniutycz S, von Spakovsky M R. Finite time generalization of thermal exergy. *Energy Convers Mgmt*, 1998, 39: 1423—1447
- 20 Szwast Z, Sieniutycz S. Optimization of multi-stage thermal machines by Pontryagin's like discrete maximum principle. In: Wu C, Chen L, Chen J. eds. *Recent Advances in Finite Time Thermodynamics*. New York: Nova Science Publishers, 1999. 221—237
- 21 Sieniutycz S, Szwast Z. Work limits in imperfect sequential systems with heat and fluid flow. *J Non-Equilib Thermodyn*, 2003, 28: 85—114
- 22 Sieniutycz S. Development of generalized (rate dependent) availability. *Int J Heat Mass Transfer*, 2006, 49: 789—795
- 23 Li J, Chen L, Sun F. Extremal work of an endoreversible system with two finite thermal capacity reservoirs. *J Energy Institute*, 2009, 82: 53—56
- 24 Li J, Chen L, Sun F. Optimum work in real systems with a class of finite thermal capacity reservoirs. *Math Comp Modell*, 2009, 49: 542—547
- 25 Gutowicz-Krusin D, Procaccia J, Ross J. On the efficiency of rate processes: Power and efficiency of heat engines. *J Chem Phys*, 1978, 69: 3898—3906
- 26 de Vos A. Efficiency of some heat engines at maximum power conditions. *Am J Phys*, 1985, 53: 570—573
- 27 Angulo-Brown F, Paez-Hernandez R. Endoreversible thermal cycle with a nonlinear heat transfer law. *J Appl Phys*, 1993, 74: 2216—2219
- 28 Zhou S, Chen L, Sun F. Optimal performance of a generalized irreversible Carnot engine. *Appl Energy*, 2005, 81: 376—387
- 29 Huleihil M, Andresen B. Convective heat transfer law for an endoreversible engine. *J Appl Phys*, 2006, 100: 014911
- 30 Andresen B, Gordon J M. Optimal paths for minimizing entropy generation in a common class of finite time heating and cooling processes. *Int J Heat Fluid Flow*, 1992, 13: 294—299
- 31 Badescu V. Optimal paths for minimizing lost available work during usual heat transfer processes. *J Non-Equilib Thermodyn*, 2004, 29: 53—73
- 32 Chen L, Xia S, Sun F. Optimal paths for minimizing entropy generation during heat transfer processes with a generalized heat transfer law. *J Appl Phys*, 2009, 105: 044907
- 33 Xia S, Chen L, Sun F. Optimization for minimizing lost available work during heat transfer processes with complex heat transfer law. *Brazilian J Phys*, 2009, 39: 98—105
- 34 Xia S, Chen L, Sun F. Optimal paths for minimizing entransy dissipation during heat transfer processes with generalized radiative heat transfer law. *Appl Math Modell*, 2010, 34: 2242—2255
- 35 宋汉江, 陈林根, 孙丰瑞. 辐射传热条件下一类内可逆热机最大效率时的最优构型. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2008, 38: 1083—1096
- 36 Chen L, Zhu X, Sun F, et al. Optimal configurations and performance for a generalized Carnot cycle assuming the heat transfer law $Q \propto (\Delta T)^m$. *Appl Energy*, 2004, 78: 305—313
- 37 李俊, 陈林根, 孙丰瑞. 复杂导热规律下有限高温热源热机循环的最优构型. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2009, 39: 255—259
- 38 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 线性唯象传热定律下 Otto 循环热机活塞运动的最优路径. *中国科学 G 辑: 物理学 力学 天文学*, 2009, 39: 698—708
- 39 夏少军, 陈林根, 孙丰瑞. 线性唯象传热定律下具有非均匀工质的一类非回热不可逆热机最大功率输出. *中国科学 G 辑: 物理学*

- 力学 天文学, 2009, 39: 1081—1089
- 40 马康, 陈林根, 孙丰瑞. 线性唯象传热定律下光驱动发动机的最优路径. 中国科学: 化学, 2010, 40: 1035—1045
- 41 戈延林, 陈林根, 孙丰瑞. 熵产生最小时不可逆 Otto 循环热机活塞运动最优路径. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2010, 40: 1115—1129
- 42 Chen L, Xia S, Sun F. Performance limits for a class of irreversible internal combustion engines. *Energy & Fuels*, 2010, 24: 295—301
- 43 Chen L, Xia S, Sun F. Maximum efficiency of an irreversible heat engine with a distributed working fluid and linear phenomenological heat transfer law. *Rev Mex Fis*, 2010, 56: 231—238
- 44 Sieniutycz S, Kuran P. Nonlinear models for mechanical energy production in imperfect generators driven by thermal or solar energy. *Int J Heat Mass Transfer*, 2005, 48: 719—730
- 45 Sieniutycz S, Kuran P. Modeling thermal behavior and work flux in finite-rate systems with radiation. *Int J Heat Mass Transfer*, 2006, 49: 3264—3283
- 46 Kuran P. Nonlinear models of production of mechanical energy in non-ideal generators driven by thermal or solar energy. Dissertation for Doctoral Degree. Poland: Warsaw University of Technology, 2006
- 47 Sieniutycz S. Hamilton-Jacobi-Bellman equations and dynamic programming for power-maximizing relaxation of radiation. *Int J Heat Mass Transfer*, 2007, 50: 2714—2732
- 48 Sieniutycz S. Dynamical converters with power-producing relaxation of solar radiation. *Int J Thermal Sci*, 2008, 47: 495—505
- 49 Sieniutycz S. Dynamic programming and Lagrange multipliers for active relaxation of resources in nonlinear non-equilibrium systems. *Appl Math Modell*, 2009, 33: 1457—1478
- 50 Sieniutycz S. Dynamic bounds for power and efficiency of non-ideal energy converters under nonlinear transfer laws. *Energy*, 2009, 34: 334—340
- 51 Li J, Chen L, Sun F. Maximum work output of multistage continuous Carnot heat engine system with finite reservoirs of thermal capacity and radiation between heat source and working fluid. *Thermal Sci*, 2010, 14: 1—9
- 52 Sieniutycz S. Carnot controls to unify traditional and work-assisted operation with heat and mass transfer. *Int J Thermodyn*, 2003, 6: 1—9
- 53 Bellman R E. *Adaptive Control Processes: A Guided Tour*. Princeton: Princeton University Press, 1961
- 54 胡寿松, 王执铨, 胡维礼. 最优控制理论与系统. 北京: 科学出版社, 2005
- 55 O'Sullivan C T. Newton's law of cooling-A critical assessment. *Am J Phys*, 1990, 58: 956—960