基于广义哈密尔顿原理Pflüger柱与简支板的有限元模型

北京航空学院　　张躬行　李松年

提　　要

本文首先对Pflüger柱以简单的方式与工程上习惯的形式列出它的广义哈密尔顿变分泛函，遂使这一非保守问题广义保守化。据此变分原理进行了有限元离散尝试性试验、讨论了这种有限元离散的特点、以显式提供了一种单元模型全部对称的矩阵。在证实Pflüger柱以发散型失稳之后，指出采用通常的瑞利商迭代技术便可简单地获得临界载荷。算例印证了理论也显示了数值上的效力。对于类似的简支矩形板，文中指出可利用Pflüger柱的单元矩阵简单地获得板有限条模型的有关矩阵。

一、引　　言

如所周知，非保守力或存在非保守分量的所谓跟随力，它在非无限小位移下所做的功不取决于位形状态而且与路径有关，因此对于类似Pflüger柱这种在跟随力作用下的结构稳定性问题就不能从通常的哈密尔顿原理出发展开近似解，这在长时间以来已形成固定的论点。于是，如果人们仍想利用变分原理处理这类非保守问题，看来就只有两种选择，一种是采用同时考虑相伴系统的变分原理[1]，此时，由于相伴变数之引入显然扩大了预解问题的规模；另一种，便是采用一种不完全的变分原理（或称变分陈述）展开近似解[2]，这后一种方法固然比较直观，但由于不具备对称性而为数值计算带来了不便。

能否既不引入相伴系统，又保持对称性而建立一种广义的哈密尔顿变分泛函，对于限定性的问题来说，这种可能性是存在的，文献〔3〕较一般地讨论了这种处理方法，但其一般性只是形式上的。本文针对Pflüger柱及其相关问题以简单的方式与工程上习惯的形式提供了这一变分泛函，它与文献〔3〕在实质上是等价的。据此变分原理，本文首次进行了有限元离散试验，讨论了它的特点，同时以显式提供了一种单元模型，它的一切矩阵都具有对称的性质，算例印证了该理论也显示了数值上的效力。

对于承受切向分布跟随力的简支矩形板，利用Pflüger柱单元模型的有关矩阵，可以简单地组合得到板有限条模型的相应矩阵。

二、广义哈氏原理与广义能量守恒

容易列出Pflüger柱的运动微分方程与边界条件，如下：

1982年4月收到。

$D.E.$:

$$\ddot{w}(x,t)+\frac{\alpha}{\mu}w_{xxxx}(x,t)+\frac{g}{\mu}(L-x)w_{xx}(x,t)=0 \tag{1}$$

$B.C.$:

$$w(0,t)=w(L,t)=w_{xx}(0,t)=w_{xx}(L,t)=0 \tag{2}$$

式中 $w(x,t)$表示挠度；α为抗弯刚度；g为与x正向相反的分布的跟随力；μ为单位柱长的质量；L为柱的长度；$(\dot{\ })$表示关于时间t的偏导数；$(\ )_x$表示关于位置x的偏导数。

与（1）、（2）式对应，是否存在变分泛函？为此我们可采用考察以下积分的简单方法[4]

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left\{\ddot{w}+\frac{\alpha}{\mu}w_{xxxx}+\frac{g}{\mu}(L-x)w_{xx}\right\}\delta w dxdt=0 \tag{3}$$

若在（3）式左端能将变分算符δ提到某一积分式之前则表明变分泛函已经找到，否则不存在。（3）式经分部积分得到

$$\begin{aligned}&-\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\frac{1}{2}\left\{(\dot{w})^2-\left[\frac{\alpha}{\mu}(w_{xx})^2-\frac{g}{\mu}(L-x)(w_x)^2\right]\right\}dxdt\\&-\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^L\frac{-gw_x}{\mu}\delta wdx\right\}dt+\int_0^L\dot{w}\delta wdx\Big|_{t_1}^{t_2}\\&+\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\alpha}{\mu}w_{xxx}+\frac{g}{\mu}(L-x)w_x\right]\delta w-\frac{\alpha}{\mu}w_{xx}\delta w_x\right\}\Big|_0^L dt=0\end{aligned} \tag{4}$$

在（4）式中，由哈氏原理的时端条件，第三项为零；由（2）式以及δw为允许函数，故第四项也不存在，于是（4）式改写为：

$$\delta H=-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\frac{-gw_x}{\mu}\delta w\,dx\,dt \tag{5}$$

其中

$$H=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\frac{1}{2}\left\{(\dot{w})^2-\left[\frac{\alpha}{\mu}(w_{xx})^2-\frac{g}{\mu}(L-x)(w_x)^2\right]\right\}dxdt$$

显然H便是当g为定向力而不是跟随力的时候，系统的哈氏变分泛函。对于Pflüger柱，由于g为跟随力，$\delta H\neq 0$，（5）式右端为非保守分力，$-gw_x$，在虚位移δw上的虚元功的时空积分。由此可见：基于常规的能量考虑对此问题不能获得变分泛函，而只能得到（5）式所体现的变分陈述形式。但是，基于（5）式展开近似解，显然可以看到由于其右端为w_x与δw的双线性型而不是一种通常的二次型，所以总会导致非对称矩阵的出现。

（5）式之推导过程不只是已知常识的回顾，同时也启发我们，如果设法使（1）式中的w_{xx}项不参与分部积分的演变就有可能获得一种变分泛函。事实上，在（3）式中以δw_{xx}取代δw，得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left\{\ddot{w}+\frac{\alpha}{\mu}w_{xxxx}+\frac{g}{\mu}(L-x)w_{xx}\right\}\delta w_{xx}dxdt=0 \tag{6}$$

（6）式经分部积分得到：

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left\{-\dot{w}\delta\dot{w}_{xx}-\frac{\alpha}{\mu}w_{xxx}\delta w_{xxx}+\frac{g}{\mu}(L-x)w_{xx}\delta w_{xx}\right\}dxdt$$

$$+\int_0^L \dot{w}\delta w_{xx}dx\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\alpha}{\mu}w_{xxx}\delta w_{xx}\right)\Big|_0^L dt=0$$

或

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\frac{1}{2}\left\{(\dot{w}_x)^2-\frac{\alpha}{\mu}(w_{xxx})^2+\frac{g}{\mu}(L-x)(w_{xx})^2\right\}dxdt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\dot{w}\delta\dot{w}_x\Big|_0^L dt+\int_0^L\dot{w}\delta w_{xx}dx\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\alpha}{\mu}w_{xxx}\delta w_{xx}\right)\Big|_0^L dt=0 \quad (7)$$

与前述理由一样，由时端条件与边界条件（2）可知（7）式后三项均不存在。此外，为方便计，在（7）式两端各乘以2，于是得到广义哈氏原理：

$$\delta H^*=0 \quad (8)$$

其中广义哈氏变分泛函的表达式为

$$H^*=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\left\{(\dot{w}_x)^2-\frac{\alpha}{\mu}(w_{xxx})^2+\frac{g}{\mu}(L-x)(w_{xx})^2\right\}dxdt \quad (9)$$

至此可见与给定的微分方程（1）连同边界条件（2）相对应的变分原理已经确立。基于（8）、（9）式则可以展开近似解，特别是有限元近似解。与基于变分陈述的途径（5）式相比较，显然广义哈氏变分原理保持了对称性从而为数值计算带来了方便。

广义的哈氏变分泛函与哈氏原理之获得，相应地也可以说把原来给定的非保守问题广义地保守化了，其中涉及到的"能量"就不可能具有通常的物理含意而只是一种数学上的比拟，事实上，（3）式显然是虚功原理的一种表达而（6）式之中与力相乘的并不是对应的虚位移，因此乘积不属于物理上的虚功，这种数学上虚拟的功我们无妨称之为广义化的虚功或拟能。与经典保守问题相比拟，在经典保守问题中哈氏变分泛函乃拉格朗日算子之时间积分，拉氏算子为系统之动能减势能，而系统的总能量（动能加势能）是保守的(即其时间变率为零)，仿此，由广义哈氏变分泛函（9）式，可写出系统的广义总能量（的二倍）如下：

$$M=\int_0^L\left\{(\dot{w}_x)^2+\frac{\alpha}{\mu}(w_{xxx})^2-\frac{g}{\mu}(L-x)(w_{xx})^2\right\}dx \quad (10)$$

(10) 式关于时间求导数，有：

$$\dot{M}=-2\int_0^L\left\{\ddot{w}+\frac{\alpha}{\mu}w_{xxxxx}+\frac{g}{\mu}(L-x)w_{xx}\right\}\dot{w}_{xx}dx$$

$$+2\left(\dot{w}\dot{w}_x+\frac{\alpha}{\mu}w_{xxx}\dot{w}_{xx}\right)\Big|_0^L \quad (11)$$

由（1）、（2）式得知$\dot{M}=0$，即系统关于其广义总能量M，是定常的保守的。所以，我们也可以说原来给定的非保守问题广义地保守化了。

令

$$w(x,t)=e^{i\omega t}W(x) \quad (12)$$

代入（8）、（9）式，并利用时端条件，导致以下边值变分形式：

$$\delta h=0 \quad (13)$$

其中

$$h=\int_0^L\left[\omega^2(W_x)^2-\frac{\alpha}{\mu}(W_{xxx})^2+\frac{g}{\mu}(L-x)(W_{xx})^2\right]dx \tag{14}$$

(13)、(14) 式，便是以下展开有限元模型的出发点，边界条件（2）式相应地改为

$$W(0)=W(L)=W_{xx}(0)=W_{xx}(L)=0 \tag{15}$$

微分方程（1）式也将取以下形式

$$-\omega^2W+\frac{\alpha}{\mu}W_{xxxx}+\frac{g}{\mu}(L-x)W_{xx}=0 \tag{16}$$

为说明基于广义哈氏原理可令 $\omega=0$ 以及使用通常的瑞利商迭代技术得到临界载荷，我们简单地讨论一下 Pflüger 柱的失稳形式。考虑以下泛函

$$F(\omega^2,g,W(x))=\int_0^L\left(-\omega^2W+\frac{\alpha}{\mu}W_{xxxx}+\frac{g}{\mu}(L-x)W_{xx}\right)W_{xx}dx=0 \tag{17}$$

由

$$dF=\frac{\partial F}{\partial\omega^2}d\omega^2+\frac{\partial F}{\partial g}dg+\frac{\partial F}{\partial W}dW=0$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial W}dW=\int_0^L\Big\{&\left(-\omega^2W+\frac{\alpha}{\mu}W_{xxxx}+\frac{g}{\mu}(L-x)W_{xx}\right)\delta W_{xx}\\&+W_{xx}\delta\left(-\omega^2W+\frac{\alpha}{\mu}W_{xxxx}+\frac{g}{\mu}(L-x)W_{xx}\right)\Big\}dx\end{aligned} \tag{18}$$

通过简单的分部积分运算可以核验 (18) 式右端两项是相等的，进而由(16)式得知 $\partial F/\partial W\cdot dW=0$，于是求得本征值曲线 $\omega^2=\omega^2(g)$ 的斜率

$$\frac{d\omega^2}{dg}=-\frac{\partial F/\partial g}{\partial F/\partial\omega^2}=-\frac{\int_0^L\frac{(L-x)}{\mu}(W_{xx})^2dx}{\int_0^L-WW_{xx}dx}$$

由 (15) 式，知上式分母为

$$\int_0^L(W_x)^2dx$$

所以

$$\frac{d\omega^2}{dg}<0 \tag{19}$$

(19) 式表明，Pflüger柱的本征值曲线永为负斜率，所以失稳将以发散型式而不是颤振型式出现。据此，如果人们只关心临界载荷则可简单地令 $\omega=0$ 化为静力稳定问题。此时不难看出与基本方程对等，对于满足边界条件 (15) 式的函数$W(x)$，确定临界载荷g_{crit}的问题等价于计算以下瑞利商的极小值问题

$$G\equiv\frac{N(W)}{D(W)}=\frac{\int_0^L\frac{\alpha}{\mu}(W_{xxx})^2dx}{\int_0^L\frac{(L-x)}{\mu}(W_{xx})^2dx} \tag{20}$$

式中分子分母N、D显然都是正定的。而由（20）式的驻值条件确定的G值正是$\omega=0$时的（13）式。

三、Pflüger柱的有限元模型

基于广义哈氏变分原理进行有限元离散，与前述基于变分陈述的有限元离散相比，除具有对称性之外，还有以下两个特点。

第一，有限元离散模型要满足全部边界条件而不单单是原有问题的几何边界条件。

第二，单元之间连续阶的要求增高了，固变分泛函中最高阶导数为三阶，而变分陈述的办法以及通常的保守问题则只有两阶。

关于这第二个特点，粗略看来，在常规意义下的所谓"过保联单元"对于非保守稳定问题却有了新的用处。然而，作为完整的单元模型而言现有的过保联元显然不足以提供使用，因为迄今为止尚没有一种结构分析用的单元是由包括三阶导数的泛函导出来的。另外，由于存在分布的跟随力也使广义几何刚度矩阵复杂化了。

以下为方便计，将（14）式无因次化，令

$$\Omega^2=\frac{\mu\omega^2L^4}{\alpha}$$

$$q=\frac{gL^3}{\alpha}$$

$$\zeta=\frac{x}{L} \tag{21}$$

则（14）式、（15）式可改写为

$$\bar{h}=\int_0^1 \{\Omega^2(W_\zeta)^2-(W_{\zeta\zeta\zeta})^2+q(1-\zeta)(W_{\zeta\zeta})^2\}d\zeta \tag{22}$$

$$W(0)=W(1)=W_{\zeta\zeta}(0)=W_{\zeta\zeta}(1)=0 \tag{23}$$

令柱被划分成n个等长度的单元，沿x正向由1至n，由1至（$n+1$），分别进行单元与节点编号。令β表示单元局部坐标由0至1，经有限元离散，泛函$\bar{h}$将具有代数形式，完成变分运算后将获得以下预解代数本征值问题：

$$[K_4-q(K_2-K_3)]\{D\}=\Omega^2[K_1]\{D\} \tag{24}$$

其中

$\{D\}$——有效自由度；

$[K_1]=\sum\limits_i[K_1^i]$广义质量矩阵；

$[K_2]=n\sum\limits_i(n-i+1)[K_2^i]$广义几何刚阵（保守力对应部分）；

$[K_3]=n\sum\limits_i[K_3^i]$广义几何刚阵（非保守力对应部分）；

$[K_4]=n^4\sum\limits_i[K_4^i]$广义刚度矩阵；

$[K_j^i]$，$j=1,2,3,4$，表示单元i的有关矩阵，它们将根据不同的形函数设计单

元而有不同的具体表达式，但不因单元序号 i 而异，因此也可将上标 i 去掉。下面列出的一组〔K_j^i〕是对应着五次完备多项式的形函数。第 i 单元的节点变数为：

$$\lfloor D^i \rfloor \equiv \lfloor (W, W_\beta, W_{\beta\beta})_i,\ (W, W_\beta, W_{\beta\beta})_{i+1} \rfloor$$

虽然对于Pflüger 柱若只关心临界载荷则 K_1 没有用途，但为完整也为了在板中的应用，将其一并列出如下：

$$K_1^i = \frac{1}{1260}\begin{bmatrix} 1800 & & & & & \\ 270 & 288 & & & \text{对称} & \\ 15 & 21 & 2 & & & \\ -1800 & -270 & -15 & 1800 & & \\ 270 & -18 & -6 & -270 & 288 & \\ -15 & 6 & 1 & 15 & -21 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K_2^i = \frac{1}{210}\begin{bmatrix} 3600 & & & & & \\ 1800 & 1152 & & & & \\ 90 & 66 & 18 & & & \\ -3600 & -1800 & -90 & 3600 & & \\ 1800 & 648 & 24 & -1800 & 1152 & \\ -90 & -24 & 3 & 90 & -66 & 18 \end{bmatrix}$$

$$K_3^i = \frac{1}{140}\begin{bmatrix} 1200 & & & & & \\ 480 & 264 & & & & \\ 40 & 24 & 3 & & & \\ -1200 & -480 & -40 & 1200 & & \\ 720 & 216 & 16 & -720 & 504 & \\ -20 & 0 & 1 & 20 & -20 & 9 \end{bmatrix}$$

$$K_4^i = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2880 & & & & & \\ 1440 & 768 & & & & \\ 240 & 144 & 36 & & & \\ -2880 & -1440 & -240 & 2880 & & \\ 1440 & 672 & 96 & -1440 & 768 & \\ -240 & -96 & -12 & 240 & -144 & 36 \end{bmatrix}$$

四、简支矩形板的有限条模型

以 $x=0$，a；$y=0$，b 为界的四边简支矩形板，沿负 x 方向受有切向分布跟随力 g，其微分方程与边界条件可导出如下：

D.E.：

$$\dot{w} + \frac{D}{\mu}\nabla^4 w + \frac{g}{\mu}(a-x)w_{xx} = 0 \tag{25}$$

B.C.：

$$x=0,\ a：\ w=0 \text{ 与 } w_{xx}+\nu w_{yy}=0$$
$$y=0,\ b：\ w=0 \text{ 与 } w_{yy}+\nu w_{xx}=0 \tag{26}$$

显然，此问题也由于外力无势不存在通常意义下的哈氏变分泛函；与Pflüger柱的处理方法类似，对微分方程（25）式右端乘以δw_{xx}进行时空积分，注意到在简支板的周边不但弯矩为零而且$w_{xx}=0$，$w_{yy}=0$，可以导出以下广义哈氏变分泛函与变分原理：

$$\delta H^{*}=0 \tag{27}$$

$$H^{*}=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\left\{(\dot{w}_x)^2-\frac{D}{\mu}\left[(w_{xx}^2)+2(w_{xxy})^2+(w_{xyy})^2\right]\right.$$
$$\left.+\frac{g}{\mu}(a-x)(w_{xx})^2\right\}dxdydt \tag{28}$$

同样也可以证明关于其广义总能量的保守性以及以发散形式失稳，存在广义瑞利商等等性质，兹略。

令
$$w(x,y,t)=e^{i\omega t}W(x,y) \tag{29}$$

由（27），（28）式可改写为

$$\delta h=0 \tag{30}$$

$$h=\int_0^a\int_0^b\left\{\omega^2(W_x)^2-\frac{D}{\mu}\left[(W_{xxx})^2+2(W_{xxy})^2+(W_{xyy})^2\right]\right.$$
$$\left.+\frac{g}{\mu}(a-x)(W_{xx})^2\right\}dxdy \tag{31}$$

边界条件相应地改为，在周边上：

$$W=W_{xx}=W_{yy}=0 \tag{32}$$

令　$x=a\zeta$；$y=b\xi$；以λ表示板的长宽比$b=\lambda a$，以及令

$$\Omega^2=\mu\omega^2a^4/D$$
$$q=ga^3/D \tag{33}$$

则（31）式、（32）式相应改为无因次形式：

$$\bar{h}=\int_0^1\int_0^1\left\{\Omega^2(W_\zeta)^2+\left[(W_{\zeta\zeta\zeta})^2+\frac{2}{\lambda^2}(W_{\zeta\zeta\xi})^2+\frac{1}{\lambda^4}(W_{\zeta\xi\xi})^2\right]\right.$$
$$\left.+q(1-\zeta)(W_{\zeta\zeta})^2\right\}\lambda d\zeta d\xi \tag{34}$$

在$\zeta=0,1$；$\xi=0,1$的周边上有：

$$W=W_{\zeta\zeta}=W_{\xi\xi}=0 \tag{35}$$

基于（34）、（35）式可展开矩形板的有限元模型，这里我们采用方便的有限条模型，同时还可充分利用Pflüger柱单元模型的现成的矩阵。

令
$$W(x,y)=\sum_{m=1,3,5\cdots}F_m(\zeta)\sin m\pi\xi \tag{36}$$

将（36）式代入（34）式完成关于ξ的积分，注意到三角函数的正交性，显然对于不同的m值$F_m(\zeta)$之间不耦合，得到

$$\bar{h}=\frac{\lambda}{2}\sum_m\int_{\zeta=0}^{1}\left\{\Omega^2(F_m')^2-\left[(F_m''')^2+\frac{2}{\lambda^2}(F_m'')^2(m\pi)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\lambda^4}(m\pi)^4(F_m')^2\right]+q(1-\zeta)(F_m'')^2\right\}d\zeta \tag{37}$$

进一步在ζ方向的离散，采用与Pflüger柱一样的五次多项式，分成n个相等的单元，比较（37）式与（22）式可以看到对于任何确定的m奇数，（37）式中的F_m与（22）式中的W对应，只不过F_m关于ζ的导数是由“$'$”表示，以及与$(W_{\zeta\zeta\zeta})^2$对应的是由$\left[(F_m''')^2+\frac{2}{\lambda^2}(F_m'')^2(m\pi)^2+\frac{1}{\lambda^4}(m\pi)^4(F_m')^2\right]$三项组成而已。于是，对于每个$m$值，有以下的结构矩阵：

$$[K_{1m}]\equiv[K_1]=\sum_i[K_1^i]\text{广义质量矩阵}$$

$$[K_{2m}]\equiv[K_2]=n\sum_i(n+1-i)[K_2^i]\text{广义几何刚阵（保守力对应部分）}$$

$$[K_{3m}]\equiv[K_3]=n\sum_i[K_3^i]\text{广义几何刚阵（非保守力对应部分）}$$

$$[K_{4m}]=[K_4]+2\left(\frac{m\pi}{\lambda}\right)^2[K_2]+\left(\frac{m\pi}{\lambda}\right)^4[K_1]$$

$$=n^4\sum_i[K_4^i]+2\left(\frac{m\pi}{\lambda}\right)^2n\sum_i(n+1-i)[K_2^i]+\left(\frac{m\pi}{\lambda}\right)^4\sum_i[K_1^i] \tag{38}$$

其中K_1^i，K_2^i，K_3^i，K_4^i与Pflüger柱的同名方阵相同。

最后提供几个简单算例。关于Pflüger柱，文献〔5〕给出$q_{crit}=18.96$，采用本文有限元模型，$n=1$时$q_{crit}=19.188$；$n=2$时为18.97。关于简支板，取$\lambda=n=m=1$，由（38）式求得$q_{crit}=68.16$，文献〔2〕提供的近似解为69.1。

五、结　　语

本文以简单的方式较详细地讨论了Pflüger柱，特别是使该非保守问题广义保守化的变分原理。据此变分原理进行了有限元离散试验，提供了使用方便的全部对称的单元矩阵，在此基础上指出利用这些矩阵获得相关的简支矩形板的有限条模型的途径。然而应当指出对于较广泛的非保守问题可能难以做到广义保守化或者另有新特点，所有这些问题显然都有待进一步研究。

参考文献

〔1〕 S. N. Prasad and G. Herrmann: "The usefulness of adjoint systems in solving nonconservative stability problems of elastic continua", Int. J. Solids Struct. 5, 727-735, 1969.

〔2〕 H. Leipholz: "Direct variational methods and eigenvalue problems in engineering" 1977.

〔3〕 H. Leipholz: "Variational principles for nonconservative problems, a foundation for a finite element approach" CMAME 17/18, 609-617, 1979.

〔4〕 K. H. Huebner: "The finite element method for engineers" 1975.

〔5〕 A. Pflüger: "Stabilitätsprobleme der elastostatik" 1950.

FINITE ELEMENT MODELS BASED ON A GENERALIZED HAMILTON'S PRINCIPLE FOR PFLÜGER'S ROD AND ITS RELATIVE PLATE

Zhang Gongxing and Li Songnian

(*Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics*)

Abstract

A generalized Hamilton's principle for analysis of Pflüger's rod and its relative plate is provided in engineering form by a quite simple approach, so that the problem of a nonconservative system is transformed into that of a generalized conservative system. According to this variational principle, an attempt to undertake the discrete tests of finite elements has been made and the features of the finite models are discussed in brief. A set of symmetric matrices for an element model are given in explicit form. After it is confirmed that unstability of pflüger's rod is caused by divergence, not by flutter, it is pointed out that the critical load can be determined by applying the conventional iterative technique for Rayleigh quotient. Some numerical examples have verified this model.

At last, as an interesting extension, a finite stripe model for analysis of simply supported rectangular plate subjected to follower forces has been derived by using the matrices mentioned above and tested preliminarily.